

## W11-12 ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

### § 01 Электромагнитные волны в нелинейных средах

◆ Под нелинейностью среды в применении к электромагнитным волнам в большинстве случаев подразумевают нелинейную зависимость  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ . Записывая электрическую индукцию  $\mathbf{D}$  в виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_{NL}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{P}_{NL}$  - часть поляризации, содержащая только нелинейные члены, и подставляя ее в волновое уравнение (W09.3), получаем волновое уравнение

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

или, в  $(\omega, \mathbf{r})$ -представлении,

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}_{NL}. \quad (2a)$$

Подставляя напряженность поля в приближении медленно меняющейся амплитуды  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  и пренебрегая второй производной амплитуды, получаем

$$2i(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{E}_0 = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}_{NL}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2б)$$

◆ В интересующих нас нелинейнооптических эффектах амплитуда поля электромагнитной волны на несколько порядков меньше внутриатомного электрического поля, что позволяет учитывать только несколько первых членов разложения в ряд зависимости нелинейной поляризации от электрического поля  $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{E})$ , которая в спектральном представлении будет иметь вид

$$\mathbf{P}_{NL}(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \sum_{\omega_1 + \dots + \omega_k = \omega} \hat{\chi}^{(k)}(\omega_1, \dots, \omega_k) \mathbf{E}(\omega_1, \mathbf{r}) \dots \mathbf{E}(\omega_k, \mathbf{r}) \right], \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}(-\omega) \equiv \mathbf{E}^*(\omega)$ , а тензор  $\hat{\chi}^{(k)}$  - восприимчивость  $k$ -го порядка. Отсюда легко видеть, что нелинейность среды приводит к возникновению электромагнитного поля на суммарных (или разностных) частотах. Ниже мы рассмотрим несколько конкретных случаев проявления нелинейности среды. Как уже отмечалось ранее, скорости распространения электромагнитных волн в среде сильно зависят от их частоты, поэтому эффективное взаимодействие возможно лишь между небольшим числом спектральных компонент, скорости которых оказались достаточно близки друг к другу. Влиянием всех прочих гармоник при этом можно пренебречь.

## § 02 Генерация второй гармоники

◆ Первым членом разложения нелинейной поляризации по степеням поля является квадратичная нелинейность, определяющаяся квадратичной восприимчивостью  $\widehat{\chi}^{(2)}$ . Рассмотрим генерацию второй гармоники за счет сложения двух одинаковых частот, приводящую к появлению электромагнитной волны на удвоенной частоте, в случае, когда направления распространения двух волн, а также их поляризации совпадают. В этом случае достаточно рассмотреть одномерный случай. Подставляя в волновое уравнение электрическое поле в виде суммы двух мод с медленно меняющимися амплитудами

$$E(\omega, z) = E_1(z)e^{ik_1z}\delta(\omega - \omega_0) + E_2(z)e^{ik_2z}\delta(\omega - 2\omega_0), \quad (4)$$

где  $k_i = \omega_i n(\omega_i)/c$ , получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = 2\pi i \frac{\omega_0}{cn(\omega_0)} \chi^{(2)}(\omega_0) E_2 E_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dE_2}{dz} = 2\pi i \frac{2\omega_0}{cn(2\omega_0)} \chi^{(2)}(2\omega_0) E_1^2 e^{i\Delta kz} \end{cases} \quad (5)$$

В каждое из полученных уравнений входит фазовый множитель, определяющийся расстройкой волновых векторов  $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 2\omega_0 \{n(2\omega_0) - n(\omega_0)\}/c$ .

Почти очевидно, что эффективный энергообмен между двумя модами возможен только при условии  $l\Delta k \ll 1$ , где  $l$  - длина их взаимодействия. Условие  $\Delta k = 0$  называют условием фазового (или пространственного) синхронизма. Для его выполнения в кристаллах практически всегда приходится использовать неколлинеарный синхронизм или разные поляризации взаимодействующих волн и учитывать тензорный характер квадратичной восприимчивости. Однако конечная система уравнений будет иметь практически тот же вид

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = i\eta E_2 E_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dE_2}{dz} = i\eta E_1^2 e^{i\Delta kz} \end{cases}, \quad (5a)$$

где учтено, что в нашем случае  $2\chi^{(2)}(2\omega) = \chi^{(2)}(\omega)$ .

