

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. ЛОМОНОСОВА М.В.

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по специальному физическому практикуму  
"Лазерная спектроскопия"  
к задаче

**"Управляемые классические корреляции  
типа Эйнштейна-Подольского-Розена"**

Составители: Д.Н.Клышко, С.П.Кулик

Москва, 1998 г.

## Часть 2. Управляемые классические корреляции типа Эйнштейна-Подольского-Розена

### Теоретическое введение

#### 1. Введение

В 1935 г. А.Эйнштейн, Б.Подольский и Н.Розен обратили внимание на существование полных (100%-ых) управляемых квантовых корреляций между наблюдаемыми свойствами двух удаленных частиц. На основании этого они пришли к выводу, что измеряя свойства одной частицы можно косвенно, без всякого возмущения, производить точные измерения некоммутирующих наблюдаемых у другой частицы. Возможность же измерения некоммутирующих наблюдаемых приводит к выводу о существовании их и до измерения, *априори*. Этот вывод противоречит основным принципам квантовой механики. Таким образом, делается предположение о необходимости *дополнить* квантовую теорию, т.е. описать свойства обеих частиц (и их корреляции) с помощью некоторых “скрытых” параметров, например, в терминах классической статистической физики и свести тем самым квантовую физику к классической.

Примерно 30 лет спустя Белл из общих соображений показал, что эта логическая схема возможна лишь если дополнить классическую физику какими-то новыми далекодействующими взаимодействиями, т.е. ввести *нелокальность*. Однако, экспериментальное подтверждение нарушения неравенств Белла (в точном соответствии с предсказаниями квантовой теорией) показало - согласно современной распространенной терминологии - неприменимость *локального реализма*. Остаются две основные альтернативы - признать *нелокальный реализм* или примириться с квантовой теорией в копенгагенской (или иной) трактовке. Иногда говорят также (довольно непоследовательно) о *нелокальности квантовой теории*.

Однако, при доказательстве неравенства Белла используется не просто факт существования корреляций или их величина (фактически в доказательстве фигурируют неполные корреляции), а некоторое более тонкое их свойство. Поэтому естественно возникает вопрос - являются ли сами по себе управляемые корреляции типа ЭПР-Бома между показаниями двух приборов существенно квантовым явлением? Часто считают, что наличие этих корреляций является достаточным доказательством нелокальности и что парадокс ЭПР заключается именно в их существовании.

Фундаментальное различие квантовых и классических физических представлений наиболее контрастно проявляется при рассмотрении экспериментов, демонстрирующих парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР)[1] в варианте Бома [2] и нарушение неравенств Белла [3]. Здесь целесообразно выделить два отдельных вопроса или “парадокса”:

- существование “нелокально” управляемой корреляции типа ЭПР-Бома между показаниями удаленных приборов и

- парадокс Белла - нарушение некоторых неравенств, составленных из этих показаний.

*В настоящей работе описывается действующая классическая радиотехническая модель, имеющая много общего с квантовыми ЭПР-моделями. Она демонстрирует первый из перечисленных выше парадоксов, т.е. имитирует управляемую корреляцию или антикорреляцию типа ЭПР-Бома, включая полную, 100%-ую. Ее анализ выявляет простой классический механизм как возникновения таких корреляций, так и воздействия на них удаленных наблюдателей, и тем самым снимает окружающий их ореол таинственности. Таким образом, первый парадокс лишается статуса истинного квантового парадокса, поскольку имеет классический аналог.*

Второй парадокс - нарушение неравенства Белла - является истинным парадоксом, он демонстрирует принципиальное отличие квантовых и классических представлений. В проведенных до сих пор экспериментах он выявляется лишь в условиях неполной корреляции и лишь в результате статистической обработки достаточно большого массива экспериментальных данных. В нашей модели неравенство Белла, конечно, не нарушаются.

## **2. Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена и управляемые классические корреляции**

В 1935 году А.Эйнштейн, Б.Подольский и Н.Розен (ЭПР- не путать с электронным парамагнитным резонансом) предложили мысленный эксперимент, на основании результатов которого они пришли к выводу, что квантовомеханическое описание не является полным и что существуют элементы реальности, которые не учитываются в квантовой механике.

### **2.1. Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена и его формальное разрешение**

Будем рассматривать т.н. парадокс ЭПР в варианте, предложенном Д.Бомом. Пусть имеется система двух частиц, так что полный спин системы равен нулю. Например, это может быть электрон-позитронная пара. Другим примером служит двухфотонный распад атома, когда поляризации фотонов ортогональны. И, наконец, при спонтанном параметрическом рассеянии можно так ориентировать кристалл (или пару кристаллов), что излучение в двух пространственных модах будет удовлетворять этому условию.

Совместное состояние пары частиц записывается в виде антисимметричной комбинации спиновых состояний со спином 1/2:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2]. \quad (2.1)$$

Здесь  $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$  - собственные состояния z-компонент спина i-ой частицы с собственными значениями 1/2. Антисимметричное (синглетное) состояние (2.1) инвариантно относительно вращений, т.е. оно сохраняет свой вид в

любом базисе. Другими словами, это состояние имеет один и тот же вид независимо от того, какая ось используется для определения проекции спина. В частности, если выбрано направление “ $x$ ”, то состояние (10.1) переходит в:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\rightarrow_1\rangle|\leftarrow_2\rangle - |\leftarrow_1\rangle|\rightarrow_2\rangle], \quad (2.2)$$

где  $|\rightarrow_i\rangle|\leftarrow_i\rangle$  - собственные состояния  $x$ -компоненты спина.

Теперь предположим что две частицы разлетелись настолько далеко, что взаимодействием между ними можно пренебречь. Будем производить измерение  $z$ -компоненты спина одной частицы (вертикальной поляризации в одном пучке). Это измерение, в соответствии с (10.1), может дать либо значение  $+1/2$  либо  $-1/2$ . Если измерение дало результат  $+1/2$ , то коррелированная с ней частица должна оказаться в состоянии  $-1/2$ . Объясняется это действием проекционного постулата: После проведения измерения над системой, она проецируется на состояние данной наблюдаемой. В данном случае наблюдаемой служит проекция на ось  $z$  первой частицы. Поскольку какое-либо влияние между частицами исключено по условию эксперимента, то отсюда делается вывод, что вторая частица имела такое значение проекции спина и *до измерения* над первой частицей. Т.е. *априори* существовал элемент физической реальности в виде определенного значения проекции спина второй частицы на ось  $z$ .

Теперь предположим, что в эксперименте измеряется  $x$ -компонента первой частицы. Согласно инвариантности состояния (2.1) относительно вращений будем рассматривать состояние (2.2), т.е. эквивалентное представление исходного состояния (2.1).

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что у второй частицы априори существует определенное значение  $x$ -компоненты спина, в зависимости от результата измерения над первой частицей. Наблюдаемой в данном случае является значение  $x$ -компоненты спина первой частицы, а полное состояние системы проецируется либо на состояние  $|\rightarrow_1\rangle|\leftarrow_2\rangle$ , либо на состояние  $|\leftarrow_1\rangle|\rightarrow_2\rangle$ .

Поскольку две проекции спина - несовместные переменные, они соответствуют некоммутирующим операторам, то не существует такого состояния системы, в котором обе переменные имели бы определенные значения. Отсюда ЭПР сделали вывод о неполноте квантово-механического описания, в которое следует добавить “скрытые” параметры.

**Парадокс разрешается** в рамках аппарата стандартной квантовой механики. Прежде всего, замети, что поскольку рассматриваемые частицы “1” и “2” взаимодействовали в прошлом, то им нельзя по отдельности приписать волновую функцию. Существует лишь совместная волновая функция  $|\Psi^-\rangle$ .

На языке поляризационной оптики это означает, что у обоих пучков степень поляризации равна нулю. Т.о. состояние каждой частицы (в каждом из)

пучков является смешанным и его следует описывать с помощью матрицы плотности. Из свойств матрицы плотности следует, что состояние одной из взаимодействующих частиц можно найти, взяв след по “лишним” переменным от матрицы плотности общей системы. Тогда до измерения его состояние есть:

$$\rho_2 = Sp_{(1)}\rho_{12} = Sp_{(1)}(|\Psi\rangle\langle\Psi|). \quad (2.3)$$

Здесь мы учли, что общее состояние описывается волновой функцией, т.е. является чистым. Тогда из (3) следует:

$$\rho_2 = Sp_{(1)}(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) = \frac{1}{2}[|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|]. \quad (2.4)$$

**Замечание.** При выводе (10.4) мы воспользовались тем, что операция  $Sp$  оставляет только те компоненты выражения  $|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ , которые содержат диагональные элементы по первой частице, т.е. вида  $|\uparrow_1\rangle\langle\downarrow_2| \langle\downarrow_2| \langle\uparrow_1|$ .

С другой стороны, то же состояние описывается выражением (2):

$$\rho_2 = Sp_{(1)}(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) = \frac{1}{2}[|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|]. \quad (2.5)$$

Видно, что оператор плотности второй частицы представляется в виде единичного оператора с точностью до  $1/2$  (поскольку  $\hat{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|$ ).

Что же происходит со второй частицей после измерения? Если измерялась  $z$ -компонента спина первой частицы, то состояние второй было с равной вероятностью либо  $|\uparrow\rangle$ , либо  $|\downarrow\rangle$ , причем с равной вероятностью. Если же измеряется  $x$ -компонента спина первой частицы, то с равной вероятностью состояние второй частицы оказывается либо  $|\rightarrow\rangle$ , либо  $|\leftarrow\rangle$ . Таким образом оператор плотности до и после измерения имеет один и тот же вид, хотя и описывает результаты разных экспериментов. Значит экспериментально невозможно отличить все эти состояния.

