

W13-14 НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

§ 01 Электромагнитные волны в нелинейных средах

◆ Под нелинейностью среды в применении к электромагнитным волнам в большинстве случаев подразумевают нелинейную зависимость $\mathbf{D}(\mathbf{E})$. Записывая электрическую индукцию \mathbf{D} в виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_{NL}, \quad (1)$$

где \mathbf{P}_{NL} - часть поляризации, содержащая только нелинейные члены, и подставляя ее в волновое уравнение (W09.3), получаем волновое уравнение

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

или, в (ω, \mathbf{r}) -представлении,

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}_{NL}. \quad (2a)$$

Подставляя напряженность поля в приближении медленно меняющейся амплитуды $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и пренебрегая второй производной амплитуды, получаем

$$2i(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{E}_0 = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}_{NL}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2b)$$

◆ В интересующих нас нелинейнооптических эффектах амплитуда поля электромагнитной волны на несколько порядков меньше внутриатомного электрического поля, что позволяет учитывать только несколько первых членов разложения в ряд зависимости нелинейной поляризации от электрического поля $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{E})$, которая в спектральном представлении будет иметь вид

$$\mathbf{P}_{NL}(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{\omega_1 + \dots + \omega_k = \omega} \hat{\chi}^{(k)}(\omega_1, \dots, \omega_k) \mathbf{E}(\omega_1, \mathbf{r}) \dots \mathbf{E}(\omega_k, \mathbf{r}) \right], \quad (3)$$

где $\mathbf{E}(-\omega) \equiv \mathbf{E}^*(\omega)$, а тензор $\hat{\chi}^{(k)}$ - восприимчивость k -го порядка. Отсюда легко видеть, что нелинейность среды приводит к возникновению электромагнитного поля на суммарных (или разностных) частотах. Ниже мы рассмотрим несколько конкретных случаев проявления нелинейности среды. Как уже отмечалось ранее, скорости распространения электромагнитных волн в среде сильно зависят от их частоты, поэтому эффективное взаимодействие возможно лишь между небольшим числом спектральных компонент, скорости которых оказались достаточно близки друг к другу. Влиянием всех прочих гармоник при этом можно пренебречь.

§ 02 Генерация второй гармоники

◆ Первым членом разложения нелинейной поляризации по степеням поля является квадратичная нелинейность, определяющаяся квадратичной восприимчивостью $\hat{\chi}^{(2)}$. Рассмотрим генерацию второй гармоники за счет сложения двух одинаковых частот, приводящую к появлению электромагнитной волны на удвоенной частоте, в случае, когда направления распространения двух волн, а также их поляризации совпадают. В этом случае достаточно рассмотреть одномерный случай. Подставляя в волновое уравнение электрическое поле в виде суммы двух мод с медленно меняющимися амплитудами

$$E(\omega, z) = E_1(z)e^{ik_1z}\delta(\omega - \omega_0) + E_2(z)e^{ik_2z}\delta(\omega - 2\omega_0), \quad (4)$$

где $k_i = \omega_i n(\omega_i)/c$, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = 2\pi i \frac{\omega_0}{cn(\omega_0)} \chi^{(2)}(\omega_0) E_2 E_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dE_2}{dz} = 2\pi i \frac{2\omega_0}{cn(2\omega_0)} \chi^{(2)}(2\omega_0) E_1^2 e^{i\Delta kz} \end{cases} \quad (5)$$

В каждое из полученных уравнений входит фазовый множитель, определяющийся расстройкой волновых векторов $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 2\omega_0 \{n(2\omega_0) - n(\omega_0)\}/c$. Почти очевидно, что эффективный энергообмен между двумя модами возможен только при условии $l\Delta k \ll 1$, где l - длина их взаимодействия. Условие $\Delta k = 0$ называют условием фазового (или пространственного) синхронизма. Для его выполнения в кристаллах практически всегда приходится использовать неколлинеарный синхронизм или разные поляризации взаимодействующих волн и учитывать тензорный характер квадратичной восприимчивости. Однако конечная система уравнений будет иметь практически тот же вид

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = i\eta E_2 E_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dE_2}{dz} = i\eta E_1^2 e^{i\Delta kz} \end{cases}, \quad (5a)$$

где учтено, что в отсутствие диссипации должно выполняться равенство $\frac{2\chi^{(2)}(2\omega_0)}{n(2\omega_0)} = \frac{\chi^{(2)}(\omega_0)}{n(\omega_0)}$.

