

# W14 БИСТАБИЛЬНОСТЬ И ХАОС В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ОПТИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Тема этой лекции - нелинейнооптические эффекты, характерные не просто для нелинейных сред, а для более сложных оптических систем с нелинейными элементами.

## § 01 Основные термины

◆ Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных моделей, полезно уточнить термины, стоящие в названии лекции. Рассмотрим некую гипотетическую (в нашем случае - оптическую) систему, у которой есть по меньшей мере один вход и один выход.

◆ Под **бистабильностью** будем понимать ситуацию, в которой система при одних и тех же условиях на входе может выдавать несколько (обычно - два) различных сигнала на выходе. Часто такую ситуацию детектируют по наличию гистерезисной зависимости  $I_{out}(I_{in})$ , другими словами, состояние, в котором окажется система, обычно зависит от ее предыстории.

◆ Под **хаосом** будет понимать ситуацию, в которой при регулярном поведении сигнала на входе выходной сигнал будет обладать хаотическим поведением в его классическом понимании (см., например, спецкурс “Нелинейная динамика”).

◆ Термин “турбулентность” требует более тщательной расшифровки. Классический сценарий Ландау перехода к турбулентному движению в гидродинамике требует возникновения квазипериодического движения с тремя несоизмерными частотами, кроме того размерность странного аттрактора осциллятора Лоренца, который часто используется в качестве модели для описания турбулентного движения, близка к 2. Близкое отношение к понятию турбулентности также имеют процессы самоорганизации типа ячеек Бенара. Другими словами, “турбулентность” предполагает наличие нескольких измерений, в которых происходит хаотическое движение или связанная с ним самоорганизация, т.е. возникновение неоднородных предельных циклов или странных аттракторов.

◆ Поэтому под **оптической турбулентностью** будет понимать ситуацию, в которой при регулярном входном сигнале на выходе системы будет возникать хаотическое поведение сигнала как минимум в двух измерениях или возникновение неоднородных регулярных структур, спектр которых не связан со спектром входного сигнала. Примеры оптической турбулентности можно найти в монографии Ахманова и Никитина “Физическая оптика”.

✧ С.А.Ахманов, С.Ю.Никитин "Физическая оптика" - М.:МГУ (1998).

◆ Далее будут рассмотрены две модели, демонстрирующие введенные выше понятия.

## § 02 Нелинейная среда в интерферометре Фабри-Перо.

◆ Рассмотрим нелинейную среду, помещенную между зеркалами интерферометра Фабри-Перо (рис.1) с коэффициентами пропускания и отражения  $T$  и  $R$ , соответственно.

✧ Н.М.Gibbs, S.L.McCall, T.N.C.Venkatesant “*Differential gain and bistability using a sodium-filled Fabry-Perot interferometer*”, Phys.Rev.Lett., **36**, 1135 (1976); Т.Бисхофберген, Y.R.Shen “*Theoretical and experimental study of the dynamic behaviour of a nonlinear Fabry-Perot interferometer*”, Phys.Rev.A, **19**, 1169 (1979).

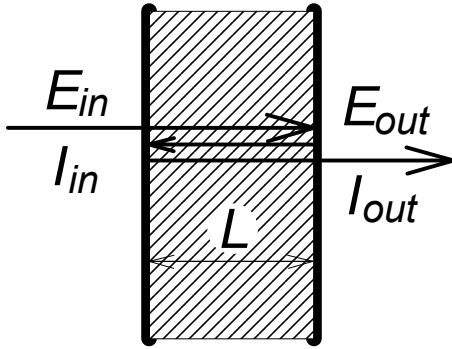


Рис.1. Интерферометр Фабри-Перо с нелинейной керровской средой.