## 2.2. Демонстрация ЭПР-корреляций

Предлагаемая модель реализует экспериментальную ситуацию, изображенную на Рис.1 и часто используемую при наглядном описании экспериментов типа ЭПР-Бома. Передатчик  $S$  время от времени посылает сообщения одновременно двум удаленным адресатам  $A$  и  $B$ . Сообщения содержат команды зажечь лампы зеленого или красного цвета.

Символически четыре возможных альтернативных исхода одной передачи можно представить так:  $(++)$ ,  $(-+)$ ,  $(+-)$  или  $(--)$ ; здесь знак плюс соответствует зеленой лампе, минус - красной.

В распоряжении каждого наблюдателя  $A$  и  $B$  имеется по одной регулировочной ручке с тремя особыми положениями, маркированными знаками  $-\pi$ ,  $0$  и  $+\pi$ .

Передачи многократно повторяются, причем исход каждой из них случаен - на каждом приемнике с равными вероятностями  $1/2$ , не зависящими от положения ручек  $\alpha$  и  $\beta$ , зажигается или зеленая или красная лампа. Фактически в нашем демонстрационном эксперименте лампы вспыхивают примерно каждую секунду в течении половины секунды.

Наблюдатель  $C$ , видящий одновременно обе пары ламп в  $A$  и  $B$ , замечает, что между цветами вспыхивающих одновременно ламп имеется определенная корреляция, причем ее величина и знак зависят от положения ручек. Наиболее характерны три ситуации.

1. Если обе ручки стоят, например, в одинаковых средних положениях “0”, то цвета ламп каждый раз одинаковы, т.е. наблюдаются только исходы  $(++)$  или  $(--)$ . Таким образом, цвета полностью коррелированы. Полная корреляция наблюдается также и в более общем случае - при условии, что сумма координат ручек  $\gamma = \alpha + \beta$  равна 0. (Практически из-за технических ограничений достигалась не идеальная корреляция, а лишь порядка 90%.)

2. Но стоит только одному из наблюдателей перевести свою ручку в одно из крайних положений - так, что  $\gamma = \pm\pi$ , как наблюдаются только исходы  $(-+)$  или  $(+-)$ , т.е. цвета становятся антикоррелированными.

3. Наконец, если ручки стоят, например, в положениях “0” и “ $\pi/2$ ” (или, вообще, расположены так, что  $\gamma = \pm\pi/2$ ), то корреляция цветов ламп в  $A$  и  $B$  полностью отсутствует.

Возникает естественный вопрос: как, например, положение ручки в  $A$  (или в  $B$ ) может влиять на цвет лампы, которая загорится при очередной передаче в  $B$  (или в  $A$ )? Пусть ручки в  $A$  и  $B$  стоят в среднем положении “0”. Наблюдатель в  $A$  увидев зеленую вспышку уверен, что в этот же момент вспыхнула зеленая лампа.

Переведя потом ручку в крайнее положение и опять увидев зеленую вспышку он теперь уверен, что в этот же момент вспыхнула уже красная лампа. Как лампы в  $B$  “узнают” о положении ручки в  $A$ ? Налицо, казалось бы, управление на расстоянии.

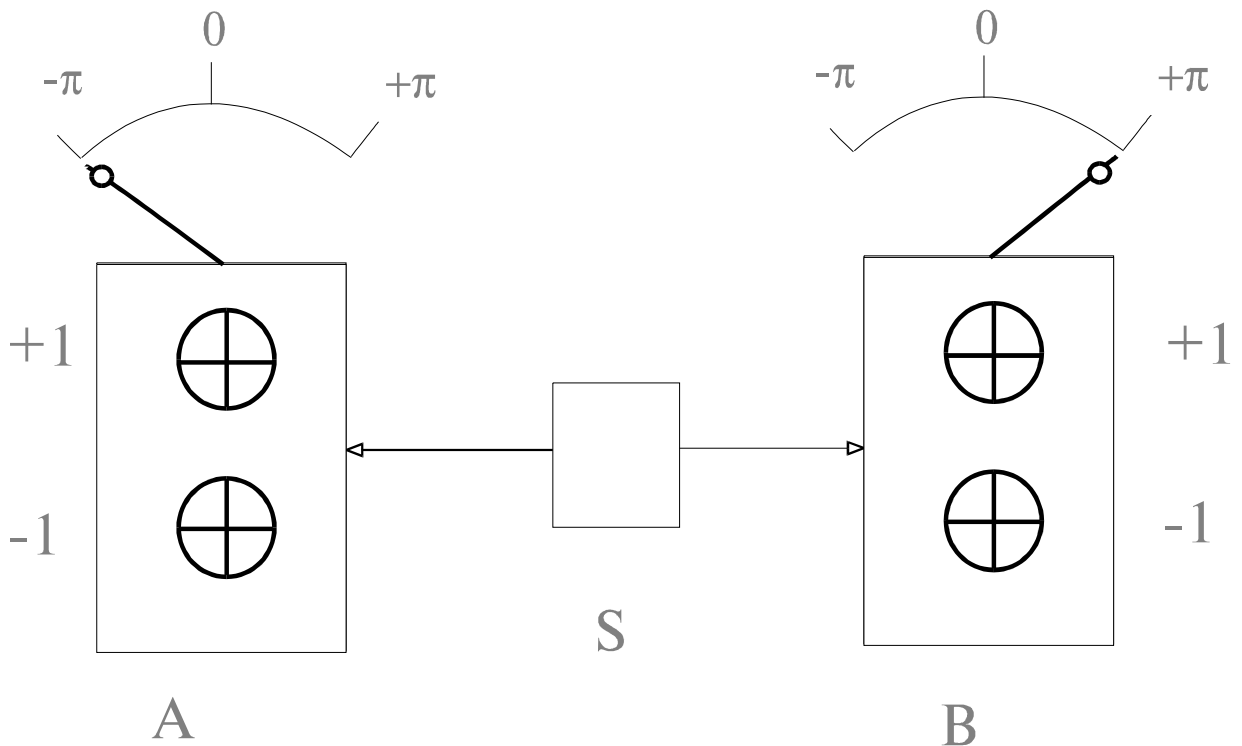


Рис.2.1. Общая схема экспериментов для демонстрации корреляций ЭПР-типа и выявления нарушения или выполнения неравенств Белла.

Описанные три серии наблюдений с нашей моделью в точности воспроизводят квантовую корреляцию, антикорреляцию или ее отсутствие, наблюдаемые в “настоящих” экспериментах типа ЭПР-Бома. В квантовом случае переносчиками информации служат пары фотонов или частиц со спином  $1/2$  с коррелированными свойствами. Вспышкам ламп соответствует одновременная регистрация пары частиц в двух детекторах. Положениям ручек  $\alpha$  и  $\beta$  на рис.1 соответствуют в оптических экспериментах длины оптических путей или ориентации поляризационных призм в интерферометрах интенсивности, а в экспериментах с ферми-частицами - ориентации магнитов Штерна-Герлаха. Правда, в квантовых экспериментах моменты передачи очередного “сообщения” (т.е. моменты вылета пар частиц) случайны, а в нашей модели они регулярны. Однако, не представляет труда сделать их также случайными с помощью генератора случайных чисел. Квантовая стохастичность интервалов между сообщениями не имеет значения в обсуждаемых вопросах.

Нередко ответ на заданный выше вопрос в контексте квантовых экспериментов звучит так: “это проявление *квантовой нелокальности*”. При этом, по-видимому, имеется ввиду некоторое таинственное сверхсветовое влияние аппаратуры в  $A$  на события в  $B$  (или наоборот). Иногда также говорится, что квантовая механика предсказывает более сильные корреляции, чем допускается *локальными* классическими теориями или *локальным реализмом*. Под *локальностью* понимается, соответственно,

отсутствие дальнего действия за счет неизвестных взаимодействий между аппаратурой в  $A$  и  $B$ <sup>1</sup>. Еще один популярный термин - “несепарабельность квантовых объектов”. В данном контексте под этим понимается необходимость совместного описания пар коррелированных частиц даже если они разлетелись на большое расстояние, невозможность их отдельного, индивидуального описания (в этом смысле пары электрических сигналов в нашем эксперименте также можно считать несепарабельными).

Более конкретный и точный ответ заключается в том, что положения ручек влияют лишь на “свои” лампы и что этого вполне достаточно для изменения степени и знака корреляции удаленных сигналов. Это утверждение, по-видимому, не совсем тривиально и рассматриваемая модель должна помочь преодолеть устоявшееся предубеждение. В нашей модели, как и в “настоящих” квантовых ЭПР-моделях, используется некоторый общий принцип управления “на расстоянии” парными корреляциями. Это управление осуществляется путем отбора определенных подмножеств из имеющегося в  $A$  и  $B$  общего информационного множества. Он поясняется далее на простом конкретном примере (см. ниже рис.3). Отличие классического и квантового моделей заключается лишь в способе описания этого общего априорного множества. В первом случае это можно сделать с помощью совместных вероятностей для всех возможных “сообщений”, а во втором - лишь с помощью волновой функции переносчика информации.

Таким образом, воздействие удаленных наблюдателей на их взаимные корреляции не означает, как и следовало ожидать, какого либо таинственного дальнего действия, оно вполне локально. Обратим внимание, что наблюдение корреляции требует передачи информации от  $A$  и  $B$  (протоколов испытаний с фиксацией номера или времени передачи) с помощью обычных каналов к третьему наблюдателю  $C$ ; сами же  $A$  и  $B$  никакого видимого влияния положения ручек - своих или чужих - на характер вспышек не замечают. Это обстоятельство исключает часто обсуждаемую возможность сверхсветового обмена информацией между  $A$  и  $B$  с помощью ЭПР-корреляции.

### 3. Проверка неравенства Белла

Доказательство неприменимости скрытых параметров для описания некоторых предсказаний квантовых моделей называют теоремой Белла.