◆ Полученная система имеет интеграл движения

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = I = \text{const}, \quad (6)$$

выражающий закон сохранения энергии. Используя характерный масштаб длины – нелинейную длину $l_{nl} = 1/\eta\sqrt{I}$, введем безразмерные координату и расстройку $\xi = z/l_{nl}$, $\Delta = \Delta k l_{nl}$, и перейдем от комплексных переменных к действительным

вительным: $E_i = \sqrt{I} a_i e^{i\varphi_i}$. Система (5а) при этом преобразуется к безразмерному виду

$$\begin{cases} \frac{da_1}{d\xi} = -a_1 a_2 \sin \psi \\ \frac{da_2}{d\xi} = a_1^2 \sin \psi \\ \frac{d\psi}{d\xi} = -\Delta - \frac{1}{a_2} (2a_2^2 - a_1^2) \cos \psi, \end{cases} \quad (7)$$

где $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 - \Delta kz$. Можно проверить, что данная система имеет еще один интеграл движения

$$a_1^2 (2a_2 \cos \psi + \Delta) = \text{const}. \quad (8)$$

С помощью двух полученных законов сохранения точное решение этой системы может быть выражено через эллиптические интегралы. Для простоты мы рассмотрим два частных случая. Пусть на входе в кристалл есть только основная гармоника, то есть $a_2(0) = 0$. Тогда на не очень больших расстояниях можно считать $a_2 \ll a_1$ и использовать *приближение заданной накачки* $E_1 = \text{const}$. Интегрируя второе уравнение (5а), немедленно получаем

$$E_2(z) = \frac{\eta E_1^2}{\Delta k} (e^{i\Delta kz} - 1) = \frac{2i\eta E_1^2}{\Delta k} e^{i\Delta kz/2} \sin \frac{\Delta kz}{2}; \quad a_2(\xi) = \frac{2}{\Delta} \sin \frac{\Delta \xi}{2}, \quad (9)$$

то есть интенсивность второй гармоники осциллирует около нуля с пространственной частотой Δk и амплитудой, в Δ^{-2} раз меньшей интенсивности основной частоты. Расстояние между соседними максимумами $l_{coh} = 2\pi/\Delta k$ часто называют когерентной длиной, которая определяет максимальную длину кристалла, в котором при данной расстройке имеет смысл получать вторую гармонику. Решение (9) можно уточнить: дифференцируя второе уравнение (5а) и подставляя в него первое, получаем

$$\frac{d^2 E_2}{dz^2} - i\Delta k \frac{dE_2}{dz} + 2\eta^2 I_1 E_2 = 0. \quad (5б)$$

В *приближении заданной интенсивности* (но не фазы!) $I_1 = \text{const}$ это уравнение имеет решение

$$E_2(z) = \frac{i\eta E_1^2}{q} e^{i\Delta kz/2} \sin qz; \quad q = \frac{\Delta k}{2} \sqrt{1 + \frac{8\eta^2 I_1}{\Delta k^2}}. \quad (9а)$$

Легко видеть, что приближения заданной накачки или интенсивности неприменимы при нарушении неравенства $\Delta \gg 1$ (или $l_{nl} \gg l_{coh}$), т.е. при достаточно малой величине фазовой расстройки Δk . Это позволяет рассмотреть в качестве противоположного предельного случая ситуацию точного фазового синхронизма $\Delta k = 0$. В этом случае без ограничения общности можно считать $\psi \equiv \pi/2$, после чего последнее уравнение (7) удовлетворится автоматически, а

остальные два сводятся к единственному уравнению $a_2' = 1 - a_2^2$, решение которого имеет вид

$$a_2 = \text{th } \xi, \quad a_1 = 1/\text{ch } \xi. \quad (10)$$

Таким образом, в случае точного выполнения условия фазового синхронизма вся энергия может быть перекачана во вторую гармонику. На рис. W13.А показаны зависимости интенсивностей второй гармоники в случаях точно выполненного и сильно нарушенного условий фазового синхронизма.