◆ Очевидно, полученная система имеет интеграл движения

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = I = \text{const}, \quad (6)$$

выражающий закон сохранения энергии. Введем безразмерные координату и расстройку  $\xi = \eta\sqrt{I}z$ ,  $\Delta = \Delta k/\eta\sqrt{I}$  и перейдем от комплексных переменных к действительным:  $E_i = \sqrt{I}a_i e^{i\varphi_i}$ . Система (5a) при этом преобразуется к безразмерному виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_1}{d\xi} = -a_1 a_2 \sin \psi \\ \frac{da_2}{d\xi} = a_1^2 \sin \psi \\ \frac{d\psi}{d\xi} = -\Delta - \frac{1}{a_2} (2a_2^2 - a_1^2) \cos \psi, \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 - \Delta kz$ . Можно проверить, что данная система имеет еще один интеграл движения

$$a_1^2 (2a_2 \cos \psi + \Delta) = \text{const}. \quad (8)$$

С помощью двух полученных законов сохранения точное решение этой системы может быть выражено через эллиптические интегралы. Для простоты мы рассмотрим два частных случая. Пусть на входе в кристалл есть только основная гармоника, то есть  $a_2(0) = 0$ . Тогда на не очень больших расстояниях можно считать  $a_2 \ll a_1$  и использовать *приближение заданной накачки*  $E_1 = \text{const}$ . Интегрируя второе уравнение (5а), немедленно получаем

$$E_2(z) = \frac{\eta E_1^2}{\Delta k} (e^{i\Delta kz} - 1) = \frac{2i\eta E_1^2}{\Delta k} e^{i\Delta kz/2} \sin \frac{\Delta kz}{2}; \quad a_2(\xi) = \frac{2}{\Delta} \sin \frac{\Delta \xi}{2}, \quad (9)$$

то есть интенсивность второй гармоники осциллирует около нуля с пространственной частотой  $\Delta k$  и амплитудой, в  $\Delta^{-2}$  раз меньшей интенсивности основной частоты. Это решение можно уточнить: дифференцируя второе уравнение (5а) и подставляя в него первое, получаем

$$\frac{d^2 E_2}{dz^2} - i\Delta k \frac{dE_2}{dz} + 2\eta^2 I_1 E_2 = 0. \quad (5б)$$

В *приближении заданной интенсивности* (но не фазы!)  $I_1 = \text{const}$  это уравнение имеет решение

$$E_2(z) = \frac{i\eta E_1^2}{q} e^{i\Delta kz/2} \sin qz; \quad q = \frac{\Delta k}{2} \sqrt{1 + \frac{8\eta^2 I_1}{\Delta k^2}}. \quad (9а)$$

Легко видеть, что приближения заданной накачки или интенсивности неприменимы при нарушении неравенства  $\Delta \gg 1$ , т.е. при достаточно малой величине фазовой расстройки  $\Delta k$ . Это позволяет рассмотреть в качестве противоположного предельного случая ситуацию точного фазового синхронизма  $\Delta k = 0$ . В этом случае без ограничения общности можно считать  $\psi \equiv \pi/2$ , после чего последнее уравнение (7) удовлетворяется автоматически, а остальные два сводятся к единственному уравнению  $a_2' = 1 - a_2^2$ , решение которого имеет вид

$$a_2 = \text{th } \xi, \quad a_1 = 1/\text{ch } \xi. \quad (10)$$

Таким образом, в случае точного выполнения условия фазового синхронизма вся энергия может быть перекачана во вторую гармонику. На рис. W11.А показаны зависимости интенсивностей второй гармоники в случаях точно выполненного и сильно нарушенного условий фазового синхронизма.