Ниже будет рассмотрен случай двух наблюдателей и дихотомной наблюдаемой (или т.н. телеграфный сигнал, т.е. сигнал, принимающий два значения). Однако если число наблюдателей  $N$  растет, то как показали независимо Д.Н.Клышко и Д.Мермин, отношение квантового и

---

<sup>1</sup>Однако, наиболее часто термин *нелокальность* употребляют при неполной ЭПР-корреляции в связи с нарушением неравенств Белла в квантовых моделях и экспериментах.



классического пределов для некоторой наблюдаемой величины  $S_N$  растет как  $2^{(N-1)/2}$ .

### 3.1. Неравенство Белла

Рассмотрим некоторый случайный процесс, который можно характеризовать четырьмя переменными  $A, A', B, B'$ . Каждая дискретная случайная величина может принимать два значения, например:  $A' \rightarrow a' = \pm 1$ , и т.д. (В квантовой теории такой параметризации отвечают операторы некоей физической величины и принимаемые собственные значения). Иногда мы будем писать  $A' = \pm 1$  и т.д.

Для наглядности будем полагать, что имеется передатчик, который посылает сообщения двум наблюдателям  $A$  и  $B$ . У каждого наблюдателя имеется по одной ручке, с помощью которой он может менять свою наблюдаемую:  $A \rightarrow A', B \rightarrow B'$  (см. Рис.1). В общем случае число положений ручки - произвольно, т.е. наблюдаемые  $A$  и  $B$  зависят от параметров  $A(\alpha), B(\beta)$ . Например, сообщение состоит в команде зажечь лампу красного (-) или зеленого (+) цвета. Одна передача может содержать четыре исхода:  $(++)$ ,  $(+-)$ ,  $(-+)$ ,  $(--)$ . Передачи повторяются многократно, а исход каждой из них случаен. Т.е. независимо от выбора наблюдаемой  $A$  или  $A', B$  или  $B'$  у каждого наблюдателя загорается красная или зеленая лампа. Эксперимент состоит в выяснении корреляции цвета ламп у разных наблюдателей. Опишем этот процесс математически.

Предположим, что существует положительно определенная нормированная функция совместного распределения вероятностей этих четырех величин:

$$P(A, A', B, B') \geq 0, \quad (2.6)$$

удовлетворяющая условию нормировки:

$$\sum_{a, a', b, b'} P(A, A', B, B') = 1. \quad (2.7)$$

Для функций распределения можно вычислять маргинальные вероятности по правилам:

$$P(+1, A', B, B') + P(-1, A', B, B') = P(A', B, B'). \quad (2.8)$$

Введем величину  $S$  - т.н. наблюдаемая Белла, которая выражается через моменты наблюдаемых величин:

$$\langle S \rangle \equiv \frac{1}{2} \{ \langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle \}. \quad (2.9)$$

Неравенство Белла (часто его называют неравенством Белла типа Гринберга - Хорна - Шимони - Хольта) имеет вид (доказательство вынесено в приложение):

$$|\langle S \rangle| \leq 1. \quad (2.10)$$

Таким образом, величина  $S$ , составленная из результатов наблюдений, не может по модулю превышать единицу! Это неравенство нарушается в

экспериментах с объектами, которые описываются квантово-механически (на языке волновых функций).

Важно, что принципиальное отличие классических и квантовых экспериментов с двумя наблюдателями типа ЭПР-Бома проявляется лишь при некоторых **промежуточных** положениях ручек, отличных от рассмотренных выше и вызывающих **неполную** корреляцию. При этом для выявления этого отличия надо проводить по меньшей мере четыре серии наблюдений (при четырех положениях ручек  $(\alpha, \beta)$ ) и рассчитывать из них четыре коэффициента корреляции. Таким образом, это отличие имеет лишь статистический характер.

Введем следующую параметризацию результатов эксперимента, изображенного на рис 1. При загорании зеленой или красной лампы у левого приемника будем приписывать дискретной случайной величине  $A$  значения  $a = +1$  или  $a = -1$  соответственно. Аналогично, пусть дихотомная (двухзначная) случайная величина  $B$  со значениями  $b = \pm 1$  отображает цвет загорающихся ламп у правого приемника. Пусть переменные  $\alpha, \beta$  с интервалом значений  $(-\pi, +\pi)$  обозначают положения регулировочных ручек, влияющих каким-то образом на совместную статистику  $A$  и  $B$ , а переменная  $\gamma = \alpha + \beta$  - их сумму. Итак, имеются два “телеграфных” случайных процесса  $a_i(\alpha)$  и  $b_i(\beta)$ , корреляция между которыми зависит от двух регулируемых параметров  $\alpha$  и  $\beta$  ( $i$  - номер испытания).

Степень корреляции удобно характеризовать средним значением от произведения наблюдаемых случайных чисел:  $M(\gamma) = \langle A(\alpha)B(\beta) \rangle$ . Таким образом,  $M = +1$  соответствует полной корреляции,  $M = -1$  - антикорреляции и  $M = 0$  - отсутствию корреляции. В этой связи будем называть параметр  $M$  просто *корреляцией*.

На рис.2 изображены три зависимости  $M(\gamma)$ : согласно классической теории для нашей модели, дающей

$$M_{class}(\gamma) = 1 - 2|\gamma|/\pi \quad (-\pi \leq \gamma \leq +\pi), \quad (2.11)$$

согласно квантовой теории для “настоящих” экспериментов ЭПР-типа, дающей

$$M_{quant}(\gamma) = \cos \gamma, \quad (2.12)$$

и согласно результатам экспериментов с нашей радиотехнической моделью. Ромбами отмечены точки пересечения квантовой и классической зависимостей, обсуждавшиеся выше, а кружками и квадратами - точки, используемые обычно при формулировке и проверке неравенства Белла (см. ниже). Отметим, что известная классическая ЭПР-модель, состоящая из двух частиц с коррелированными угловыми моментами также приводит к зависимости (2.11).

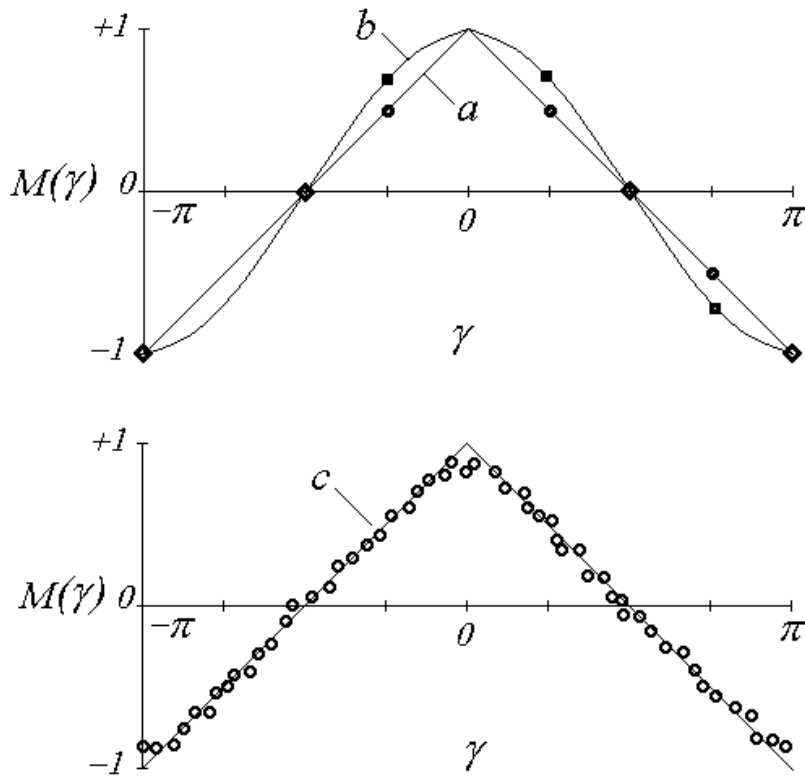


Рис.2. Зависимость корреляции  $M=\langle AB \rangle$  цвета ламп на Рис.1 от суммы координат регулировочных ручек  $\gamma = \alpha + \beta$  согласно классической теории (a), квантовой теории (b) и рассматриваемого эксперимента (c).

Итак, наблюдаемое отличие рассматриваемых конкретных моделей сводится к различию вида зависимости корреляции  $M(\gamma) = \langle AB \rangle$  от суммы координат ручек  $\gamma = \alpha + \beta$  - косинусоидальной кривой или ломаной прямой. Превышение по абсолютной величине квантовой корреляции над классической (для наших частных модели) достигает 41% при  $\gamma = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$  (см. кружки и квадраты на рис.2.2). Таким образом, если исключить общие точки  $0, \pm\pi/2, \pm\pi$ , то в рассматриваемых примерах квантовые корреляции действительно несколько сильнее классических.

Можно показать, что среднее значение  $M(\gamma) = \langle AB \rangle$  определяет также и совместное распределение вероятностей  $P(a,b) = (1+abM)/4$  для случайных величин  $A$  и  $B$  (здесь  $a, b = \pm 1$ ). В соответствии с (11, 12) это распределение имеет следующую форму в классической и квантовой моделях

$$P(++ ) = P(-- ) = \frac{1}{2} - \frac{|\gamma|}{2\pi}, \quad P(+- ) = P(-+ ) = \frac{|\gamma|}{2\pi}, \quad (2.13)$$

$$P(++ ) = P(-- ) = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad P(+- ) = P(-+ ) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (2.14)$$

Здесь, например,  $P(+,-)$  - относительная частота события  $(+,-)$  при достаточно большом числе испытаний. Следовательно, обычное определение среднего значения дает

$$M = \sum_{a,b} ab P(a,b) = P(++)+P(--) - P(-+) - P(+-) = 4P(++)-1.$$

Протокол некоторой серии испытаний с фиксированными  $a, b$  запишется в виде таблицы следующего вида.