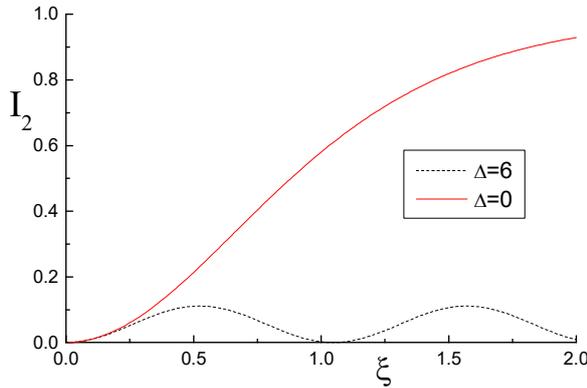


Рис. W13.А.

Зависимость интенсивности второй гармоники в случае точно выполненного и сильно нарушенного условий фазового синхронизма.

§ 03 Самовоздействие и четырехволновое смешение

◆ Следующая, кубическая, нелинейность среды обычно на несколько порядков меньше квадратичной. Однако учет эффектов, связанных с нелинейностью третьего порядка, необходим, по меньшей мере, по двум причинам. Первая из них заключается в том, что за счет четных нелинейностей волна не может влиять на саму себя, тогда как за счет нечетных - может.

◆ Подставляя в уравнение (2а) поле в виде одной моды электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z , с медленно меняющейся амплитудой $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{n}E_0(z, \mathbf{r})e^{ikz}\delta(\omega - \omega_0)$, где \mathbf{r} - вектор в плоскости xu , и нелинейную поляризацию в виде $\mathbf{P}_{NL}(\omega) = \hat{\chi}^{(3)}\mathbf{E}(\omega)|\mathbf{E}(\omega)|^2$, и пренебрегая второй производной амплитуды поля по z , получаем нелинейное параболическое уравнение, имеющее форму НУШ:

$$2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + \Delta_{\perp} E_0 + \eta E_0 |E_0|^2 = 0, \quad (11)$$

где $\eta = 4\pi\omega^2\chi^{(3)}/c^2$. В зависимости от знака восприимчивости это уравнение описывает самофокусировку или самодефокусировку волнового пучка. Необходимо отметить, что в отличие от генерации второй гармоники, в этом случае условие фазового синхронизма выполняется автоматически. Аналогичным уравнением может быть описана самокомпрессия коротких импульсов под действием кубической нелинейности вещества. Свойства нелинейного уравнения Шредингера были рассмотрены нами ранее, в лекции W03.

◆ Второй причиной необходимости учета нелинейности третьего порядка является то, что в centrosymmetric средах квадратичная восприимчивость в силу симметричных соображений обязана быть равной нулю. Таким образом, кубическая нелинейность оказывается низшим членом в разложении нелинейной поляризации по степеням поля. Взаимодействие четырех мод поля за счет восприимчивости третьего порядка описывается уравнениями для медленно меняющихся амплитуд поля (2б) в виде

$$2i(\mathbf{k}\nabla)E(\omega) = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\hat{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)E(\omega_1)E(\omega_2)E(\omega_3)e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3-\mathbf{k})r},$$

где $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Подобные уравнения позволяют описать такие нелинейно-оптические эффекты как комбинационное антистоксово рассеяние света (КАРС) и обращение волнового фронта (ОВФ).

