

Вопросы и задачи к курсу «Теория нелинейных волн»

W01

- ◆ P01A На границу полупространства, заполненного прозрачной средой с известным законом дисперсии $\omega(k)$, нормально падает плоская монохроматическая волна. До попадания в среду она имеет резко обрывающийся передний фронт. Определить структуру волны в среде.
- ◆ P01B Найти решение уравнения $\psi_t = \psi_{xx} + \psi\psi_x$ при помощи преобразования годографа.

W02

- ◆ P02A Определить, во что превратится разрыв в уравнении простых волн $\psi_t = \psi^2\psi_x$ при добавлении в него диффузионного члена: $\psi_t = \psi^2\psi_x + D\psi_{xx}$ (с граничным условием $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0$).
- ◆ P02B Определить вид решения ур-ия Бюргерса в виде ударной волны при переходе к ур-ию диффузии при помощи подстановки Хопфа-Коула.

W03

- ◆ P03A Найти решение в виде бегущей волны нелинейного уравнения $\psi_x - \psi_t + i\psi|\psi|^2 = 0$.
- ◆ P03B Найти солитонное решение нелинейного волнового уравнения $u_{xt} + (u^3)_{xx} + u = 0$.

W04

- ◆ P04A Найти солитонное решение уравнения $\theta_{xt} = -\sqrt{1 - \theta_x^2} \sin \theta$.
- ◆ P04B Найти солитонное решение уравнения Гарри-Дима $\psi_t = 2(\psi^{-1/2})_{xxx}$.

W05

- ◆ P05A Определить матрицу рассеяния $S(k)$ на потенциале $\psi(x, t)$, являющимся односолитонным решением уравнения КдФ. Указание: рассмотреть выражения $\hat{A}^+ \hat{A}^- \psi$ и $\hat{A}^- \hat{A}^+ \psi$, где $\hat{A}^\pm = \text{th } x \pm \frac{d}{dx}$.
- ◆ P05B Найти нелинейное уравнение для функции ψ , заданное парой Лакса

$$\hat{M} = \frac{a}{k^2} \begin{pmatrix} 0 & e^\psi \\ e^{-\psi} & 0 \end{pmatrix}, \hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x + \psi_x/2 \\ \partial_x - \psi_x/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ◆ **P05C** Найти скорость автоволны переброса в уравнении $\psi_t = \psi_{xx} + \psi(1 - \psi)$, $\psi(-\infty) = 0$; $\psi(\infty) = 1$.

W06

- ◆ **P06A** В цепочке одинаковых шариков к одному из них приложена внешняя сила $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ с частотой $\omega > 2\sqrt{U''}$. Найти характерную длину затухания этих колебаний.
- ◆ **P06B** Рассмотреть задачу Ферми-Пасты-Улама с потенциалом взаимодействия $U(x) = \frac{w}{2}x^2 + \frac{v}{4}x^4$. Уменьшить порядок полученного нелинейного уравнения в частных производных, воспользовавшись приближением волн, бегущих только в одном направлении.

W07

- ◆ **P07A** Найти закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн при наличии дна на глубине h .
- ◆ **P07B** Построить график первых четырех членов разложения Бесселя-Фубини в диапазоне $0 < kt < 2$. Процесс построения графика прокомментировать.

W08

- ◆ **P08A** Определить закон преломления и коэффициент отражения звука, проходящего через границу раздела двух сред. Найти условия полного внутреннего отражения для звука.
- ◆ **P08B** Для одномерного течения газа определить, при какой скорости течения поток массы $j = \rho V$ максимален.

W09

- ◆ **P09A** Найти закон дисперсии поверхностной электромагнитной волны, взаимодействующей с фононом в среде и локализованной вблизи ее плоской границы. Нарисовать график.
- ◆ **P09B** Используя условие Леонтовича, найти коэффициент отражения электромагнитных волн от металла.

W10

- ◆ **P10A** Волной какого типа - электрического или магнитного - является волна с минимальной критической частотой, распространяющаяся в волноводе прямоугольного сечения?
- ◆ **P10B** Обыкновенная волна в одноосном кристалле взаимодействует с фононом на частоте ω_0 , а необыкновенная волна, распространяющаяся перпендикулярно оптической оси кристалла – с

другим фононом на частоте ω_e . Найти закон дисперсии необыкновенной волны, распространяющейся под углом α к оптической оси, определить границы запрещенной зоны, нарисовать график дисперсионной зависимости.

W11

- ◆ P11A Исследовать устойчивость решения (10) системы (7), описывающего генерацию второй гармоники в случае точного синхронизма $\Delta = 0$.
- ◆ P11B Решить систему уравнений для трехволнового смешения, описывающих процесс перекачки интенсивности накачки одновременно в две моды рассеянного света

$$\begin{cases} da_p/dx = iGa_2 + iG^* a_1 \\ da_1/dx = iGa_p; da_2/dx = iG^* a_p \end{cases}$$

где $G = Fa_p a_2^* + F^* a_p^* a_1$, с дополнительным условием равенства интенсивностей мод рассеянного света $I_1 = I_2$.

W12

- ◆ P12A Плоская световая волна распространяется через нелинейную среду и взаимодействует с волной, идущей навстречу (отраженной от дальней границы среды). Нелинейный отклик среды приводит к тому, что изменение ее показателя преломления пропорционально градиенту интенсивности света. Записать уравнения для волн, распространяющихся вперед и назад, и найти зависимость их интенсивностей от координаты.