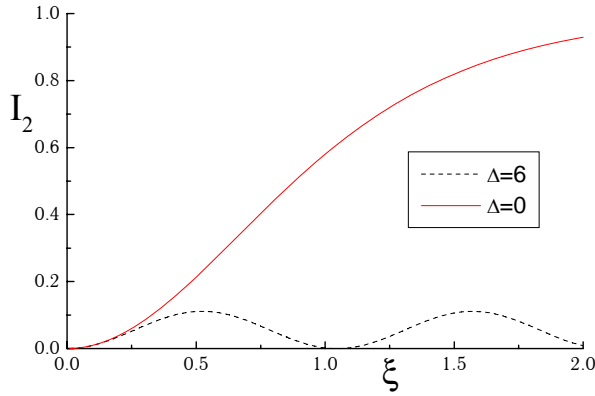


Рис. W11.A.

Зависимость интенсивности второй гармоники в случае точно выполненного и сильно нарушенного условий фазового синхронизма.

### § 03 Самовоздействие и четырехволновое смешение

◆ Следующая, кубическая, нелинейность среды обычно на несколько порядков меньше квадратичной. Однако учет эффектов, связанных с нелинейностью третьего порядка, необходим, по меньшей мере, по двум причинам. Первая из них заключается в том, что за счет четных нелинейностей волна не может влиять на саму себя, тогда как за счет нечетных - может.

◆ Подставляя в уравнение (2а) поле в виде одной моды электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , с медленно меняющейся амплитудой  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{n}E_0(z, \rho)e^{ikz}\delta(\omega - \omega_0)$ , где  $\rho$  - вектор в плоскости  $xu$ , и нелинейную поляризацию в виде  $\mathbf{P}_{NL}(\omega) = \hat{\chi}^{(3)}\mathbf{E}(\omega)|\mathbf{E}(\omega)|^2$ , и пренебрегая второй производной амплитуды поля по  $z$ , получаем нелинейное параболическое уравнение, оно же НУШ:

$$2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + \Delta_{\perp} E_0 + \eta E_0 |E_0|^2 = 0, \quad (11)$$

где  $\eta = 4\pi\omega^2 \chi^{(3)} / c^2$ . В зависимости от знака восприимчивости это уравнение описывает самофокусировку или самодефокусировку волнового пучка. Необходимо отметить, что в отличие от генерации второй гармоники, в этом случае условие фазового синхронизма выполняется автоматически. Аналогичным уравнением может быть описана самокомпрессия коротких импульсов под действием кубической нелинейности вещества. Свойства нелинейного уравнения Шредингера были рассмотрены нами ранее, в лекции W03.

◆ Второй причиной необходимости учета нелинейности третьего порядка является то, что в центросимметричных средах квадратичная восприимчивость в силу симметричных соображений обязана быть равной нулю. Таким образом, кубическая нелинейность оказывается низшим членом в разложении нелинейной поляризации по степеням поля. Рассмотрим взаимодействие четырех мод поля за счет восприимчивости третьего порядка.

◆ Для простоты будем рассматривать взаимодействие четырех мод поля, имеющих одинаковые частоты, но различающихся направлениями. В этом случае процесс взаимодействия может описан следующим образом: интерферен-

ционная картина от двух волн за счет кубической нелинейности приводит к возникновению в среде динамической объемной дифракционной решетки, а при дифракции третьей волны на ней возникает четвертая. Условие фазового синхронизма, эквивалентное в этом случае брэгговскому условию дифракции, выполняется автоматически, если волны направлены попарно навстречу друг другу (рис.W11.B).

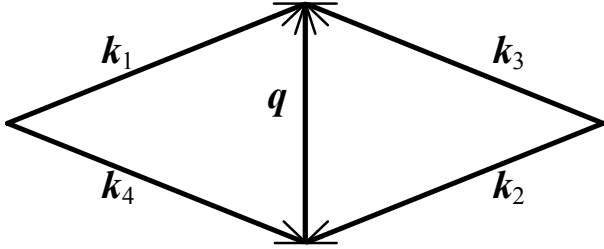


Рис.W11.B. Выполнение фазового синхронизма при четырехволновом смешении.