$i$	$a_i$	$b_i$	$m_i=a_i b_i$
	$\alpha=\pi/2$	$\beta=\pi/4$	$\gamma=3\pi/4$
1	+1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	-1	+1	-1
4	+1	-1	-1
5	+1	+1	+1

В последней колонке выписаны произведения  $m_i=a_i b_i$ , характеризующие после усреднения корреляцию между цветами ламп. Статистическая обработка таких записей, полученных при различных парах  $\alpha$  и  $\beta$ , была представлена выше на рис.2с. Оказалось, что среднее значение  $M=\langle m_i \rangle$  в соответствии с теоретической зависимостью (11, 12) зависит лишь от суммы координат регулировочных ручек  $\gamma$ .

Проведем теперь последовательно 4 серии испытаний (из  $N$  испытаний в каждом) со следующими 4 наборами параметров:

$$(\alpha, \beta)=(0, -\pi/4), (\pi/2, -\pi/4), (0, \pi/4), (\pi/2, \pi/4).$$

При этом соответственно  $\gamma = -\pi/4, \pi/4, \pi/4, 3\pi/4$ , см. рис. 2. Обозначим  $a \equiv a(0), a' \equiv a(\pi/2), b \equiv b(-\pi/4), b' \equiv b(\pi/4)$  и образуем  $N$  чисел

$$s_k \equiv (a_k b_k + a'_{N+k} b_{N+k} + a_{2N+k} b'_{2N+k} - a'_{3N+k} b'_{3N+k})/2. \quad (2.15)$$

Эти числа принимают с определенными вероятностями значения  $0, \pm 1, \pm 2$ , т.е. они реализуют некоторую случайную величину  $S$ . Подчеркнем, что для вычисления ее отдельной реализации  $s_k$  используются результаты четырех различных испытаний при указанных наборах  $(\alpha, \beta)$ .

После усреднения полученных чисел  $s_k$  при достаточно большом  $N$  мы обнаружим, что  $\langle S \rangle_{exp} \approx 1$ . Этот же результат следует из (11) или графика на рис.2а:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= (\langle AB \rangle + \langle A' B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A' B' \rangle) / 2 = \\ &= [M(-\pi/4) + M(\pi/4) + M(\pi/4) - M(3\pi/4)] / 2 = (1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2) / 2 = 1. \end{aligned}$$

Полученное значение  $\langle S \rangle$  является максимальным для любых классических моделей, так как в последних должно выполняться следующее неравенство Белла

$$|\langle S \rangle_{class}| \leq 1. \quad (2.16)$$

В то же время в соответствующих квантовых моделях имеет место более слабое ограничение

$$|\langle S \rangle_{quant}| \leq \sqrt{2}. \quad (2.17)$$

Это предельное значение как раз обеспечивается функцией (12):

$$|\langle S \rangle_{quant}| = [\cos(-\pi/4) + \cos(\pi/4) + \cos(\pi/4) - \cos(3\pi/4)]/2 = \sqrt{2}.$$

Полученное различие на 41% квантового и классического значений для величины  $\langle S \rangle$  максимально для рассматриваемых моделей, при другом выборе набора параметров  $\alpha$  и  $\beta$  оно будет меньше.

Заметим, что отдельные реализации  $S_k$ , а также их усредненные значения, найденные при **конечном**  $N$ , могут превышать по модулю пределы в (2.16, 2.17), т.е. эти неравенства имеют лишь статистический характер.

Подчеркнем, что неравенства (2.16, 2.17) ограничивают не саму величину корреляции  $M(\gamma)$  наблюдаемых  $A$  и  $B$ , а лишь среднее от некоторой билинейной комбинации этих наблюдаемых при различных  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. ограничивает некоторый функционал  $S(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$  от  $M(\alpha + \beta)$ .

Доказательство неприменимости скрытых параметров для описания некоторых предсказаний квантовых моделей часто называют теоремой Белла.

#### 4. Управление корреляцией на расстоянии

Рассмотрим сначала простой метод получения двух дихотомных случайных сигналов с регулируемой степенью взаимной корреляции из одного непрерывного случайного процесса. Пусть  $\phi(t)$  - стационарный случайный процесс с  $\langle \phi \rangle = 0$ , определяющий случайную фазу, которая равномерно распределена на приведенном интервале  $0 \div 2\pi$ . Образует из него случайный телеграфный сигнал с помощью алгоритма

$$a(\alpha, t) \equiv \text{sign}\{\cos[\phi(t) + \alpha]\}, \quad (2.18)$$

где  $\alpha$  - произвольный параметр. Из этого определения следует, что  $\langle a(\alpha) \rangle = 0$  и  $a(\alpha \pm \pi) = -a(\alpha)$ , т.е. сигналы  $a(\alpha)$  и  $a(\alpha \pm \pi)$  антикоррелированы. В то же время  $a \equiv a(\alpha)$  и

$$a' \equiv a(\alpha \pm \pi/2) = \mp \text{sign}\{\sin[\phi(t) + \alpha]\} \quad (2.19)$$

- некоррелированные сигналы, так как  $\cos x$  и  $\sin x$  - ортогональные функции (см. рис.3). Нетрудно из (19) найти корреляцию сигналов  $a(\alpha)$  и  $a(\alpha + \Delta\alpha)$  в общем случае:

$$M(\Delta\alpha) \equiv \langle x(\alpha)x(\alpha + \Delta\alpha) \rangle = 1 - 2|\Delta\alpha|/\pi \quad (-\pi \leq \Delta\alpha \leq \pi). \quad (2.20)$$

Таким образом, из одного случайного процесса  $\phi(t)$  мы можем образовать два (или более) случайных дихотомных сигнала  $a(\alpha)$  и  $a(\alpha + \Delta\alpha)$

с произвольной степенью корреляции между ними  $M(\Delta\alpha)$ , лежащей между -1 и +1. Следовательно, если передать (например, по радио) один и тот же процесс  $\phi(t)$  нескольким удаленным

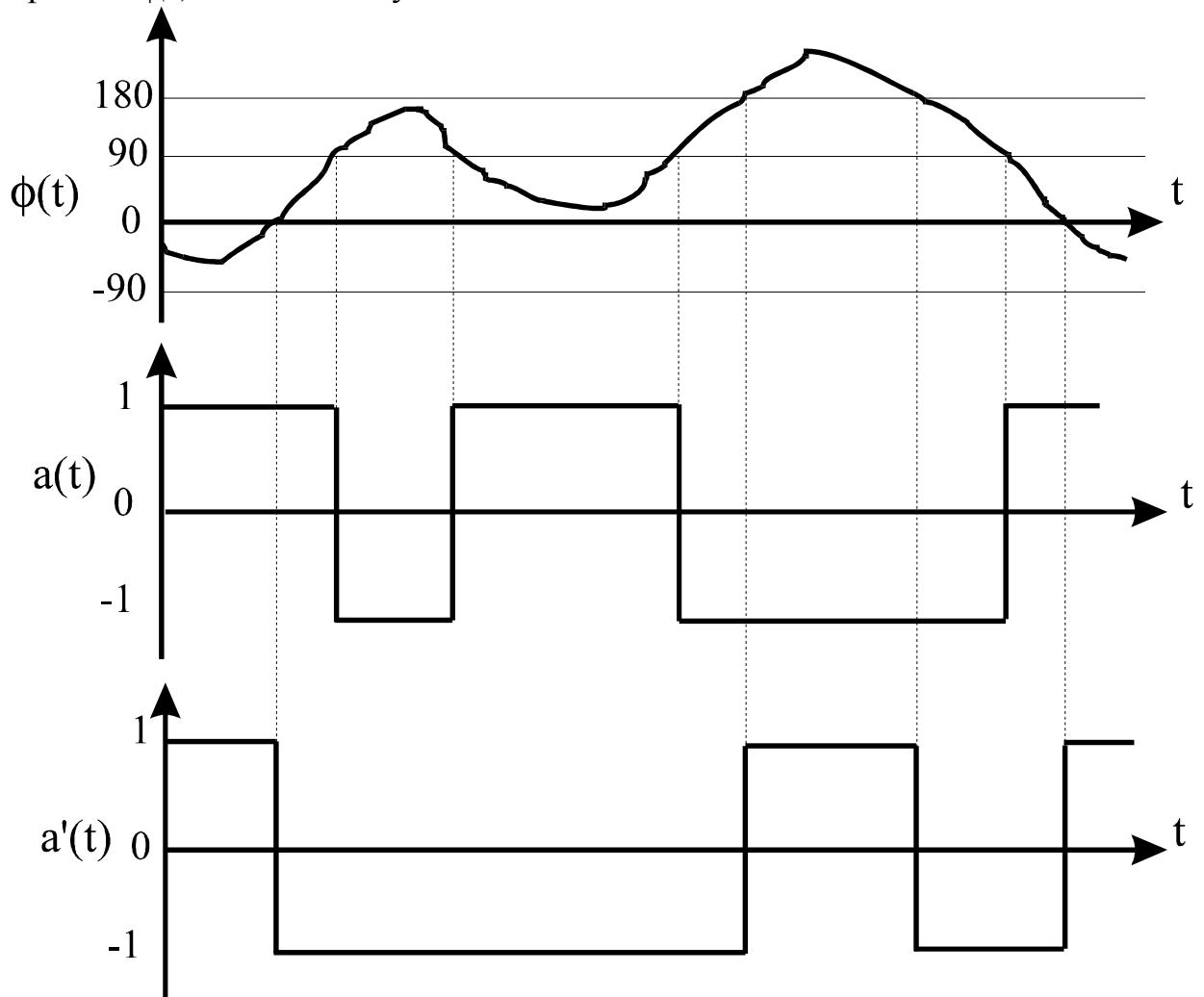


Рис.2.3. Формирование двух независимых телеграфных сигналов  $a(t)$  и  $a'(t)$  из одного случайного процесса по правилу (2.19).