◆ Для простоты рассмотрим взаимодействие четырех мод поля, имеющих одинаковые частоты, но различающихся направлениями. В этом случае процесс взаимодействия за счет кубической нелинейности можно условно описать следующим образом: интерференционная картина от двух волн как бы модулирует показатель преломления, т.е. приводит к возникновению в среде виртуальной динамической объемной дифракционной решетки, и при дифракции третьей волны на ней возникает четвертая. Условие фазового синхронизма, эквивалентное в этом случае брэгговскому условию дифракции, выполняется автоматически, если волны направлены попарно навстречу друг другу (рис.W13.B).

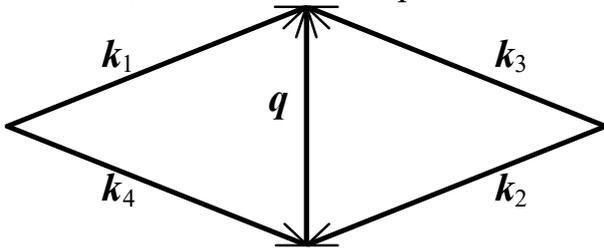


Рис.W13.B. Выполнение фазового синхронизма при четырехволновом смешении.

◆ Пусть на кристалл с противоположных сторон падают два сильных пучка накачки E_1 и E_2 , а также сигнальный пучок света E_4 . Подобная схема часто используется для так называемого обращения волнового фронта, при котором волновой фронт волны E_3 , рождающейся в кристалле, будет совпадать с обращенным волновым фронтом волны E_4 . Если тензор кубической восприимчивости устроен таким образом, что наибольшую эффективность имеет взаимодействие за счет виртуальной дифракционной решетки, соответствующей интерференции волн E_1 и E_4 , то нелинейную поляризацию можно записать в виде

$$P_{NL}(\mathbf{r}) = (G e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + G^* e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}})E(\mathbf{r}), \quad (12)$$

где $G(\mathbf{r}) = \eta E_1 E_4^* + \eta^* E_2^* E_3$ - амплитуда виртуальной дифракционной решетки, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2$ - ее волновой вектор, а η - коэффициент, в который входит компонента тензора кубической восприимчивости. Подставляя поляризацию в

волновое уравнение (2) и выделяя части, соответствующие разным модам поля, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = iGE_4; & \frac{dE_2}{dz} = iG^*E_3; \\ \frac{dE_3}{dz} = iGE_2; & \frac{dE_4}{dz} = iG^*E_1. \end{cases} \quad (13)$$

Легко проверить, что полученная система имеет четыре интеграла движения

$$\begin{cases} |E_1|^2 + |E_4|^2 = J_1; & |E_2|^2 + |E_3|^2 = J_2; \\ E_1E_2 - E_3E_4 = C_1; & E_1E_3^* + E_2^*E_4 = C_2, \end{cases} \quad (14)$$

где первые два играют роль законов сохранения энергии, а четыре константы удовлетворяют соотношению $|C_1|^2 + |C_2|^2 = J_1J_2$. Эти условия позволяют сократить число неизвестных переменных: например, из третьего и четвертого уравнений (13) получаем

$$\begin{cases} \frac{dE_3}{dz} = i \left\{ \eta^* J_2 E_3 + \eta C_1 E_4^* - \left(\eta^* |E_3|^2 - \eta |E_4|^2 \right) E_3 \right\} \\ \frac{dE_4^*}{dz} = -i \left\{ \eta^* C_1^* E_3 + \eta J_1 E_4^* + \left(\eta^* |E_3|^2 - \eta |E_4|^2 \right) E_4^* \right\} \end{cases} \quad (15)$$

Исключая из них член $\left(\eta^* |E_3|^2 - \eta |E_4|^2 \right)$, получаем уравнение относительно переменной $r = E_4/E_3^*$:

$$\frac{dr}{dz} = i \left\{ \eta^* C_1^* r^2 + \left(\eta^* J_1 + \eta J_2 \right) r + \eta C_1 \right\}, \quad (16)$$