◆ Если на вход интерферометра падает когерентное световое поле с амплитудой  $E_{in}$ , то поле на выходе интерферометра в момент времени  $t$  может быть определено при помощи рекуррентной формулы

$$E_{out}(t) = TE_{in}(t) + Re^{i\Delta\varphi} E_{out}(t - \tau), \quad (1)$$

где  $\tau = 2L/c$ ,  $L$  - расстояние между зеркалами интерферометра, а  $\Delta\varphi$  - набег фазы поля при двойном пробеге через интерферометр. Учитывая, что в интерферометре находится среда с керровской нелинейностью, а поле внутри интерферометра прямо пропорционально полю на выходе, может записать набег фазы в виде

$$\Delta\varphi = \varphi_0 + \gamma |E_{out}|^2, \quad (2)$$

где  $\varphi_0$  - набег фазы в интерферометре без нелинейной среды, а  $\gamma$  - коэффициент нелинейности. Если интенсивность входного поля меняется медленно по сравнению со временем  $\tau$  и временем реакции среды, то зависимость  $I_{out}(I_{in})$  может быть найдена из стационарного решения уравнения (1):

$$\left\{ 1 - R \exp\left(i\varphi_0 + i\gamma |E_{out}|^2\right) \right\} E_{out} = TE_{in}. \quad (3)$$

Домножая (3) на комплексно-сопряженное выражение, получаем искомое соотношение:

$$T^2 I_{in} = \left( 1 + R^2 - 2R \cos(\varphi_0 + \gamma I_{out}) \right) I_{out}. \quad (4)$$

◆ График полученной зависимости показан на рис.2. Легко видеть, что полученная зависимость оказывается многозначной. Несложно убедиться в том, что ветви с отрицательным наклоном будут абсолютно неустойчивы. Для этого рассмотрим слабые отклонения от стационарного решения уравнения (1)  $E_{out}(t) = E_s + \varepsilon(t)$  и линеаризуем (1) относительно  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon(t) = Re^{i\Delta\varphi} \left\{ (1 + i\gamma I_s) \varepsilon_\tau + i\gamma E_s^2 \varepsilon_\tau^* \right\}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_\tau \equiv \varepsilon(t - \tau)$ . Для исследования устойчивости необходимо найти собственные значения матрицы, связывающей значения  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^*$  в моменты времени  $t$  и  $t - \tau$ . Вычисляя детерминант матрицы

$$\begin{vmatrix} Re^{i\Delta\varphi} (1 + i\gamma I_s) - \lambda & i\gamma Re^{i\Delta\varphi} E_s^2 \\ -i\gamma Re^{-i\Delta\varphi} (E_s^*)^2 & Re^{-i\Delta\varphi} (1 - i\gamma I_s) - \lambda \end{vmatrix} \quad (6)$$

и приравняв его нулю, получаем уравнение

$$\lambda^2 - (1 + R^2 - G^{-1})\lambda + R^2 = 0, \quad (7)$$

где  $G$  - дифференциальный коэффициент усиления:

$$G^{-1} = T^2 \frac{dI_{in}}{dI_{out}} = T^2 \frac{I_{in}}{I_{out}} + 2\gamma R I_{out} \sin(\varphi_0 + \gamma I_{out}). \quad (8)$$

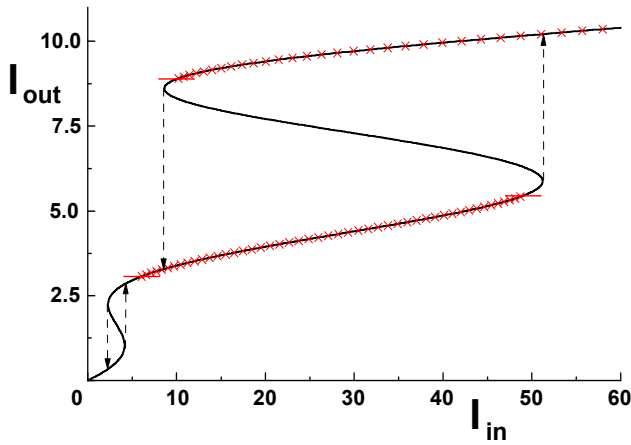


Рис.2. Зависимость  $I_{out}(I_{in})$ ,  $R = 0.5$ ,  $\varphi_0 = -3\pi/4$ ,  $\gamma = 1$ . Пунктиром показаны направления скачков с одной устойчивой ветви на другую, крестиками выделены области осциллирующего или хаотического поведения системы.