наблюдателям, то каждый из них с помощью “своего” локального параметра  $a_n$  сможет влиять “на расстоянии” на парную взаимную корреляцию наблюдаемых. Этот эффект является классическим аналогом корреляции ЭПР-Бома. Однако, характер зависимости корреляции от параметров здесь другой, см. рис.2. В “настоящих” ЭПР-экспериментах телеграфный характер сигналов обусловлен дихотомным спектром наблюдаемых операторов: число проекций спина  $1/2$  на выделенное направление и число типов поляризации фотона равно двум. Здесь же дихотомность обеспечивается двузначностью функции  $sign(x)$ . Для реализации описанной процедуры промодулируем случайным сигналом  $\phi(t)$  фазу “несущего” монохроматического колебания  $X(t)$  с частотой  $\omega_0$ :  $X(t)=\cos[\omega_0 t+\phi(t)]$  (полагаем время корреляции  $t_f$  процесса  $\phi(t)$  много большим периода колебания  $1/\omega_0$ ). Далее введем в колебание  $X(t)$

регулируемый сдвиг фазы  $\alpha$  и смешаем его с “гомодинным” колебанием  $\cos(\omega_a t)$ , имеющим стабильную фазу. Полученную суперпозицию

$$Z(t) = \cos[\omega_a t + \phi(t) + \alpha] + \cos(\omega_a t)$$

продетектируем. На выходе квадратичного детектора (после фильтрации высокочастотной компоненты с частотой  $2\omega_a$ ) получим низкочастотный сигнал  $|Z(t)|^2 \approx 2 + 2\cos[\phi(t) + \alpha]$ . Отсюда с помощью нелинейного усиления с ограничением нетрудно сформировать нужный сигнал  $a(\alpha, t)$  вида (2.19).

Далее промодулируем одним и тем же случайным процессом  $\phi(t)$  два колебания (возможно с разными средними частотами,  $\omega_a \neq \omega_b$ ) и пошлем их по проводам или по радио двум адресатам  $A, B$ , где из них с помощью гомодинных фазовых детекторов описанным выше способом образуются два телеграфных сигнала  $a(\alpha, t)$  и  $b(\beta, t)$  (здесь  $\alpha, \beta$  - фазы, добавляемые в приемных пунктах  $A$  и  $B$ ). При этом  $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$  независимо от  $\alpha$  и  $\beta$ , но наблюдатель  $C$ , располагающий реализациями обоих процессов, обнаружит описанную выше корреляцию (ср. (2.20)), зависящую от разности фаз:

$$M(\alpha - \beta) = \langle \alpha \beta \rangle = 1 - 2|\alpha - \beta|/\pi. \quad 2.21(6a)$$

Существенно, что значение этой корреляции зависит от обоих параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. каждый наблюдатель  $A$  и  $B$  может изменить ее величину и знак, причем он сам никаких изменений не обнаружит. При изменении, например,  $\alpha$  из исходного общего процесса  $\phi(t)$  формируется другой сигнал  $a(\alpha) \rightarrow a(\alpha + \Delta\alpha)$ , который при  $\Delta\alpha = \pi$  антикоррелирован с первоначальным сигналом.

Этот пример наглядно показывает, что можно влиять на корреляцию двух стохастических процессов в удаленных областях изменяя лишь один из них. Следовательно, и в контексте квантовых ЭПР-экспериментов нет никакой необходимости для объяснения зависимости корреляций от регулировочных ручек на рис.1 говорить о каком то таинственном “нелокальном влиянии” измерений в удаленных детекторах друг на друга.

Отметим возможность передачи в  $A$  и  $B$  случайного процесса  $\phi(t)$  непосредственно (по телефону), без использования “несущих” колебаний, с его последующей обработкой в приемных пунктах, а также варианты с управляемой корреляцией  $\langle a_1 a_2 \dots a_N \rangle$  между  $N$  приемниками.

Подчеркнем, что описанный здесь классический имитатор квантовых эффектов, использующий два двухконтурных параметрических генератора (см. Приложение 1), во многом аналогичен “настоящим” ЭПР-установкам. Известны три основных типа таких установок: на пучках ферми-частиц со спином  $1/2$ , оптические с использованием обычных или поляризационных интерферометров интенсивности.

В оптических ЭПР-экспериментах в последнее время также используют параметрические источники света, но в режиме усиления, когда излучаемый свет порождается собственным квантовым шумом параметрического усилителя, (эффект *параметрического рассеяния света*).

При этом операторы наблюдаемых величин  $A=A(0)$ ,  $A'=A(\pi/2)$  можно интерпретировать как операторы  $\text{Cos}(\phi)$  и  $\text{Sin}(\phi)$ , где  $\phi$  - разность фаз двух колебаний. В оптике для фазового детектирования используются светоделители. И в классической и в квантовооптической моделях общая информация, посылаемая в  $i$ -ой передаче к наблюдателям, закодирована в случайной фазе  $\phi_i$ , что позволяет наблюдателям образовывать двузначные телеграфные сигналы с регулируемой степенью корреляции.

Формальное описание поляризационных оптических и спиновых ЭПР-экспериментов также имеет много общего с рассмотренной моделью. В поляризационных экспериментах общей случайной фазой можно считать угол поляризации, при этом управление отбором информации производится поляризационной призмой. В экспериментах с ферми-частицами роль случайной фазы играет угол между спином и магнитным полем Штерна-Герлаха.

Принципиальное отличие квантовых экспериментов, приводящее к возможности нарушения неравенств Белла, сводится “лишь” к невозможности одновременно, в одном испытании, измерить  $A_i(\alpha)$  и  $A_i(\alpha')$  при  $\alpha \neq \alpha'$  - так как в каждом приемном пункте при каждом испытании в распоряжении имеется только один фотон или ферми-частица.

Таким образом, описанная действующая классическая модель наглядно показывает, что управляемый на расстоянии эффект корреляции типа ЭПР-Бома имеет близкий классический аналог, сам по себе этот эффект не свидетельствуют о каких либо таинственных сверхсветовых влияниях.

В то же время все минимально разумные классические модели должны удовлетворять неравенству Белла и его нарушение в квантовых моделях является истинным парадоксом. Возможны три основные “объяснения” факта нарушения неравенства Белла:

*можно отрицать или понятие совместных вероятностей или их положительность или локальность.*

Итак, имеются три альтернативы:

- (1) отказ от совместных вероятностей,
  - (2) совместные вероятности плюс возможность их отрицательных значений
  - (3) совместные вероятности плюс неизвестные сверхсветовые силы.
- (Скрытые параметры, обеспечивающие детерминизм, подразумевают согласно существование совместных вероятностей и являются поэтому частным случаем второго или третьего выбора.)

Действительно, нарушение неравенства Белла, имеющее место в квантовой теории, можно при желании объяснить и в рамках классической представлений о совместных вероятностях, но лишь ценой введения неизвестных далекодействующих сил между измерительными приборами или отказа от неотрицательности вероятности. Отсюда часто делается вывод (противоречащий, по-видимому, правилам формальной логики), что квантовая теория и квантовые явления *нелокальны*. Иногда также говорят,



что нарушение неравенств Белла свидетельствует о неприменимости *локального реализма*, т.е. реализм приравнивается к применимости понятия совместных вероятностей и априорных свойств.

Помимо общих соображений имеется конкретное возражение против нелокального объяснения парадокса Белла: ведь взаимодействие между удаленными приборами должно не просто снять ограничение  $\langle S \rangle \leq 1$ , но обеспечить точное квантовое значение  $\langle S \rangle = \sqrt{2}$ , причем независимо от деталей конструкции аппаратуры.

Принятие отрицательных вероятностей является чисто формальным приемом, не имеющим операционального смысла. Остается выбор между нелокальностью - возможностью влияния ручек в  $A$  на показания в  $B$  и т.д. - и отказом от априорного существования наблюдаемых - в соответствии с общепринятыми квантовыми постулатами.

Таким образом, из трех зол наименьшим представляется первое - отказ от понятия совместных вероятностей, от возможности приписывания квантовым объектам некоторых априорных свойств (соответствующих некоммутирующим операторам). Такое заключение непосредственно связано с принципом дополненности, т.е. оно уже входит в существующую парадигму квантовой физики, поэтому естественно считать нарушение неравенств Белла еще одним (возможно, наиболее непосредственным) свидетельством в пользу принципа дополненности, а не доказательством существования неизвестных взаимодействий или не имеющих физического смысла отрицательных вероятностей.

Отметим, что вывод о неприменимости понятия совместных вероятностей можно сделать и вне связи с неравенством  $|\langle S \rangle| \leq 1$ , а исходя из формальных выражений для средних значений от произведений некоммутирующих операторов, приводящих к отрицательным и неоднозначным “вероятностям”. Таким образом, квантовые ЭПР-модели обладают двумя существенными отличиями от классических: невыполнение в них неравенства  $|\langle S \rangle| \leq 1$  и отрицательность совместных “вероятностей” для некоммутирующих наблюдаемых, вычисляемая по классическим правилам. Первое отличие можно непосредственно обнаружить в эксперименте, а второе - нет. Отказ от понятия совместных вероятностей разрешает оба противоречия.

Конечно, при выборе первой альтернативы остается “вечная” общая проблема интерпретации квантового формализма. Она включает преодоление позитивистского характера его копенгагенской трактовки, запрещающей задавать природе “лишние” вопросы. В контексте ЭПР-экспериментов эта проблема, по-видимому, обостряется: приходится примириться с тем, что хотя до измерения некоторые свойства реальности существуют лишь потенциально, но корреляция между ними все равно имеется. И все же при учете описанного выше простого классического аналога парадокс ЭПР-Боба-Белла представляется не более и не менее

загадочным, чем, скажем, невозможность одновременного точного измерения координаты и импульса частицы.

Единственный экспериментально наблюдаемый статистический факт в случае квантовых моделей - косинусоидальная зависимость функции  $M(\gamma)$  с экстремальными значениями  $\pm 1$ , изображенная на рис.2.2b. Именно такая зависимость наблюдается в опытах по интерференции интенсивности света в случае использования источников “неклассического” (двухфотонного) света. При использовании классического источника света можно на той же самой установке получить такую же косинусоидальную зависимость, но с экстремальными значениями  $\pm 0,5$ , что дает в два раза меньшее значение  $\langle S \rangle$  ( $\langle S \rangle = 1/\sqrt{2}$ ), т.е. не нарушает неравенства Белла.

