W11 ВОЛНОВОДЫ. АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

§ 01 Электромагнитные волны в волноводах.

◆ В отличие от электромагнитных волн в резонаторах, электромагнитные волны в волноводах, то есть резонаторах, один из поперечных размеров которых стремится к бесконечности, не являются чисто стоячими. Рассмотрим электромагнитные волны в прямолинейном волноводе с произвольным сечением. Выберем систему координат, ось z которой совпадает с направлением волновода. Раскрывая уравнения Максвелла $\operatorname{rot} E = i\frac{\omega}{c}H$; $\operatorname{rot} H = -i\frac{\omega}{c}E$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = \frac{i\omega}{c}H_x; \ \frac{\partial H_z}{\partial y} - ik_z H_y = -\frac{i\omega}{c}E_x \\ ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{i\omega}{c}H_y; \ ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c}E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{i\omega}{c}H_z; \ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c}E_z \end{cases} \qquad (1)$$

Выражая из первых четырех выражений поперечные компоненты электрического и магнитного поля и подставляя их в последние два, получаем, что электромагнитное поле может быть представлено в виде суперпозиции так называемых волн электрического и магнитного типа, для первых из которых $H_z = 0$, а для вторых - $E_z = 0$. Поэтому все компоненты электромагнитного поля для волны определенного типа с помощью уравнений Максвелла могут быть выражены через единственную z-компоненту поля, удовлетворяющую двумерному уравнению Гельмогольца

$$\Delta_\perp F_z + \text{ґ}^2 F_z = 0, \qquad (2)$$

где $\text{ґ}^2 = \omega^2 / c^2 - k_z^2$, а граничные условия имеют вид $F_z = E_z = 0$ для Е-волн и $\frac{\partial F_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ - для Н-волн. Собственные значения поперечного волнового числа ґ^2 определяют закон дисперсии волн

$$\omega^2 = c^2\left(k_z^2 + \text{ґ}^2\right). \qquad (3)$$

Таким образом, волны в волноводе имеют скорость распространения, меньшую скорости света

$$u_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + \text{ґ}^2}} < c. \qquad (4)$$

и частоту, ограниченную снизу критической частотой $\omega^* = c\text{ґ}_{\min}$.

◆ Возможна, однако, ситуация, при которой по волноводу со скоростью света распространяется полностью поперечная волна $H_z = E_z = 0$. В этом случае

$\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\right)_z \sim H_z = 0$, откуда следует, что напряженность поля можно представить в виде двумерного градиента скалярного электрического потенциала $\boldsymbol{E} = \nabla_\perp \varphi$. Подставляя его в уравнение Гельмгольца и учитывая, что $k \equiv k_z$, получаем двумерное уравнение Лапласа

$$\Delta_\perp \varphi = 0, \tag{5}$$

с граничными условиями $\varphi = \mathrm{const}$. Отсюда видно, что для существования такой волны, которую называют главной, необходимо, чтобы сечение волновода было неодносвязным. В этом случае значение константы на разных поверхностях может быть различным, а решение уравнения Лапласа - нетривиальным. Именно так и устроены современные волноводы, обеспечивающие связь между компьютерами.

§ 02 Фотон в гравитационном поле.

◆ Вернемся к уравнению эйконала, рассмотренному на предыдущей лекции

$$\left(\nabla\psi\right)^2 = n^2. \tag{6}$$

Введем функцию $\psi_0\left(\boldsymbol{r},t\right) = -\omega t + \omega\psi\left(\boldsymbol{r}\right)/c$, играющую роль полной фазы волны $E = E_0 e^{i\psi_0}$, которую тоже называют эйконалом. Последняя функция удовлетворяет полному уравнению эйконала

$$\frac{\varepsilon\left(\boldsymbol{r},t\right)}{c^2}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\nabla\psi_0\right)^2 = 0, \tag{6a}$$

являющимся основным уравнением геометрической оптики, описывающим траекторию лучей в произвольных прозрачных средах, причем

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = -\omega;\ \nabla\psi_0 = \boldsymbol{k}. \tag{7}$$

Полное уравнение эйконала описывает не только изменение волнового вектора в неоднородных средах, но и изменение частоты монохроматической волны в нестационарных условиях. Запишем уравнение (6a) в вакууме $\left(\varepsilon \equiv 1\right)$ в симметричном виде относительно координат четырехмерного пространства-времени

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi_0}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{6b}$$

где $x_0 = ct;\ \left\{x_i\right\} = \boldsymbol{r}$. Теперь можно учесть влияние гравитационного поля на распространение электромагнитных волн. Как известно, свойства пространства-времени в присутствии гравитационного поля описывается четырехмерным метрическим тензором, определяющим величину интервала между бесконечно близкими точками

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{8}$$

✧ Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, “Курс теоретической физики”; т.2 “Теория поля”, М.:Наука, 1988.