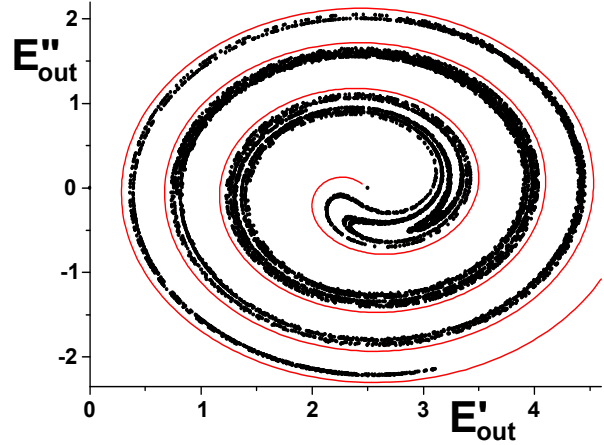


Рис.3. Фазовый портрет  $E''_{out}(E'_{out})$  хаотического поведения системы при  $I_{in} = 5$ . Сплошной линией показан приближенный вид (14) странного аттрактора.

Условие устойчивости  $|\lambda| < 1$  эквивалентно выполнению двойного неравенства

$$0 < G^{-1} < 2(1 + R^2). \quad (9)$$

Таким образом, ветвь с отрицательным наклоном оказывается неустойчивой, а зависимость  $I_{out}(I_{in})$  имеет гистерезисный характер, как показано на рис.2 стрелочками. Другими словами, в области многозначности наблюдается **бистабильность**: величина интенсивности света на выходе зависит не только от входной интенсивности, но и от предыстории системы.

◆ Теперь рассмотрим смысл второго неравенства (9). На рис.2 области, где это условие нарушается, выделены крестиками. При достижении  $I_{in}$  нижней гра-

ницы такой области интенсивность на выходе начинает осциллировать. При дальнейшем возрастании входной интенсивности происходят последовательные удвоения периода осцилляций, приводящие в итоге к возникновению **хаоса** по сценарию Фейгенбаума (рис.3). Подобное хаотическое поведение хорошо изучено для осциллятора Икеды, представляющего собой кольцевой резонатор с нелинейной средой, который с математической точки зрения практически эквивалентен рассматриваемой системе.

✧ К.Ikeda, H.Daido, O.Akimoto “*Optical turbulence: chaotic behaviour of transmitted light from ring cavity*”, Phys.Rev.Lett., **45**, 709 (1980); П.С.Ланда “*Нелинейные колебания и волны*”, §15.3 - М.:Наука (1997).

◆ В случае  $R \ll 1$  можно приближенно найти форму возникающего странного аттрактора. Представим амплитуду поля на выходе, в соответствии с (4), в виде  $E_{out} = TE_{in}(1 + \rho e^{i\varphi})$ ,  $\rho \sim R \ll 1$ . Подставляя ее в (1), получаем

$$\rho e^{i\varphi} = R(1 + \rho_{\tau} e^{i\varphi_{\tau}}) \exp \left\{ i\varphi_0 + i\gamma T^2 I_{in} \left| 1 + \rho_{\tau} e^{i\varphi_{\tau}} \right|^2 \right\}. \quad (10)$$

Легко заметить, что

$$\rho^2 = R^2 \left| 1 + \rho_{\tau} e^{i\varphi_{\tau}} \right|^2. \quad (11)$$

Тогда (10) можно переписать в следующем виде:

$$\rho e^{i(\varphi - \varphi_0 - \gamma T^2 I_{in} \rho^2 / R^2)} = R(1 + \rho_{\tau} e^{i\varphi_{\tau}}). \quad (12)$$

Аргумент правой части этого выражения

$$|\psi| = \left| \arctg \left\{ \frac{\rho \sin \varphi}{1 + \rho \cos \varphi} \right\} \right| \leq \arctg \rho \sim R \ll 1, \quad (13)$$

Поэтому в первом приближении амплитуда  $\rho$  и фаза  $\varphi$  связаны соотношением

$$\gamma T^2 I_{in} \rho^2 = R^2 (\varphi - \varphi_0), \quad (14)$$

которое вполне адекватно описывает форму странного аттрактора даже при  $R = 0.5$  (рис.3).