## ЗАДАЧА 2. . Управляемые классические корреляции типа Эйнштейна-Подольского-Розена

### Описание схемы ЭПР-имитатора

Схема ЭПР-имитатора, используемая в задаче показана на рис.2.4. В принципиальном плане она состоит из передатчика  $S$  и двух приемников  $A$  и  $B$  с регулируемыми фазовыми задержками (см. рис.2.1). Передатчик включает в себя:

- генератор накачки ГН
- двухконтурные параметрические генераторы ПГ1, ПГ2.

Приемники (идентичные) состоят из:

- входных усилителей-ограничителей Д1, Д2 и Д3, Д4,
- цифровых линий задержки Л1 и Л2,
- перемножителей логических сигналов М1 и М2,
- фильтров низких частот Ф1 и Ф2,

схем индикации СИ1 и СИ2 с индикаторными лампами (К-красной и З-зеленой)

Передатчик содержит два двухконтурных параметрических генератора ПГ1 и ПГ2 (см. Приложение 1), работающих в невырожденном режиме с общим генератором накачки. Каждый ПГ настроен на частоту  $\omega_0=3$  МГц. Частоты  $\omega_{a1,2}$  и  $\omega_{b1,2}$  комбинационных параметрических колебаний на выходах ПГ близки к некратным частотам порядка 1 и 2 МГц.

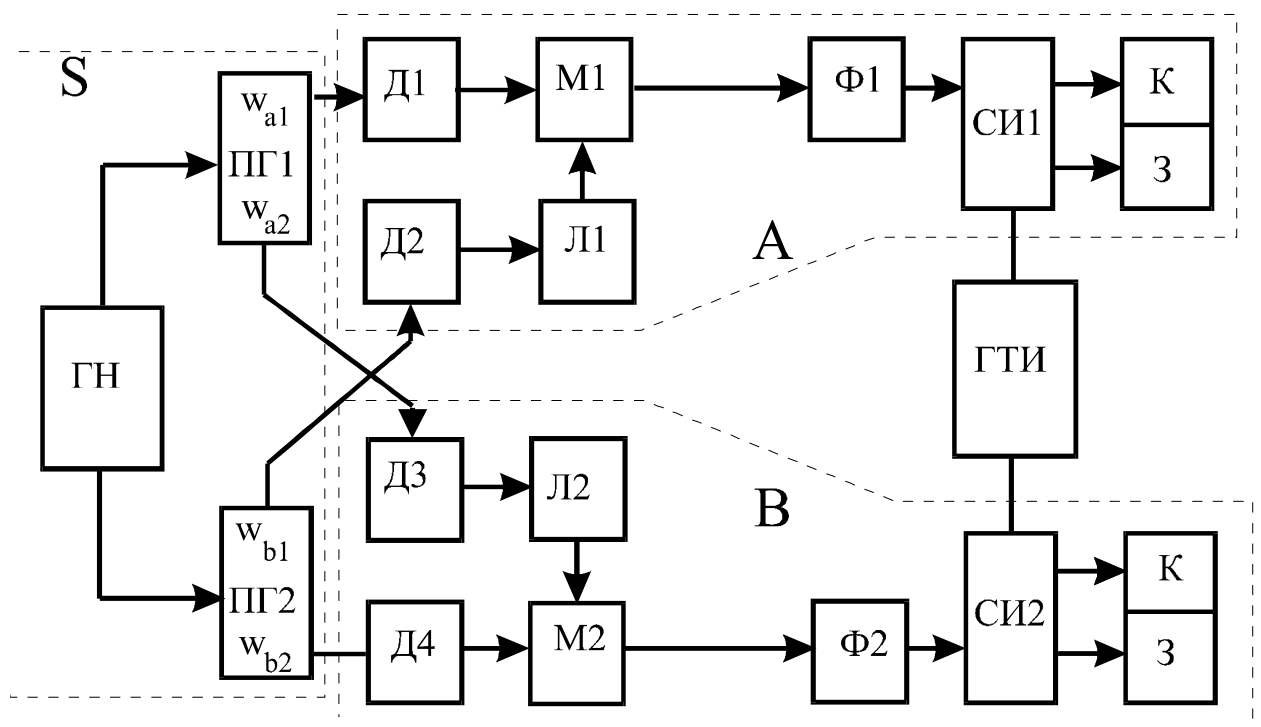


Рис.2.4 Функциональная схема имитатора

В устройстве используется непрерывное напряжение накачки без случайной модуляции во времени, поскольку для моделирования ЭПР-корреляций стохастичность сигналов определяется свободной флуктуацией фаз. Действительно, поскольку фиксирована только сумма фаз комбинационных колебаний (которая в каждом ПГ равна фазе накачки  $\varphi_{1,2} + \varphi'_{1,2} = \varphi_0 = 0$ ), то мгновенные значения разности фаз двух близких по частоте колебаний всегда одинаковы и противоположны по знаку:  $\varphi = -\varphi'$ .

Входные усилители-ограничители Д1-Д4 предназначены для преобразования входных гармонических сигналов в импульсы логических уровней со скважностью 2. При этом происходит устранение нежелательной амплитудной модуляции, а фазовая информация полностью сохраняется. После усилителей-ограничителей все четыре сигнала имеют одинаковые энергетические характеристики. Если логическому уровню "1" приписать значение +1, а логическому уровню "0" - значение -1, то преобразование для приемников А и В соответственно будет иметь следующий вид:

$$A: a(t) = \cos[\omega_a t + \varphi_{1,2}(t)] \rightarrow \text{sign}[a(t)] = \text{sign}\{\cos[\omega_a t + \varphi_{1,2}(t)]\}$$

$$B: b(t) = \cos[\omega_b t - \varphi_{1,2}(t)] \rightarrow \text{sign}[b(t)] = \text{sign}\{\cos[\omega_b t - \varphi_{1,2}(t)]\}$$

Использование сигналов логических уровней позволило применить простые и достаточно точные линии задержки Л1 и Л2 на цифровых логических элементах.

Цифровые линии задержки Л1 и Л2 включены на выходах компараторов сигналов в каждом приемнике и служат для внесения дополнительных фазовых сдвигов  $\alpha$  и  $\beta$ . В устройстве, используемом в задаче, элементарный фазовый сдвиг составляет **0.16 радиан**.

Перемножители логических сигналов М1 и М2 работают по схеме антисовпадений ( "Исключающее ИЛИ" ). На их выходах присутствуют сигналы суммарных и разностных частот. Например для приемника А:

$$\begin{aligned} & \text{sign}[\cos(\omega_a t + \varphi_1(t) + \alpha)] \bullet \text{sign}[\cos(\omega_a t + \varphi_2(t))] = \\ & \text{sign}[\cos(\omega_a t + \varphi_1(t) + \alpha)] \bullet \cos(\omega_a t + \varphi_2(t)) = \\ & \text{sign}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) + \cos(2\omega_a t + \varphi_1 + \varphi_2 + \alpha)] = \\ & \text{sign}[\cos(\varphi(t) + \alpha) + \cos(2\omega_a t + \varphi_1 + \varphi_2 + \alpha)] \end{aligned}$$

Аналогично, для сигнала в приемнике В:

$$\begin{aligned} & \text{sign}[\cos(\omega_b t - \varphi_1(t) + \beta)] \bullet \text{sign}[\cos(\omega_b t - \varphi_2(t))] = \\ & \text{sign}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) + \cos(2\omega_b t - \varphi_1 - \varphi_2 + \beta)] = \\ & \text{sign}[\cos(-\varphi(t) + \beta) + \cos(2\omega_b t - \varphi_1 - \varphi_2 + \beta)] \end{aligned}$$

Сигналы разностных частот выделяются при помощи низкочастотных фильтров  $\Phi 1$  и  $\Phi 2$  со временем усреднения  $\pi/\omega \ll \tau \ll 2\pi/(\varphi_1 - \varphi_2)$ . При таком усреднении на выходах фильтров получаются пилообразные сигналы вида

$$\langle \text{sign}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) + \cos(2\omega_a t)] \rangle = 1 - 2|\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha|/\pi$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha$  принимает значения от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

После усиления-ограничения на входных усилителях схемы индикации пилообразные сигналы (3) преобразуются в прямоугольные по уровню 0. Системы индикации (СИ) управляются общим генератором тактовых импульсов ГТИ (в задаче используется генератор Г5-54), частота следования которых задается при помощи ручки “ЧАСТОТА ПОВТОРЕНИЯ Hz”.

$$\text{sign}[1 - 2|\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha|/\pi] = \begin{cases} +1, & -\pi/2 < \varphi_1 - \varphi_2 + \alpha < +\pi/2 \\ 0, & \varphi_1 - \varphi_2 + \alpha = -\pi/2, +\pi/2 \\ -1, & +\pi/2 < \varphi_1 - \varphi_2 + \alpha < +3\pi/2 \end{cases}$$

Значению (+1) соответствует свечение зеленого индикатора, а значению (-1) - свечение красного индикатора. Таким образом, при регистрации мгновенной разности фаз сигналов в интервале  $-\pi/2 - +\pi/2$  загорается зеленый индикатор, а при регистрации мгновенной разности фаз сигналов в интервале  $+\pi/2 - +3\pi/2$  - красный.

Знак разности фаз (или косинуса разности фаз) определяется по фронту тактового импульса от внешнего генератора одновременно в обоих каналах, а затем индицируется данное состояние на протяжении тактового импульса в течение приблизительно 0.5 сек.

