

W12 ЗАКОН ДИСПЕРСИИ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНОВ

§ 01 Плазменные колебания и плазмон-поляритоны

◆ Рассмотрим колебания в плазме, состоящей из невзаимодействующих электронов со средней концентрацией n . В присутствии электрического поля электрон испытывает ускорение $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$. Учитывая уравнения Максвелла и то, что плотность тока $\mathbf{j} = ne\dot{\mathbf{r}}$, получаем:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= ne^2 \mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Применяя операцию дивергенции к первому уравнению, получаем $\ddot{\rho} + \omega_p^2 \rho = 0$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$ - собственная частота продольных плазменных колебаний (или ленгмюровских волн). Квазичастицы, возникающие при квантовании этих колебаний, принято называть плазмонами.

Рассмотренная модель применима для описания колебаний электронной плотности в холодной плазме (когда тепловым движением можно пренебречь), в том числе свободных электронов в металлах. При характерной для металлов концентрации свободных электронов $n \sim 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ плазменная частота $\omega_p \approx 1.3 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ ($\sim 10 \text{ эВ}$) лежит в ультрафиолетовом диапазоне.

◆ Уравнение движения электронов в поле электромагнитной волны можно записать в виде $m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}(t)$, где ν - обратное время релаксации импульса электронов (например, частота соударений электронов с массивными ионами). Поляризация среды на частоте ω при этом имеет вид

$$\mathbf{P}(\omega) = n\mathbf{d} = ne\mathbf{r} = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + i\nu\omega)} \mathbf{E}(\omega), \quad (2)$$

откуда диэлектрическая проницаемость электронного газа

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega(\omega + i\nu)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} + i \frac{\nu}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (3)$$

На низких частотах $\omega \ll \nu$ преобладает мнимая часть диэлектрической проницаемости. Связь плотности тока с электрическим полем в металлах принято записывать с помощью проводимости: $\mathbf{j} = \sigma(\omega)\mathbf{E}$. Учитывая материальное уравнение $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и связь между поляризацией и током внутренних зарядов $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$, несложно получить, что $\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}$. Отсюда статическая про-

водимость металлов $\sigma(0) = ne^2/\nu m$. В более общем случае это дает модель Друде

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega/\nu}. \quad (4)$$

В области частот $\nu \ll \omega < \omega_p$ мнимая часть диэлектрической проницаемости (3) становится малой, но ее действительная часть отрицательна. И только на частотах выше плазменной в электронном газе возможно распространение плазмон-поляритонов с законом дисперсии

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (5)$$

◆ Отрицательное значение диэлектрической проницаемости металлов на частотах ниже плазменной частоты позволяет объяснить гигантскую величину «фактора локального поля» на определенных частотах. Рассмотрим металлическую сферическую частицу с радиусом $R \ll \lambda$. В этом случае внешнее поле электромагнитной волны \mathbf{E} вокруг частицы можно считать однородным. Решение электростатической задачи о напряженности поля $\mathbf{E}^{(i)}$ внутри сферической частицы с диэлектрической проницаемостью ε дает выражение

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3}{2 + \varepsilon} \mathbf{E}. \quad (6)$$

Несложно видеть, что в металлической частице на частоте, определяемой условием $\varepsilon'(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2 = -2$, будет наблюдаться резонанс. Напряженность поля на этой частоте вблизи частицы на расстояниях, сравнимых с ее размерами, будет возрастать во много раз. Это один из факторов, приводящих к резкому возрастанию локальных полей вблизи сферических частиц или любых иных металлических поверхностей с малым радиусом кривизны и, как следствие, к усилению нелинейнооптических эффектов.

§ 02 Поверхностные плазмон-поляритоны

◆ Диапазон частот от нуля до плазменной частоты является запрещенной зоной для плазмон-поляритонов. В этой области возможно существование поверхностных волн, затухающих при удалении от поверхности раздела сред.