◆ Пусть на кристалл с противоположных сторон падают два сильных пучка накачки  $E_1$  и  $E_2$ , а также сигнальный пучок света  $E_4$ . Подобная схема часто используется для так называемого обращения волнового фронта, при котором волновой фронт волны  $E_3$ , рождающейся в кристалле, будет совпадать с обращенным волновым фронтом волны  $E_4$ . Если тензор кубической восприимчивости устроен таким образом, что наибольшую амплитуду имеет дифракционная решетка, соответствующая интерференции волн  $E_1$  и  $E_4$ , то нелинейную поляризацию можно записать в виде

$$P_{NL}(\mathbf{r}) = \left( G e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + G^* e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right) E(\mathbf{r}), \quad (12)$$

где  $G(\mathbf{r}) = \eta E_1 E_4^* + \eta^* E_2^* E_3$  - амплитуда дифракционной решетки,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2$  - ее волновой вектор, а  $\eta$  - коэффициент, в который входит компонента тензора кубической восприимчивости. Подставляя поляризацию в волновое уравнение (2) и выделяя части, соответствующие разным модам поля, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = iGE_4; & \frac{dE_2}{dz} = iG^*E_3; \\ \frac{dE_3}{dz} = iGE_2; & \frac{dE_4}{dz} = iG^*E_1. \end{cases} \quad (13)$$

Легко проверить, что полученная система имеет четыре интеграла движения

$$\begin{cases} |E_1|^2 + |E_4|^2 = J_1; & |E_2|^2 + |E_3|^2 = J_2; \\ E_1 E_2 - E_3 E_4 = C_1; & E_1 E_3^* + E_2^* E_4 = C_2, \end{cases} \quad (14)$$

где первые два играют роль законов сохранения энергии, а четыре константы удовлетворяют соотношению  $|C_1|^2 + |C_2|^2 = J_1 J_2$ . Эти условия позволяют сократить число неизвестных переменных: например, из третьего и четвертого уравнений (13) получаем

$$\begin{cases} \frac{dE_3}{dz} = i \left\{ \eta^* J_2 E_3 + \eta C_1 E_4^* - \left( \eta^* |E_3|^2 - \eta |E_4|^2 \right) E_3 \right\} \\ \frac{dE_4^*}{dz} = -i \left\{ \eta^* C_1^* E_3 + \eta J_1 E_4^* + \left( \eta^* |E_3|^2 - \eta |E_4|^2 \right) E_4^* \right\} \end{cases} \quad (15)$$

Исключая из них член  $\left( \eta^* |E_3|^2 - \eta |E_4|^2 \right)$ , получаем уравнение относительно переменной  $r = E_4 / E_3^*$ :

$$\frac{dr}{dz} = i \left\{ \eta^* C_1^* r^2 + \left( \eta^* J_1 + \eta J_2 \right) r + \eta C_1 \right\}, \quad (16)$$

которое в случае действительного  $\eta$  тривиально интегрируется:

$$r(z) = \left\{ -I_0 + i\sqrt{D} \operatorname{ctg}(\sqrt{D}\eta z/2) \right\} / C_1^*, \quad (17)$$

где  $I_0 = J_1 + J_2$  и  $D = I_0^2 - 4|C_1|^2$ . Из полученного решения следует, что  $r(0) = \infty$ , что соответствует граничному условию  $E_3(0) = 0$ . В этом случае значение  $r(l)$  на выходе из кристалла будет определять коэффициент преобразования при обращении волнового фронта

$$R = \left| \frac{E_3(l)}{E_4(l)} \right|^2 = |r(l)|^{-2} = \frac{4|C_1|^2 \sin^2(\sqrt{D}\eta l/2)}{D + 4|C_1|^2 \sin^2(\sqrt{D}\eta l/2)}. \quad (18)$$

При условии  $D \ll 4|C_1|^2$  на длинах кристалла  $\sqrt{D}\eta l = (2n+1)\pi$  коэффициент преобразования может практически достигать единицы.