В задаче используется два режима работы ЭПР-имитатора:

режим визуальной индикации. При этом устанавливается низкая частота повторения тактовых импульсов - порядка одного герца;

режим индикации уровня корреляции при помощи частотомера. Дискретное изменение фазовой задержки  $\alpha$  (и  $\beta$ ) в каждом канале производится двумя многооборотными переключателями. Единичная фазовая задержка добавляется (вычитается) при повороте любого переключателя на один шаг, что составляет приблизительно 0.16 рад. Таким образом, для включения в канале А, например, задержки 0.32 рад. можно, используя переключатели канала А:

либо повернуть ручку большого диаметра на два шага по часовой стрелке (2 x 0.16 рад.= 0.32 рад),

либо повернуть ручку меньшего диаметра на два шага по часовой стрелке (2 x 0.16 рад.= 0.32 рад),

либо - на один шаг - ручку большого диаметра, а затем - меньшего (или наоборот).

### Упражнение 1

1.1 Установить частоту повторения ГТИ  $10^5$  Гц. При этом показания частотомера будут соответствовать уровню корреляции цвета светодиодов (красный или зеленый) в каналах А и В.

1.2 Внося фазовые задержки в канале А при неизменной задержке канала В измерить зависимость уровня корреляции от величины  $\alpha$ . Результаты представить в виде графика  $f = f(\alpha) = 1 - 2\gamma(\alpha)$ , где  $\gamma$  - показания частотомера ( $0.1 < \gamma < 0.9$ ). Определить положение переключателей, соответствующих

$\alpha = -\pi, -\pi/2, \pi/2, \pi$ . Измерения провести для полного периода функции  $f$ .

1.3 Для значений  $\alpha = 0$  и  $\alpha' = \pi/2$  найти задержки  $\beta$  и  $\beta'$  в канале В такие, для которых

$$\gamma_1 = \alpha + \beta = -\pi/4, \quad \gamma_2 = \alpha' + \beta = \pi/4, \quad \gamma_3 = \alpha + \beta' = \pi/4, \quad \gamma_4 = \alpha' + \beta' = 3\pi/4$$

### Упражнение 2

2.1 Установить минимальную частоту повторения ГТИ ( $\approx 0.5$  Гц).

2.2 Визуально исследовать корреляцию, антикорреляцию и отсутствие корреляции показаний индикаторов каналов А и В для определенных в упражнении 1 задержек

$$\gamma = -\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi.$$

### Упражнение 3

В таблицу протокола испытаний (выдается преподавателем) занести показания 50-ти измерений для каждой из четырех комбинаций фазовых задержек  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ . При этом в каждом измерении необходимо записать цвет загорающегося светодиода для обоих каналов. Например,

Протокол  $\gamma_1 = \alpha + \beta = -\pi/4$ , Канал А Канал В

номер испытания k	Красный	Зеленый	Красный	Зеленый
1	+		+	
2		+		+
.....	.....	.....	.....	.....
50	+			+

В результате обработки протоколов испытаний (4 шт.) необходимо убедиться<sup>2</sup>, что:

вероятность загорания красного или зеленого светодиода в каждом канале одинакова и не зависит от выбора задержек  $\gamma$ ;

---

<sup>2</sup>Если упражнение 2 выполняет один студент, рекомендуется установить ручной режим запуска ГТИ. ВСЕ УСТАНОВКИ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ГТИ ОСУЩЕСТВЛЯЮТСЯ ТОЛЬКО В ПРИСУТСТВИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ.

выполняется неравенство Белла  $|\langle S \rangle_{class}| \leq 1$ , где величина  $|\langle S \rangle_{class}|$  была введена выше.

### Литература

1. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* Phys.Rev. 1935, **47**, 777; УФН. 1936, **16**, **440**.
2. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Bell J.S.* Physics. 1964, **1**, 195.
4. Н.В.Евдокимов, Д.Н.Клышко, В.П.Комолов, В.А.Ярочкин, УФН 1996, т.166, N1.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Параметрические генераторы и управляемые корреляции

В нашей модельном эксперименте для получения классического радиочастотного аналога ЭПР-корреляции используются двухконтурные параметрические генераторы колебаний мегагерцового диапазона.

Такие генераторы в невырожденном (двухчастотном) случае имеют две особенности: фазы  $\phi(t)$  и  $\phi'(t)$  каждого из двух возникающих колебаний со средними частотами  $\omega_a$  и  $\omega_b$  сильно флуктуируют (по техническим причинам), но при этом имеет место их полная антикорреляция:  $\phi(t) + \phi'(t) = \phi_0$ . Здесь  $\phi_0 = const$  - фаза генератора накачки (со средней частотой  $\omega_0 = \omega_a + \omega_b$ ), которую для простоты полагаем стабильной и равной нулю, так что  $\phi'(t) = -\phi(t)$ . Иначе говоря, мгновенные частоты  $\omega_a(t) = \omega_a + d\phi/dt$  и  $\omega_b(t) = \omega_b + d\phi'/dt$  двух колебаний на выходе генератора всегда дрейфуют в противоположные стороны - если сигнальная частота возрастает, то холостая уменьшается, и наоборот.

В результате выходные колебания генератора имеют вид  $X(t) = \cos[\omega_a t + \phi(t)]$  и  $Y(t) = \cos[\omega_b t + \phi'(t)] = \cos[\omega_b t - \phi(t)]$ . Таким образом, один и тот же случайный процесс  $\phi(t)$  модулирует по фазе оба выходных колебания генератора. Далее они посылаются (для простоты по проводам) к двум приемным схемам  $A$  и  $B$ . Различие знаков  $\phi$  и  $\phi'$  приводит к тому, что корреляция зависит от суммы параметров  $\gamma = \alpha + \beta$ , а не от их разности, как в (10а).

В реализованной нами схеме вместо стабильных локальных гомодинных колебаний с частотами  $\omega_a$  и  $\omega_b$  используются сигналы от второго идентичного параметрического генератора, возбуждаемого той же накачкой. При этом на приемник  $A$  поступают два колебания  $X_1(t) = \cos[\omega_a t + \phi_1(t)]$  и  $X_2(t) = \cos[\omega_a t + \phi_2(t)]$ , где  $\phi_1(t)$  и  $\phi_2(t)$  - независимые случайные фазы двух параметрических генераторов. К одному из колебаний добавляется регулируемая фаза  $\alpha$ , после чего образуется их сумма и разность:  $X_{\pm} \equiv X_1 \pm X_2$ . Два квадратичных детектора дают низкочастотные сигналы, пропорциональные  $|X_{\pm}|^2 \approx 2 \pm 2 \cos[\phi(t) + \alpha]$ , где  $\phi(t) \equiv \phi_1(t) - \phi_2(t)$ . Вычитая эти сигналы получаем после ограничения функцию нужного вида:

$$a(\alpha, t) = \text{sign}\{\cos[\phi(t) + \alpha]\}. \quad (\text{П1а})$$

Аналогично, на приемнике  $B$  формируется второй случайный телеграфный сигнал:

$$b(\beta, t) = \text{sign}\{\cos[-\phi(t) + \beta]\}. \quad (\text{П1б})$$

Здесь использовано свойство параметрических генераторов  $\phi_k + \phi'_k = \phi_0$  ( $\phi_0$  - фаза накачки), дающее  $\phi + \phi' = \phi_1 - \phi_2 + \phi'_1 - \phi'_2 = 0$ .

Фактическая обработка сигналов производилась цифровым методом. Описание этой процедуры и некоторые технические подробности даны во второй части.



В нашей модели “скрытыми параметрами”  $\lambda$  является все множество переменных, описывающих мгновенное состояние всей схемы, включая источники питания. Эволюция этих переменных проявляется через флуктуации фаз параметрических генераторов  $\phi_k(\lambda(t))$  с характерным временем  $t_f$  которая, в свою очередь, приводит в соответствии с (П1) к флуктуациям знаков сигналов  $a_i$  и  $b_i$ , наблюдаемых в некоторые моменты времени  $t_i$ , разделенные интервалом, много большим  $t_f$ .

Характерное время  $t_f$  “естественной” смены знаков сигналов  $a$ ,  $b$ , связанное с временем когерентности фазы параметрических генераторов, имеет порядок 1 мсек, причем моменты смены знака в  $a$  и  $b$  не всегда совпадают (см. рис. 3). В связи с этим для визуального наблюдения корреляции по цветам ламп использовался тактовый генератор с регулируемой низкой частотой (включая режим ручного запуска одиночными импульсами), который задавал периодичность опроса состояния выходных каскадов детекторных схем и соответствующего переключения ламп. При автоматическом измерении корреляции  $M$  использовалась более высокая частота опроса.

Отметим, что для еще большего сходства с квантовыми экспериментами лучше было бы применить посылку колебаний со случайной фазой по радио в случайные моменты времени в виде коротких импульсов с длительностью, меньшей времени когерентности фазы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

### Доказательство инвариантности синглетного состояния Белла к смене базиса.

Докажем это утверждение для поляризационного состояния Белла

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |B_x\rangle |C_y\rangle - |B_y\rangle |C_x\rangle ], \quad (\text{П2.1})$$

где  $B$  и  $C$  обозначают частицы, а  $x$   $y$  - компоненты линейного поляризационного базиса. Запись  $|B_x\rangle |C_y\rangle$  означает двукратное действие оператора рождения на вакуум (в разных поляризационных модах):

$$|B_x\rangle |C_y\rangle = b_x^\dagger c_y^\dagger |0\rangle. \quad (\text{П2.2})$$

**Замечание.** Формальная аналогия между состояниями частиц со спином  $1/2$  и поляризационными состояниями света основывается на тождественности коммутационных соотношений операторов проекций момента количества движения  $j_k$  частицы со спином  $J = (1/2)S_0$  (операторы Паули) и Стокса, подчиняющимися алгебре Ли (или  $SU(2)$ ):

Для операторов Паули:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y.$$

Для операторов Стокса:

$$s_0 \equiv a^\dagger a + b^\dagger b, \quad (I)$$

$$s_1 \equiv a^\dagger a - b^\dagger b, \quad (HV)$$

$$s_2 \equiv a^\dagger b + ab^\dagger, \quad (+45^0, -45^0)$$

$$s_3 \equiv -i(a^\dagger b - ab^\dagger) \quad (RL).$$

$$[s_1, s_2] = is_3, \quad [s_2, s_3] = is_1, \quad [s_3, s_1] = is_2, \quad [s_0, s_m] = 0. \quad (\text{конец})$$