◆ В частности, это означает, что интервал времени определяется соотношением

$$cdt = \sqrt{g_{00}}dx^0 , \qquad (9)$$

а частота монохроматической волны меняется в соответствии с выражением

$$\omega = \frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \frac{\partial\psi_0}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} . \qquad (10)$$

В галилеевой системе координат метрический тензор имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

А в присутствии силы тяжести в нерелятивистском пределе нулевая компонента тензора равна

$$g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2 , \qquad (12)$$

где φ - потенциал гравитационного поля. Поэтому в случае слабого стационарного гравитационного поля получаем соотношение

$$\omega = \left(1 + \Delta\varphi/c^2\right)\omega_0 , \qquad (13)$$

которое описывает красное смещение света, излученного звездой.

◆ Рассмотрим теперь луч света, распространяющийся в волноводе, направленном вертикально вверх в гравитационном поле Земли. Согласно (13) по мере удаления от поверхности Земли его частота будет уменьшаться. Однако в волноводе не может распространяться волна с частотой, меньшей критической. Поэтому при достижении некоей максимальной высоты частота волны достигнет ω^*, а скорость - нуля. После этого волна поменяет направление распространения на обратное. Таким образом, фотон в волноводе ведет себя аналогично телу, имеющему ненулевую массу, которое падает вниз через некоторое время после того, как его подбросили вверх. Действительно, вблизи критической частоты волновой вектор волны в волноводе $k \ll \acute{\Gamma}$ и закон дисперсии можно записать в виде

$$\omega = c\sqrt{\acute{\Gamma}^2 + k^2} \approx c\acute{\Gamma} + \frac{ck^2}{2\acute{\Gamma}} . \qquad (14)$$

Учитывая, что энергия фотона $E = \hbar\omega$, а импульс $p = \hbar k$, получаем

$$E = const + \frac{p^2}{2m_{eff}} , \qquad (15)$$

то есть связь энергии и импульса, характерную для тела с ненулевой эффективной массой $m_{eff} = \acute{\Gamma}\hbar/c$. Конечно, экспериментальная реализация описанной ситуации невозможна по причинам, близким к принципиальным: для волновода размерами порядка миллиметра эффективная масса фотона оказывается порядка 10^{-38} г.

✧ Л.А.Ривлин, “Фотоны ненулевой массы: от волнового уравнения к уравнению Шредингера”, Квантовая электроника, **20**, 919, (1993)

§ 03 Уравнение Френеля

◆ Перейдем к рассмотрению электромагнитных волн в средах, для которых принципиален тензорный характер диэлектрической проницаемости:

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j , \tag{16}$$

то есть векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ оказываются непараллельны. В этих условиях $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{kE}) \neq 0$ и вместо уравнения Гельмгольца получается более сложное уравнение

$$\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0 . \tag{17}$$

Для плоской волны, все величины в которой имеют гармоническую пространственную зависимость $\exp(i\omega\boldsymbol{nr}/c)$, получаем три линейных однородных уравнения для трех компонент вектора $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{nE}) - \hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0 . \tag{18}$$

Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта

$$\det\left| n^2\delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij} \right| = 0 . \tag{19}$$

Это уравнение четвертой (но не шестой) степени относительно компонент показателя преломления по сути своей является законом дисперсии волн в анизотропных средах. Раскрывая детерминант в системе координат, связанной с главными осями тензора диэлектрической проницаемости, получаем основное уравнение кристаллоптики - уравнение Френеля

$$\begin{aligned} &n^2\left(\varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2\right) + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z = \\ &= \varepsilon_x n_x^2\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) + \varepsilon_y n_y^2\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right) + \varepsilon_z n_z^2\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Более простой вид уравнение Френеля имеет в системе координат, связанной с направлением волнового вектора. В этом случае $\boldsymbol{n} = n_z\boldsymbol{e}_z$ и $D_z = 0$. Поэтому одно из трех уравнений (18) выполняется автоматически, а остальные два принимают вид

$$n^{-2}\boldsymbol{D} = \hat{\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{D} , \tag{18a}$$

где $\hat{\varepsilon}^{-1}$ - тензор, обратный тензору диэлектрической проницаемости. Для каждого направления волнового вектора условие совместности

$$\det\left| n^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right| = 0 \tag{19a}$$

дает два значения модуля $\boldsymbol{n}$. Соответствующие этим двум значениям показателя преломления векторы $\boldsymbol{D}$ определяют направления электрической индукции в двух ортогонально поляризованных волнах.