◆ Будем искать решение уравнений Максвелла для волн, распространяющихся в плоскости раздела двух сред $z = 0$ вдоль оси X и затухающих при удалении от нее:

$$\mathbf{E}; \mathbf{H} \sim \exp(ikx - \kappa_i |z| - i\omega t), \quad (7)$$

где $\kappa_1; \kappa_2$ - инкременты затухания волны. Компоненты уравнений Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}/c$ и $\text{rot } \mathbf{H} = i\varepsilon(\omega)\omega \mathbf{E}/c$ в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} \pm \kappa_i E_y = i \frac{\omega}{c} H_x; \pm \kappa_i H_y = -i \varepsilon_i(\omega) \frac{\omega}{c} E_x \\ \mp \kappa_i E_x - ik E_z = i \frac{\omega}{c} H_y; \mp \kappa_i H_x - ik H_z = -i \varepsilon_i(\omega) \frac{\omega}{c} E_y, \\ ik E_y = i \frac{\omega}{c} H_z; ik H_y = -i \varepsilon_i(\omega) \frac{\omega}{c} E_z \end{cases} \quad (8)$$

где верхний знак перед κ_i соответствует полуплоскости $z > 0$, а нижний - $z < 0$. Как и при описании волноводов, решения можно разделить на поперечные электрические (ТЕ) и магнитные (ТМ) моды. Однако, учитывая непрерывность тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на границе раздела, сразу получаем, что для ТЕ мод $E_y = H_x = H_z \equiv 0$. В то же время для ТМ мод получаем:

$$\pm \kappa_i H_y = -i \varepsilon_i(\omega) \frac{\omega}{c} E_x \quad (9)$$

и волновое уравнение

$$k^2 - \kappa_i^2 = \varepsilon_i(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (10)$$

Из уравнения (9) и непрерывности тангенциальных компонент следует $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = -\frac{\varepsilon(\omega_1)}{\varepsilon(\omega_2)}$, то есть диэлектрические проницаемости должны иметь разные знаки. С учетом (10) получаем закон дисперсии поверхностных волн:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\omega) \varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)}}. \quad (11)$$

Полученный закон дисперсии описывает поверхностные плазмон-поляритоны на частотах ниже плазменной, а также поверхностные фонон-поляритоны в запрещенной зоне $\omega_0 < \omega < \omega_l$ (см. формулу 9.8).

◆ В случае границы между вакуумом $\varepsilon_1 \equiv 1$ и металлом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ получаем:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}. \quad (12)$$

Этот закон дисперсии вместе с законом дисперсии объемных плазмон-поляритонов (5) показан на рис. W12.A. В длинноволновой области $k \ll k_p = \omega_p / c$ поверхностные плазмон-поляритоны по сути являются поверхностными электромагнитными волнами, однако в коротковолновой области большая часть энергии поверхностной волны сосредоточена в колебаниях электронной плотности.

◆ На рис. W12.B показана глубина области локализации поверхностного плазмон-поляритона по обе стороны от границы раздела сред. Она определяется

обратными инкрементами затухания κ_i , которые можно получить из уравнения (10). В металле глубина проникновения поля никогда не превышает длины волны на плазменной частоте, однако в вакууме на больших длинах волн она стремится к бесконечности. А вот в коротковолновом случае $k \gg k_p$ глубина области локализации поверхностного плазмон-поляритона мала по обе стороны от границы раздела, то есть энергия волны может быть сосредоточена в очень тонком приповерхностном слое.

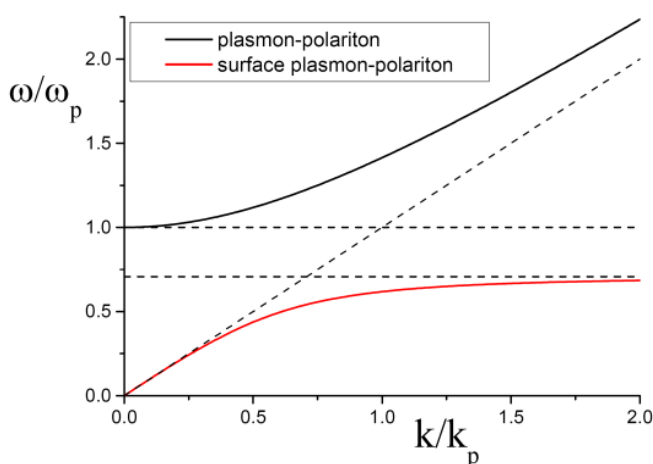


Рис.W12.A.
Закон дисперсии объемных (5) и поверхностных (12) плазмон-поляритонов.