◆ Перейдем к рассмотрению поперечных неоднородностей в интерферометре Фабри-Перо с керровской нелинейностью. Для этого добавим в (1) член, описывающий дифракцию света. Кроме того, будем считать время  $\tau$  достаточно малым, чтобы было достаточно описывать изменения  $E_{out}$  при помощи ее первой производной  $E_{out}(t + \tau) \equiv E(t + \tau) \approx E(t) + \tau E_t$ :

$$\tau E_t = TE_{in} - E + RE e^{i\Delta\varphi} + id\Delta_{\perp} E. \quad (15)$$

✧ L.A.Lugiato, R.Lefever “*Spatial dissipative structures in passive optical systems*”, Phys.Rev.Lett., **58**, 2209 (1987)

◆ Стационарное решение (4) в этом случае остается неизменным, а вот условия устойчивости приобретают вид требования отрицательности инкремента нарастания  $\dot{\Gamma}$  малых отклонений  $\varepsilon(t, \rho) = \varepsilon e^{\dot{\Gamma}t + ik\rho}$  в соотношении  $\dot{\Gamma}(k)$ , задаваемым выражением

$$\begin{vmatrix} Re^{i\Delta\varphi}(1+i\gamma I_s) - 1 - \Gamma\tau - idk^2 & i\gamma Re^{i\Delta\varphi} E_s^2 \\ -i\gamma Re^{-i\Delta\varphi} (E_s^*)^2 & Re^{-i\Delta\varphi}(1-i\gamma I_s) - 1 - \Gamma\tau + idk^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Аналитическое исследование этого уравнения слишком громоздко, поэтому на рис.4 показаны численно полученные области неустойчивости (ср. с рис.2). Таким образом, даже если система устойчива в продольном направлении, она почти всегда неустойчива по отношению к поперечным возбуждениям с определенными волновыми векторами, и если интерферометр Фабри-Перо и диаметр пучка накачки имеют достаточные поперечные размеры, то в системе будут формироваться поперечно-неоднородные структуры, являющиеся примерами **оптической турбулентности**.

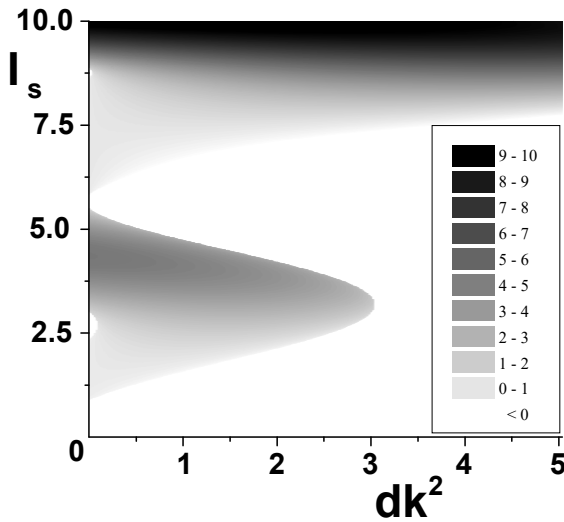


Рис.4. Области поперечной неустойчивости системы (15) на плоскости “интенсивность на выходе  $I_s$  - квадрат волнового вектора  $dk^2$ ”,  $R = 0.5$ ,  $\varphi_0 = -3\pi/4$ ,  $\gamma = 1$ . Контрастом показано значение инкремента нарастания  $\Gamma\tau$ .

### § 03. Нелинейная среда с обратной связью.

◆ Перейдем к рассмотрению несколько иной системы. Луч световой накачки падает на тонкий слой толщины  $L$  нелинейной среды, медленно (с запаздыванием) реагирующей на проходящее через нее излучение, отражается от зеркала, стоящего на расстоянии  $D$ , и снова проходит через нелинейность (рис.5). Свет, таким образом, проходит через нелинейную среду только два раза, однако благодаря инерционности нелинейности он оказывает влияние на прохождение света в следующие моменты времени. Амплитуды падающего  $F(z)$  и отраженного  $B(z)$  поля внутри нелинейной среды могут быть описаны системой уравнений

$$\begin{aligned} F_z &= i\gamma n F; \\ B_z &= -i\gamma n B; \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\gamma$ , как и ранее, коэффициент нелинейности среды, а  $n$  - ее показатель преломления, зависящий от интенсивности проходящего через него света:

$$\tau n_t - d\Delta_{\perp} n + n = |F|^2 + |B|^2. \quad (18)$$

Здесь  $\tau$  - характерное время реакции среды, а  $d$  - коэффициент диффузии, приводящей к расплыванию неоднородностей показателя преломления. В случае распространенной модели нелинейности, обусловленной перераспределением носителей заряда в зоне проводимости,  $d$  пропорционально квадрату их длины свободного пробега. При этом эволюция светового поля между нелинейным слоем и зеркалом описывается обыкновенным параболическим уравнением

$$\begin{aligned} 2iqF_z + \Delta_{\perp} F &= 0; \\ -2iqB_z + \Delta_{\perp} B &= 0; \end{aligned} \tag{19}$$

где  $q = 2\pi c/\lambda$  - волновой вектор света. Отметим, что функции  $F$ ,  $B$ ,  $n$  одновременно зависят от времени  $t$ , продольной координаты  $z$  и поперечного радиус-вектора  $\rho$ , однако ни в одном из уравнений не присутствуют явно сразу все эти переменные, что значительно упрощает исследование системы.

✧ W.J.Firth “*Spatial instabilities in a Kerr medium with single feedback mirror*”, J.Mod.Optics, 37, 151 (1990); G.D'Alessandro, W.J.Firth “*Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror*”, Phys.Rev.Lett., 66, 2597 (1991)

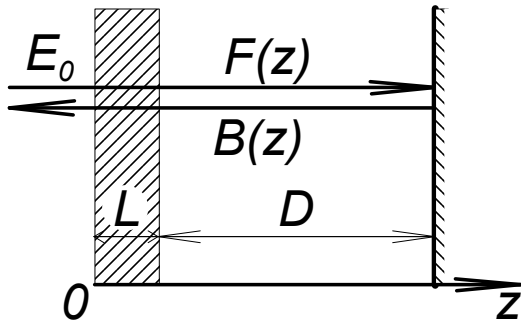


Рис.5. Нелинейный слой с зеркалом обратной связи.

◆ Стационарное поперечно-однородное решение системы (17-19) находится элементарно:

$$\begin{aligned} F_0 &= E_0 e^{i\gamma n_0 z}; \\ B_0 &= r E_0 e^{i\gamma n_0 (2L-z) + 2iDq}; \\ n_0 &= (1 + R) I_0; \end{aligned} \tag{20}$$

где  $R = |r|^2$  - коэффициент отражения зеркала, а  $I_0$  - интенсивность накачки. Рассмотрим слабые отклонения от стационарного решения

$$\begin{aligned} F &= F_0 + f; \\ B &= B_0 + b; \\ n &= n_0 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя их в уравнения (17), получаем

$$\begin{aligned} f_z &= i\gamma F_0 \varepsilon + i\gamma n_0 f; \\ b_z &= -i\gamma B_0 \varepsilon - i\gamma n_0 b. \end{aligned} \tag{22}$$

Так как поперечный радиус-вектор  $\rho$  в уравнения не входит, удобно произвести по нему фурье-преобразование. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\tau \varepsilon_t + (1 + dk^2) \varepsilon = F_0 f^* + B_0 b^* + \text{к.с.}, \quad (23)$$

где  $k$  - координата в поперечном спектральном пространстве. Аналогично, из (19) получаем:

$$\begin{aligned} 2iqf'_z - k^2 f &= 0; \\ 2iqb'_z + k^2 b &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Логично предположить, что  $\varepsilon$ , как и  $n_0$  (20), не зависит от  $z$ . Тогда можно точно решить уравнения (22,24), получив для слабых возмущений поля в среде выражения

$$\begin{aligned} f &= i\gamma z F_0(z) \varepsilon(k, t); \\ b &= i\gamma \left( L e^{-iDk^2/q} - z \right) B_0(z) \varepsilon(k, t - T). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $T = 2D/c$  - время, за которое пучок света дойдет от нелинейного слоя до зеркала и вернется обратно. Подставляя полученные решения в (23), получаем уравнение относительно единственной функции  $\varepsilon(k, t)$ :

$$\tau \varepsilon_t + (1 + dk^2) \varepsilon = 2\gamma L R I_0 \varepsilon_T \sin Dk^2/q, \quad (26)$$