◆ Уравнение Френеля (20) определяет поверхность волновых векторов, связывающую направление волнового вектора с его модулем. Касательная плоскость к этой поверхности определяется нормальным к ней вектором $\partial \boldsymbol{n}/\partial\omega$, сонаправленным с вектором групповой скорости $\boldsymbol{V}_g = \partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$. Для обозначения этого направления обычно вводят лучевой вектор $\boldsymbol{s}$, модуль которого определяется соотношением $(\boldsymbol{ns})=1$. Варьируя уравнения Максвелла $\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{nE}]$; $\boldsymbol{D}=-[\boldsymbol{nH}]$, получаем

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{D} &= [\delta\boldsymbol{Hn}]+[\boldsymbol{H}\delta\boldsymbol{n}]; \\ \delta\boldsymbol{H} &= [\boldsymbol{n}\delta\boldsymbol{E}]+[\delta\boldsymbol{nE}], \end{aligned} \tag{21}$$

где при постоянной частоте вектор $\delta\boldsymbol{n}$, очевидно, лежит в касательной плоскости. Умножая первое равенство на $\boldsymbol{E}$, а второе - на $\boldsymbol{H}$, и учитывая, что $\boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{E}=\varepsilon_{ij}E_i\delta E_j=\boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{D}$, получаем, что

$$[\boldsymbol{EH}]\delta\boldsymbol{n}=0, \tag{22}$$

то есть вектора $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны лучевому вектору и лежат в касательной плоскости.

§ 04 Одноосные кристаллы

◆ Все кристаллы можно разделить на три категории по типу анизотропии. В кристаллах с кубической симметрией все три главных значения тензора диэлектрической проницаемости равны, поэтому свойства света в таких кристаллах принципиально не отличаются от свойств света в изотропных средах. В одноосных кристаллах одна из главных осей тензора ε_{ij} совпадает с осью симметрии кристалла, которую называют оптической осью. Главные значения тензора вдоль других двух осей совпадают, поэтому уравнение Френеля принимает вид

$$\left(n^2-\varepsilon_\perp\right)\left\{\varepsilon_\parallel n_z^2+\varepsilon_\perp\left(n^2-n_z^2\right)-\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel\right\}=0, \tag{23}$$

то есть поверхность волновых векторов распадается на сферу и эллипсоид. Положительным кристаллом называют одноосный кристалл, для которого сфера лежит внутри эллипсоида. Сфера соответствует обыкновенным волнам, показатель преломления которых в любом направлении равен $\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Показатель преломления необыкновенных волн определяется уравнением эллипсоида

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_\perp}+\frac{n_x^2+n_y^2}{\varepsilon_\parallel}=1. \tag{24}$$

Находя уравнение касательной плоскости к этой поверхности, легко определить, что лучевой вектор, определяющий направление распространения необыкновенной волны, лежит в той же плоскости, проходящей через оптическую ось, что и волновой вектор, а их углы наклона к оптической оси связаны соотношением

$$\varepsilon_{\parallel} \operatorname{tg}\theta_s = \varepsilon_{\perp} \operatorname{tg}\theta_n . \qquad (25)$$

◆ При падении луча света на одноосный кристалл закон его преломления попрежнему определяется равенством тангенциальных компонент волнового вектора. Однако при этом волна в кристалле распадается на обыкновенную и необыкновенную, направление распространения необыкновенной волны может лежать вне плоскости падения.

§ 05 Двуосные кристаллы

◆ В двуосных кристаллах все три главных значения тензора диэлектрической проницаемости различны. Сечение поверхности волновых векторов любой координатной плоскостью состоит из эллипса и окружности, например, для плоскости (xy):

$$\left(n^2 - \varepsilon_z\right)\left(\varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y\right) = 0 . \qquad (26)$$

При этом в двух плоскостях они не пересекаются, а в третьей - пересекаются в четырех точках, которые определяют направления двух оптических осей или бинормалей, являющихся единственными направлениями в кристалле, в которых волновой вектор имеет только одно значение. Следует отметить, что лучевой вектор при этом не сонаправлен с волновым вектором. Для него может быть записано уравнение лучевой поверхности, аналогичное уравнению Френеля, из которого следует существование двух других направлений, в которых лучевой вектор имеет лишь одно значение, называющихся бирадиалями.

◆ Лучевой вектор волны, волновой вектор которой направлен вдоль бинормали, может иметь бесконечное множество направлений, заполняющих определенную коническую поверхность. Это явление (и аналогичное для бирадиалей) носит название внутренней (и, соответственно, внешней) конической рефракции.

☯