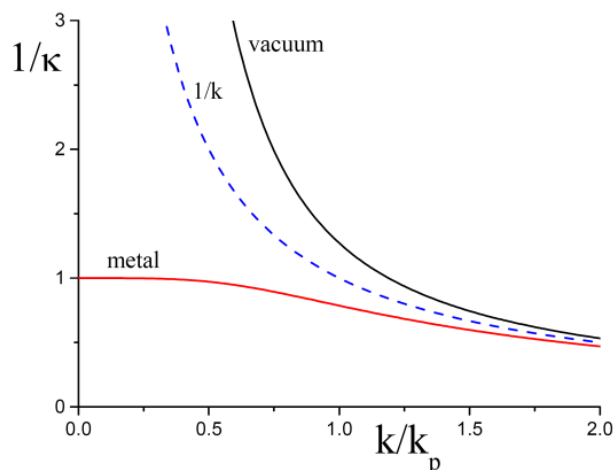


Рис.W12.B.
Глубина области локализации поверхностного плазмон-поляритона по обе стороны от границы раздела.

§ 03 Ложные (spoof) плазмон-поляритоны

◆ Если частота электромагнитной волны существенно меньше плазменной частоты, то, как было показано выше, поверхностный плазмон-поляритон оказывается почти делокализованным. На таких частотах можно считать, что электромагнитные волны полностью отражаются от поверхности металла, а в металл проникает пренебрежимо малая доля их энергии. Однако, оказывается, что если поверхность имеет неоднородности, характерный масштаб которых много меньше длины волны, то вблизи нее возможно возникновение поверхностных волн с характерными частотами, существенно меньшими плазменной. Такие поверхностные волны в литературе иногда называют ложными (spoof) плазмон-поляритонами, так как они существуют, даже если не учитывать движение электронов и считать, что диэлектрическая проницаемость металла бесконечно велика.

◆ В качестве упрощенной модели неоднородностей на поверхности металла обычно рассматривают одномерную периодическую систему прямоугольных желобков или двумерный периодический массив прямоугольных отверстий, период d и ширина a которых много меньше длины волны. Рассмотрим задачу об отражении электромагнитной волны, падающей на одномерную систему прямоугольных желобков (рис.W12.C).

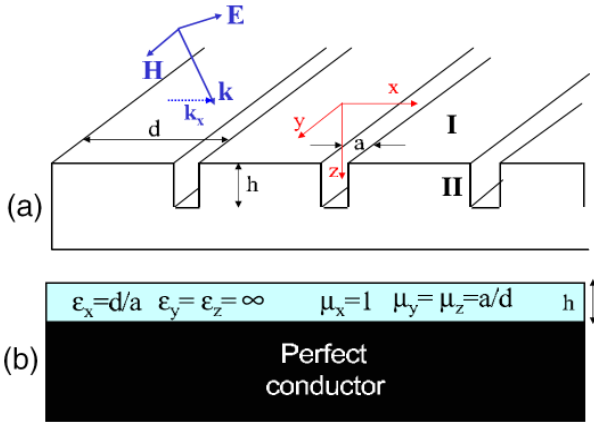


Рис.W12.C. Неоднородность в форме системы прямоугольных желобков (а) и схема эффективной однородной среды (b).

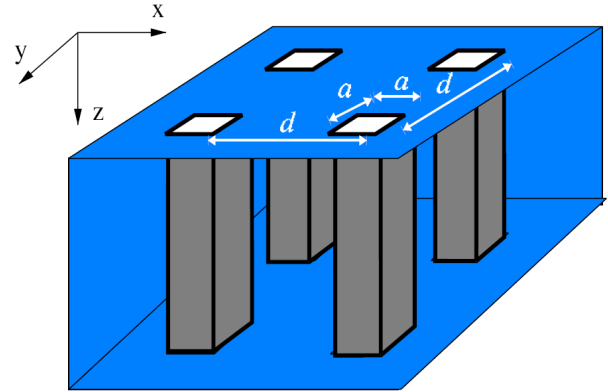


Рис.W12.D. Неоднородность в форме двумерного массива прямоугольных отверстий.