#### § 04 Фоторефрактивные среды

◆ Рассмотрим взаимодействие двух разнонаправленных мод поля одинаковой частоты в условиях, аналогичных только что рассмотренным, однако с учетом инерционности дифракционной решетки, создаваемой двумя пучками света в среде. Учет запаздывания реакции среды имеет смысл в случае предельно коротких световых импульсов, а также в случае так называемых фоторефрактивных сред, в которых изменения показателя преломления под действием света происходят крайне медленно (к примеру, характерное время записи решетки в кристалле ниобате лития, легированном атомами железа или меди, может составлять несколько часов). В этом случае укороченные уравнения, описывающие медленно меняющиеся амплитуды мод поля, будут такими же, как и в (13), однако они должны быть дополнены уравнением, описывающим медленное изменение амплитуды дифракционной решетки  $G$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial z} = iGE_2; & \frac{\partial E_2}{\partial z} = iG^*E_1; \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \sigma G = i\eta E_1 E_2^*. \end{cases} \quad (19)$$

Перейдем к действительным переменным  $E_j = a_j e^{i\varphi_j}$  и  $G = g e^{i\gamma}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial z} + ia_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = iga_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma)}; \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} + ia_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = iga_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma)}; \\ \frac{\partial g}{\partial t} + ig \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \sigma g = i\eta a_1 a_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma)}. \end{cases} \quad (20)$$

При условии  $\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma = \pi/2$  все фазы остаются неизменными. В этом случае полученная система оказывается полностью действительной:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial z} = -ga_2; \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = ga_1; \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \sigma g = \eta a_1 a_2. \end{cases} \quad (21)$$

Легко видеть, что суммарная энергия двух пучков света  $a_1^2 + a_2^2 = I$  постоянна. Этот закон сохранения будет выполняться автоматически, если сделать замену переменных  $a_1 = \sqrt{I} \cos \alpha$ ;  $a_2 = \sqrt{I} \sin \alpha$ . Используя эту замену, легко свести систему к единственному волновому уравнению относительно  $\beta = 2\alpha$

$$\beta_{zt} + \sigma \beta_z = \eta I \sin \beta, \quad (22)$$

имеющему вид уравнения синус-Гордона с диссипативным членом.

### § 05 Система Максвелла-Блоха

◆ До сих пор мы описывали отклик нелинейной среды при помощи феноменологических нелинейных восприимчивостей. Однако если интенсивное электромагнитное поле попадает в резонанс с каким-то переходом в среде, такого описания становится недостаточно – разложение в ряд по степеням поля становится некорректным. Будем рассматривать среду как множество квантовых двухуровневых систем, с которыми взаимодействует световая волна. Состояние двухуровневой системы описывается волновой функцией

$$|\psi(r, t)\rangle = a(r, t)|\varphi_1(r)\rangle + b(r, t)|\varphi_2(r)\rangle, \quad (23)$$

где  $|\varphi_i(r)\rangle$  - собственные волновые функции невозмущенного гамильтониана  $\hat{H}_0$ . Полный гамильтониан имеет вид  $\hat{H} = \hat{H}_0 + E\hat{d}$ , где  $E$  - напряженность электромагнитного поля, а  $\hat{d}$  - оператор дипольного момента. Учитывая, что для дипольного момента отличны от нуля только перекрестные матричные элементы  $\langle \varphi_1 | \hat{d} | \varphi_2 \rangle \equiv d$ , из уравнения Шредингера получаем уравнения для коэффициентов разложения волновой функции

$$\begin{cases} ia_t = \omega_1 a + \Omega b \\ ib_t = \Omega a + \omega_2 b \end{cases} \quad (24)$$

где  $\hbar\omega_i$  - собственные энергии двух уровней, а  $\Omega = dE/\hbar$  - частота Раби. Учитывая, что суммарная населенность двух уровней остается постоянной, это три уравнения относительно трех действительных неизвестных. В качестве таких переменных обычно выбирают переменные Блоха:  $P = ab^* + a^*b$ ;  $Q = i(ab^* - a^*b)$ ;  $R = |b|^2 - |a|^2$ . Система (24) тогда принимает следующий вид:

$$\begin{cases} P_t = \omega Q; R_t = 2\Omega Q; \\ Q_t = -\omega P + 2\Omega R \end{cases} \quad (25)$$

где  $\omega = \omega_2 - \omega_1$  - частота перехода. Это система уравнений носит название уравнений Максвелла-Блоха.