Пусть при произвольном преобразовании поляризационного базиса

$B_{x,y} \rightarrow B_{1,2}$ ,  $C_{x,y} \rightarrow C_{1,2}$  его компоненты определяются элементами эрмитовой матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix}, \quad |t|^2 + |r|^2 = 1, \quad (\text{П2.3})$$

т.е. в матричном виде:

$$D \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \quad D^\dagger \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.4})$$

Тогда компоненты базисов преобразуются по правилам:

$$|B_x\rangle = t|B_1\rangle + r|B_2\rangle, \quad |C_x\rangle = t|C_1\rangle + r|C_2\rangle, \quad (\text{П2.5})$$

$$|B_y\rangle = -r^*|B_1\rangle + t^*|B_2\rangle, \quad |C_y\rangle = -r^*|C_1\rangle + t^*|C_2\rangle.$$

Подставив эти выражения в (П2.1), получим:

$$\begin{aligned}
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [ |B_x\rangle |C_y\rangle - |B_y\rangle |C_x\rangle ] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [ (t|B_1\rangle + r|B_2\rangle)(-r^*|C_1\rangle + t^*|C_2\rangle) - (-r^*|B_1\rangle + t^*|B_2\rangle)(t|C_1\rangle + r|C_2\rangle) ] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [ -tr^*|B_1\rangle|C_1\rangle + |t|^2|B_1\rangle|C_2\rangle - |r|^2|B_2\rangle|C_1\rangle + rt^*|B_2\rangle|C_2\rangle ] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} [ r^*t|B_1\rangle|C_1\rangle + |r|^2|B_1\rangle|C_2\rangle - |t|^2|B_2\rangle|C_1\rangle - rt^*|B_2\rangle|C_2\rangle ] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [ |B_1\rangle|C_2\rangle - |B_2\rangle|C_1\rangle ].
\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### Доказательство неравенства Белла

В эксперименте, изображенном на рис.2.1, усреднение производится многократным повторением испытаний на одной установке при неизменных макроскопических условиях. Естественно предположить, что тот же результат получится при использовании большого числа идентичных экспериментальных установок (типа изображенной на рис.2.1) и проведении однократного испытания с каждой из них (постулат эргодичности).

Соответственно, при теоретическом описании можно усреднение по времени заменить усреднением по ансамблю с помощью некоторого распределения вероятности  $P_{ABA'B'}(a, b, a', b') \equiv P(a, b, a', b')$  для всех четырех наблюдаемых случайных величин  $A=A(\alpha)$ ,  $A'=A(\alpha')$ ,  $B=B(\beta)$ ,  $B'=B(\beta')$ . Здесь  $P(a, b, a', b') \geq 0$ ,  $\sum P(a, b, a', b') = 1$ , переменные  $a, a', b, b'$  принимают значения  $\pm 1$ ,  $a$  и  $b$  - произвольные параметры, влияющие на статистику  $A$  и  $B$ . Функция  $P(a, b, a', b')$  определена на множестве из  $2^4=16$  возможных исходов одного "полного" испытания, она задает элементарные или первичные вероятности нашей вероятностной модели. Например,  $P(1,1,1,-1)$  - вероятность наблюдения события  $\{a=+1, b=+1, a'=+1, b'=-1\}$ .

Хотя согласно рис.1 при каждом испытании измеряются не четыре, а только две величины (например,  $A$  и  $B$  или  $A'$  и  $B$ ), ничто, казалось бы, не препятствует использованию в каждом приемнике двух параллельных устройств, управляемых одним общим сигналом от передатчика информации и регистрирующих одновременно две наблюдаемые, например,  $A$  и  $A'$ . При этом отпала бы необходимость в переключающих ручках на рис.1 и в каждом приемнике имелось бы четыре индикаторные лампочки. (Более того, можно, очевидно, измерять  $A$  и при более чем двух значениях аргумента  $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ ) Поскольку параметры  $a$  и  $b$  изменяются произвольно в точках приема сигналов, то естественно считать элементарные вероятности всевозможных исходов  $P(a, b, a', b')$  априорно заданными свойствами источника сигналов - независимо от того, какие величины измеряются, а какие нет.

С помощью элементарных вероятностей по правилу сложения вероятностей несовместных событий можно найти вероятности всех других событий. Например, вероятность загорания двух зеленых ламп в изображенном на рис.2.1 эксперименте, т.е. вероятность события  $\{a=+1, b=+1\}$ , определяется следующей суммой четырех элементарных вероятностей:

$$P_{AB}(+,+) = \sum_{a', b'=\pm 1} P_{ABA'B'}(+,+, a', b').$$

Различные средние значения (моменты распределения) также определяются через элементарные вероятности, например,

$$M \equiv \langle AB \rangle = \sum_{a,b,a',b'} ab P_{ABA'B'}(a,b,a',b') = \sum_{a,b} ab P_{AB}(a,b)$$

Определим среднее значение  $S$  непосредственно через элементарные вероятности:

$$\langle S \rangle_c = \sum_{a,b,a',b'=\pm 1} P(a,b,a',b') \sigma(a,b,a',b') \quad (\text{ПЗ.1})$$

Здесь  $\sigma(a,b,a',b') = (ab + a'b + ab' - a'b')/2$  - в соответствии с постулатом эргодичности и экспериментальной процедурой. Эта функция содержит только 4 различных множителя и поэтому она принимает лишь два значения  $\pm 1$  - в отличие от 8 множителей и 5 значений  $(0, \pm 1, \pm 2)$  в случае экспериментальной величины  $s$ . Действительно, сгруппируем слагаемые следующим образом:  $\sigma = [a(b+b') + a'(b-b')]/2$ ; если, например,  $b=b'$ , то  $\sigma = ab = \pm 1$ ; если же  $b=-b'$ , то  $\sigma = a'b = \pm 1$ .

Модуль суммы не больше суммы модулей, поэтому из условий  $\sigma = \pm 1$ ,  $P \geq 0$ ,  $\sum P = 1$  сразу получаем неравенство Белла (16):

$$|\langle S \rangle_c| \leq \sum |\sigma P| = \sum |\sigma| P = \sum P = 1 \quad (\text{ПЗ.2})$$

Почему же этот элементарный вывод теряет силу при квантовом описании? Введя элементарные вероятности  $P(a, b, a', b')$  мы неявно сделали естественное предположение: допустили априорное существование и возможность измерения в одном испытании всех четырех наблюдаемых  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ . Это предположение не всегда оправдано в квантовых вероятностных моделях, где информация, переносимая, например, однофотонным состоянием светового поля, не может разветвляться ("клонироваться") и управлять двумя регистрирующими устройствами. Наглядно - один фотон не может поглотиться в двух детекторах. В экспериментах с ферми-частицами  $A$  и  $A'$  описывают проекции спина на различные направления, которые измеряются при различных ориентациях магнитов. В результате  $A$  и  $A'$  и, аналогично,  $B$  и  $B'$  нельзя измерить в одном испытании. Эта парадоксальная особенность квантовых моделей связана с принципом дополненности.

Формально невозможность одновременного измерения каких либо наблюдаемых величин связана в квантовой теории с некоммутативностью соответствующих операторов, в данном случае  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ . Поскольку эти операторы не коммутируют, то им нельзя априори приписывать какие-либо значения, включая собственные значения  $\pm 1$ , и в результате равенство  $\sigma = \pm 1$  не имеет смысла в квантовой теории. Не имеют смысла и элементарные вероятности  $P(a, b, a', b')$ . Можно показать, что формально определенные квантовые моменты  $\langle AA' \rangle$ ,  $\langle AA'B \rangle$ , ... приводят к отрицательным и неоднозначно определенным элементарными вероятностями.

Как можно все же избавиться от ограничения  $|\langle S \rangle| \leq 1$  оставаясь в рамках классических представлений об априорных вероятностях, т.е. используя формулу (ПЗ.1)? Согласно (ПЗ.1) имеются две очевидные (и одинаково неприемлемые) формальные возможности: или отказаться от условия неотрицательности вероятностей  $P \geq 0$  или избавиться от равенства  $\sigma = \pm 1$ . Это равенство нарушается, если предположить существование каких-то взаимодействий между приборами. В соответствии с распространенной интерпретацией ЭПР-корреляций предположим, что параметр  $\alpha$  аппаратуры в  $A$  влияет каким то неизвестным “нелокальным” образом на показания аппаратуры в  $B$ , а  $\beta$  влияет на показания аппаратуры в  $A$ . При этом надо в определении величины  $\sigma$  заменить  $a(\alpha)$  на  $a(\alpha, \beta)$  и  $b(\beta)$  на  $b(\alpha, \beta)$ , так что  $\sigma$  будет зависеть уже не от четырех, а от восьми множителей:

$$\sigma = [a(\alpha, \beta) b(\alpha, \beta) + a(\alpha', \beta) b(\alpha', \beta) + a(\alpha, \beta') b(\alpha, \beta') - a(\alpha', \beta') b(\alpha', \beta')] / 2$$

(ПЗ.4)

В результате  $\sigma$  может как и  $s$  принимать значения  $0, \pm 1, \pm 2$ . Однако, теперь уже нет смысла определять  $S$  через элементарные вероятности, ясно, что все 4 слагаемых в (ПЗ.4) могут быть статистически независимы и универсальное, не зависящее от модели ограничение  $|\langle S \rangle| \leq 1$  уже не возникает. При этом и 4 серии испытаний, связанных с измерением  $s$ , независимы и при отсутствии дополнительных условий величина  $|\langle S \rangle|$  оказывается ограниченной лишь максимальным значением ее спектра  $|s|_{\max} = 2$ .