✧ F.J.Garcia-Vidal, L.Martin-Moreno, J.B.Pendry "Surfaces with holes in them: new plasmonic metamaterials", J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 7, S97 (2005).

◆ Запишем падающее поле в виде

$$\mathbf{E}_0 = e^{ik_x x + ik_z z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -k_x/k_z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_0 = e^{ik_x x + ik_z z} \begin{pmatrix} 0 \\ k/k_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \omega/c$ - полный волновой вектор. При описании отраженного поля формально мы должны были бы учесть все дифракционные максимумы с волновыми векторами $k_x^{(n)} = k_x + 2\pi n/d$. Так как $d \ll \lambda$, все $k_x^{(n)} \gg k$, поэтому все такие волны имеют мнимую компоненту k_z и затухают вдали от поверхности. Тем не менее, вблизи поверхности их следовало бы учитывать. Однако так как их амплитуда будет убывать с ростом n , мы пренебрежем ими и запишем только зеркально отраженную волну:

$$\mathbf{E}_1 = r e^{ik_x x - ik_z z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k_x/k_z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_1 = r e^{ik_x x - ik_z z} \begin{pmatrix} 0 \\ -k/k_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где r - коэффициент отражения. Что касается поля в желобках, то, так как $a \ll \lambda$, в них могут распространяться только волны с нулевой проекцией волнового вектора на ось x :

$$\mathbf{E}_2^\pm = e^{\pm ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_2^\pm = e^{\pm ikz} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Отметим, что волна с ненулевой y -компонентой электрического поля в желобках распространяться не может, так как тангенциальная компонента электрического поля на границе металла должна быть равна нулю.

◆ Полное поле внутри желобков имеет вид

$$\begin{aligned} E_2 &= t^+ E_2^+ + t^- E_2^- \\ H_2 &= t^+ H_2^+ + t^- H_2^- \end{aligned} \quad (16)$$

где t^+ и t^- - амплитуды волн, бегущих в желобках вниз и вверх. Учитывая граничные условия для электрического поля на дне желобков, сразу получаем $t^- e^{-ikh} = -t^+ e^{ikh} = t$.

◆ Теперь необходимо учесть граничные условия при $z = 0$ на входе электромагнитной волны в желобки:

$$\begin{aligned} E_{0x}(x,0) + E_{1x}(x,0) &= E_{2x}(x,0) \\ H_{0y}(x,0) + H_{1y}(x,0) &= H_{2y}(x,0) \end{aligned} \quad (17)$$

При этом граничные условия для электрического поля следует рассматривать везде, учитывая, что на поверхности металла $\mathbf{E} = 0$, а вот для магнитного поля – только в области желобков, так как на поверхности металла есть токи, из-за которых магнитное поле там не непрерывно. Другими словами, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} (1+r)e^{ik_x x} &= \begin{cases} 2it \sin kh, & nd - a/2 < x < nd + a/2 \\ 0, & nd + a/2 < x < (n+1)d + a/2 \end{cases} \\ (1-r)\frac{k}{k_z} e^{ik_x x} &= -2t \cos kh, & nd - a/2 < x < nd + a/2 \end{aligned} \quad (18)$$

Несложно видеть, что точно эти граничные условия выполнить невозможно. Однако так как электромагнитная волна «не замечает» неоднородности, размер которых много меньше длины волны, допустимо использовать граничные условия в среднем на длине периода d . Если домножить первое из соотношений (18) на $e^{-ik_x x}$, а потом проинтегрировать их по x , можно получить связь между параметрами поля над поверхностью и внутри желобков в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1+r)d &= 2it \sin kh \frac{2 \sin k_x a/2}{k_x} \\ (1-r)\frac{k}{k_z} \frac{2 \sin k_x a/2}{k_x} &= -2ta \cos kh \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда уже несложно получить выражение для коэффициента отражения:

$$r = -\frac{k_z + ikS_0^2 \operatorname{tg} kh}{k_z - ikS_0^2 \operatorname{tg} kh}, \quad (20)$$

где $S_0 = \sqrt{a/d} \operatorname{sinc}(k_x a/2)$. Как и следовало ожидать, модуль коэффициента отражения всегда равен единице. Если бы под желобками при $z > h$ был вакуум или диэлектрическая среда, мы могли бы аналогичным образом найти коэффициент прохождения поля насквозь через систему желобков.