которое в случае действительного η тривиально интегрируется:

$$r(z) = \left\{ -I_0 + i\sqrt{D} \operatorname{ctg}(\sqrt{D}\eta z/2) \right\} / C_1^*, \quad (17)$$

где $I_0 = J_1 + J_2$ и $D = I_0^2 - 4|C_1|^2$. Из полученного решения следует, что $r(0) = \infty$, что соответствует граничному условию $E_3(0) = 0$. В этом случае значение $r(l)$ на выходе из кристалла будет определять коэффициент преобразования при обращении волнового фронта

$$R = \left| \frac{E_3(l)}{E_4(l)} \right|^2 = |r(l)|^{-2} = \frac{4|C_1|^2 \sin^2(\sqrt{D}\eta l/2)}{D + 4|C_1|^2 \sin^2(\sqrt{D}\eta l/2)}. \quad (18)$$

При условии $D \ll 4|C_1|^2$ на длинах кристалла $\sqrt{D}\eta l = (2n+1)\pi$ коэффициент преобразования может практически достигать единицы.

§ 04 Фоторефрактивные среды

◆ Рассмотрим взаимодействие двух разнонаправленных мод поля одинаковой частоты в условиях, аналогичных только что рассмотренным, однако с учетом инерционности дифракционной решетки, создаваемой двумя пучками света в среде. Учет запаздывания реакции среды имеет смысл в случае предельно коротких световых импульсов, а также в случае так называемых фоторефрактивных сред, в которых под действием света происходят крайне медленные изменения показателя преломления, приводящие к записи реальной дифракционной решетки (к примеру, характерное время записи решетки в кристалле ниобате лития, легированном атомами железа или меди, может составлять несколько часов). В этом случае укороченные уравнения, описывающие медленно меняющиеся амплитуды мод поля, будут такими же, как и в (13), однако они должны быть дополнены уравнением, описывающим медленное изменение амплитуды дифракционной решетки G :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial z} = iGE_2; & \frac{\partial E_2}{\partial z} = iG^*E_1; \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \sigma G = i\eta E_1 E_2^*. \end{cases} \quad (19)$$

Перейдем к действительным переменным $E_j = a_j e^{i\varphi_j}$ и $G = g e^{i\gamma}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial z} + ia_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = iga_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma)}; \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} + ia_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = iga_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma)}; \\ \frac{\partial g}{\partial t} + ig \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \sigma g = i\eta a_1 a_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma)}. \end{cases} \quad (20)$$

При условии $\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma = \pi/2$ все фазы остаются неизменными. В этом случае полученная система оказывается полностью действительной:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial z} = -ga_2; & \frac{\partial a_2}{\partial z} = ga_1; \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \sigma g = \eta a_1 a_2. \end{cases} \quad (21)$$

Легко видеть, что суммарная энергия двух пучков света $a_1^2 + a_2^2 = I$ постоянна. Этот закон сохранения будет выполняться автоматически, если сделать замену переменных $a_1 = \sqrt{I} \cos \alpha$; $a_2 = \sqrt{I} \sin \alpha$. Используя эту замену, легко свести систему к единственному волновому уравнению относительно $\beta = 2\alpha$

$$\beta_{zt} + \sigma \beta_z = \eta I \sin \beta, \quad (22)$$

имеющему вид уравнения синус-Гордона с диссипативным членом.

§ 05 Система Максвелла-Блоха

◆ До сих пор мы описывали отклик нелинейной среды при помощи феноменологических нелинейных восприимчивостей. Однако если интенсивное электромагнитное поле попадает в резонанс с каким-то переходом в среде, такого описания становится недостаточно – разложение в ряд по степеням поля становится некорректным. Будем рассматривать среду как множество квантовых двухуровневых систем, с которыми взаимодействует световая волна. Состояние двухуровневой системы описывается волновой функцией

$$|\psi(r,t)\rangle = a(r,t)|\varphi_1\rangle + b(r,t)|\varphi_2\rangle, \quad (23)$$