где  $\varepsilon_T \equiv \varepsilon(t - T)$ . Таким образом, зеркало играет роль обратной связи, усиливающей или ослабляющей поперечные неоднородности. Для исследования устойчивости стационарного состояния (21) будем искать решение в виде  $\varepsilon(t) = \varepsilon \exp(\dot{\tau} t + i\omega t)$ . Подставляя его в уравнение (26), и переходя от комплексных выражений к их модулям, получаем:

$$\sqrt{\omega^2 \tau^2 + (1 + dk^2 + \dot{\tau} \tau)^2} = 2\gamma L R I_0 e^{-\dot{\tau} \tau} \left| \sin Dk^2/q \right|. \quad (27)$$

Легко видеть, что положительные значения  $\dot{\tau}$ , т.е. развитие неустойчивости, возможно при условии выполнения неравенства

$$\gamma L I_0 \geq \frac{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + (1 + dk^2)^2}}{2R \left| \sin Dk^2/q \right|}. \quad (28)$$

В частности, наиболее мягким оказывается условие возникновения стационарных возмущений с  $\omega = 0$ :

$$\gamma L I_0 \geq \frac{1 + dk^2}{2R \left| \sin Dk^2/q \right|}. \quad (29)$$

На рис.6 показаны области, в которых стационарное решение (21) неустойчиво. При малых значениях интенсивности накачки неустойчивость не развивается.

◆ При увеличении интенсивности наиболее выгодным является возникновение неустойчивости с минимальным волновым вектором  $k_0$ . Направление этого вектора произвольно, причем возможно одновременное развитие нескольких неустойчивостей, отличающихся только направлением вектора  $k_0$ . Однако три

вектора одинаковой длины способны составить равносторонний треугольник. Возмущения, соответствующие трем таким волновым векторам  $k_0$  благодаря их взаимодействию будут развиваться наиболее интенсивно, что объясняет возникновение стационарной гексагональной структуры (рис.7). При дальнейшем увеличении интенсивности накачки “включаются” нестационарные возмущения с  $\omega \neq 0$ , приводящие к возникновению двумерной хаотической структуры. Таким образом, в рассмотренной системе возможна реализация различных режимов **оптической турбулентности**.

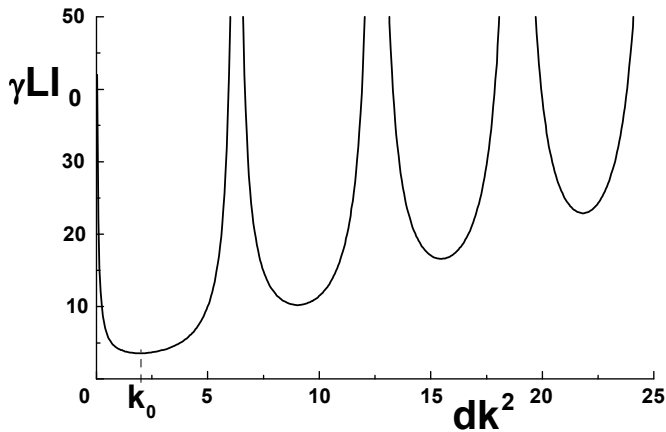


Рис.6. Области неустойчивости стационарного решения (21),  $R = 0.5$ ,  $qd = 2D$ .

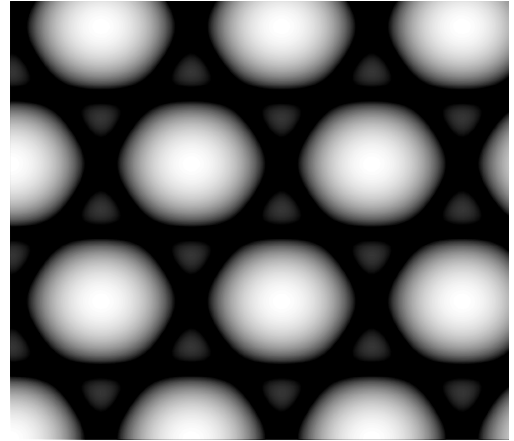


Рис.7. Характерный вид гексагональной структуры.