◆ Выражение для коэффициента отражения (20) формально можно рассмотреть для $k_x > k$. В этом случае $k_z = i\sqrt{k_x^2 - k^2}$ мнимое, и знаменатель может обращаться в ноль. При этом коэффициент отражения становится бесконечным, то есть отраженная волна может существовать даже в отсутствии падающей. Эти полюса коэффициента отражения соответствуют поверхностным волнам, имеющим закон дисперсии:

$$\sqrt{k_x^2 - k^2} = kS_0^2 \operatorname{tg} kh. \quad (21)$$

Если $a \ll h$, то этот закон дисперсии похож на закон дисперсии обычных поверхностных плазмон-поляритонов (12): на малых частотах $k_x \approx \omega/c$, а при приближении к аналогу плазменной частоты $\tilde{\omega}_p = \pi c/2h$ волновой вектор поверхностной волны k_x становится неограниченно большим. К возникновению таких поверхностных волн привела искусственно созданная возможность проникновения электромагнитного поля в металл на глубину желобков h .

◆ Сходным образом можно получить аналогичный закон дисперсии поверхностных волн над двумерным периодическим массивом прямоугольных отверстий (рис.W12.D). Если размер отверстий меньше длины волны, то в таких волноводах может распространяться только затухающая волна М-типа:

$$\mathbf{E}_2 = e^{-q_z z} \sin \frac{\pi y}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H}_2 = e^{-q_z z} \sin \frac{\pi y}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_z/k \\ -i\pi/ka \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Поэтому глубина проникновения электромагнитной волны в металл в этом случае будет определяться не глубиной отверстий, а скоростью затухания волны в среде $q_z = \sqrt{\pi^2/a^2 - k^2}$.

§ 04 Эффективная диэлектрическая проницаемость

◆ Диэлектрическая проницаемость среды описывает взаимодействие электромагнитной волны с неоднородностями на атомарном уровне, характерные масштабы которых много меньше длины волны. Точно также любую неоднородную среду с размером неоднородностей много меньше длины волны можно рассматривать как однородную среду с эффективной диэлектрической проницаемостью. Подобные среды принято называть метаматериалами.

◆ Найдем эффективную диэлектрическую проницаемость рассмотренной нами системы желобков с $a, d \ll \lambda$. Так как система неоднородна только в направлении x , то эффективная среда будет анизотропной. В ней могут распространяться волны в плоскости yz с отличной от нуля компонентой поля E_x . Другие компоненты электрического поля всегда равны нулю. Чтобы при этом могло выполняться уравнение Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\epsilon} \mathbf{E}$, нужно, чтобы главные ком-

поненты тензора диэлектрической проницаемости были равны $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \infty$. Для того, чтоб найти компоненту ε_x , учтем граничные условия и энергетические соображения.

◆ Пусть вместо волны в желобках (15) с амплитудой E_x в эффективной однородной среде распространяется волна

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = e^{ikz} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{H}}_2 = e^{ikz} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_x \tilde{E}_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Так как граничные условия в среднем на длине d не должны измениться, $d\tilde{E}_x = aE_x$. С другой стороны, энергия электрического поля

$$W \sim a \frac{E_x^2}{8\pi} = d \frac{\varepsilon_x \tilde{E}_x^2}{8\pi}, \quad (24)$$

откуда $\varepsilon_x = d/a$. Несмотря на отличные от единицы значения диэлектрической проницаемости, волна в эффективной среде распространяется со скоростью света. Это означает, что необходимо также модифицировать тензор магнитной проницаемости. Из уравнений Максвелла можно получить, что в направлении k_i в анизотропной среде электромагнитная волна распространяется со скоростью $\tilde{c}_i = \sqrt{\varepsilon_j \mu_k} c$, откуда $\mu_y = \mu_z = a/d$ и $\mu_x = 1$.

◆ Можно показать, что коэффициент отражения электромагнитных волн от такой метаповерхности толщиной h имеет полюса, соответствующие поверхностным волнам с законом дисперсии, совпадающим с (21), если $S_0^2 \equiv a/d$ (то есть в пределе $k_x a \rightarrow 0$).