где $|\varphi_i\rangle$ - собственные волновые функции невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 двухуровневой системы. Полный гамильтониан имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + E\hat{d}$, где E - напряженность электромагнитного поля, а \hat{d} - оператор дипольного момента. Учитывая, что для дипольного момента отличны от нуля только перекрестные матричные элементы $\langle\varphi_1|\hat{d}|\varphi_2\rangle \equiv d$, из уравнения Шредингера получаем уравнения для коэффициентов разложения волновой функции

$$\begin{cases} ia_t = \omega_1 a + \Omega b \\ ib_t = \Omega a + \omega_2 b \end{cases} \quad (24)$$

где $\hbar\omega_i$ - собственные энергии двух уровней, а $\Omega = dE/\hbar$ - частота Раби. Учитывая, что суммарная населенность двух уровней остается постоянной, это три уравнения относительно трех действительных неизвестных. В качестве таких переменных обычно выбирают переменные Блоха: $P = ab^* + a^*b$; $Q = i(ab^* - a^*b)$; $R = |b|^2 - |a|^2$. Система (24) тогда принимает следующий вид:

$$\begin{cases} P_t = \omega Q; R_t = -2\Omega Q; \\ Q_t = -\omega P + 2\Omega R \end{cases} \quad (25)$$

где $\omega = \omega_2 - \omega_1$ - частота перехода. Это система уравнений носит название уравнений Максвелла-Блоха.

◆ Поляризация среды $\mathcal{P} = n\langle\hat{d}\rangle = ndP$ в свою очередь входит в волновое уравнение для электромагнитной волны

$$E_{tt} - c^2 E_{xx} = -4\pi\mathcal{P}_{tt} = -4\pi ndP_{tt}. \quad (26)$$

Здесь n - концентрация атомов в среде. Вместе с системой Максвелла-Блоха, это уравнение составляет нелинейную систему, описывающую взаимодействие множества двухуровневых систем с электромагнитной волной:

$$\begin{cases} P_{tt} + \omega^2 P = 2d\omega ER/\hbar \\ R_t = -2dEP_t/\hbar\omega \\ E_{tt} - c^2 E_{xx} = 4\pi nd(\omega^2 P - 2d\omega ER/\hbar) \end{cases} \quad (27)$$

Напряженность поля и поляризация осциллируют с частотой перехода ω , а вот разность населенностей уровней R меняется значительно медленнее. Поэтому удобно перейти к медленно меняющимся амплитудам

$$\begin{cases} E(x,t) = f(x,t)\cos(\omega t - kx) \\ P(x,t) = u(x,t)\cos(\omega t - kx) - v(x,t)\sin(\omega t - kx) \\ R(x,t) = r(x,t) \end{cases} \quad (28)$$

и подставив их в уравнения (27), пренебrecь высшими производными:

$$\begin{cases} f_t + cf_x = 2\pi nd\omega v \\ v_t = df/\hbar \\ r_t = -dfv/\hbar \end{cases} \quad (29)$$

Если ввести бегущую переменную $\tilde{t} = t - x/c$, то в новых переменных, \tilde{t} , $\tilde{x} \equiv x$ в первом уравнении остается только производная по \tilde{x} . Из двух других уравнений видно, что $v^2 + r^2 = const$. Используя подстановку $v = g \sin \varphi$, $r = g \cos \varphi$, получаем уравнение синус-Гордона

$$\varphi_{\tilde{x}\tilde{t}} + G \sin \varphi = 0, \quad (30)$$

где $G = 2\pi nd^2\omega g/\hbar$. Как мы знаем, это уравнение имеет солитонное решение в форме кинка, а амплитуда электромагнитной волны $f = -\hbar\varphi_{\tilde{t}}/d$ будет иметь форму колокола. Импульс электромагнитного поля такой формы распространяется по нелинейной среде без затухания, т.е. полученные нами уравнения описывают эффект самоиндуцированной прозрачности.