◆ Поляризация среды  $P = n\langle \hat{d} \rangle = ndP$  в свою очередь входит в волновое уравнение для электромагнитной волны

$$E_{tt} - c^2 E_{xx} = -4\pi P_{tt} = -4\pi ndP_{tt}. \quad (26)$$

Здесь  $n$  - концентрация атомов в среде. Вместе с системой Максвелла-Блоха, это уравнение составляет нелинейную систему, описывающую взаимодействие множества двухуровневых систем с электромагнитной волной:

$$\begin{cases} P_{tt} + \omega^2 P = 2d\omega ER/\hbar \\ R_t = 2dEP_t/\hbar\omega \\ E_{tt} - c^2 E_{xx} = 4\pi nd(\omega^2 P - 2d\omega ER/\hbar) \end{cases} \quad (27)$$

Напряженность поля и поляризация осциллируют с частотой перехода  $\omega$ , а вот разность населенностей уровней  $R$  меняется значительно медленнее. Поэтому удобно перейти к медленно меняющимся амплитудам

$$\begin{cases} E(x,t) = f(x,t)\cos(\omega t - kx) \\ P(x,t) = u(x,t)\cos(\omega t - kx) - v(x,t)\sin(\omega t - kx) \\ R(x,t) = r(x,t) \end{cases} \quad (28)$$

и подставив их в уравнения (27), пренебречь высшими производными:

$$\begin{cases} f_t + cf_x = 2\pi nd\omega v \\ v_t = -dfv/\hbar \\ r_t = dfv/\hbar \end{cases} \quad (29)$$

В первом уравнении можно перейти к бегущей переменной  $z = t + x/c$ , а из двух других уравнений видно, что  $v^2 + r^2 = const$ . Используя подстановку  $v = g \sin \varphi$ ,  $r = g \cos \varphi$ , получаем уравнение синус-Гордона

$$\varphi_{zt} + G \sin \varphi = 0, \quad (30)$$

где  $G = 2\pi nd^2 \omega g/\hbar$ . Как мы знаем, это уравнение имеет солитонное решение в форме кинка, а амплитуда электромагнитной волны  $f = -\hbar\varphi_t/d$  будет иметь форму колокола. Импульс электромагнитного поля такой формы распространя-



ется по нелинейной среде без затухания, т.е. полученные нами уравнения описывают эффект самоиндуцированной прозрачности.

### § 06 Уравнения Гинзбурга-Ландау

◆ Вернемся к нелинейному уравнению Шредингера (11) и перепишем его с дополнительным линейным членом и немного другими коэффициентами:

$$i\hbar\psi_t = \frac{\hbar^2}{4m}\Delta\psi - a\psi - b\psi|\psi|^2. \quad (31)$$

В таком виде оно имеет вид феноменологического уравнения, описывающего релаксацию системы к конфигурации, обеспечивающей минимум эффективного гамильтониана

$$H_{eff} = \int \left\{ \frac{\hbar^2}{4m}|\nabla\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right\} d^3r. \quad (32)$$

Такой гамильтониан используют для описания системы, в которой при  $a = 0$  происходит фазовый переход: при  $a > 0$  минимальной энергией обладает состояние с  $\psi \equiv 0$ , а при  $a < 0$  - любое состояние с  $|\psi|^2 = -a/b$ . В частности, так можно описывать фазовый переход в сверхпроводящее состояние, где  $\psi$  играет роль волновой функции сверхпроводящего бозе-эйнштейновского конденсата. Однако в этом случае необходимо учесть в гамильтониане энергию магнитного поля. В частности, градиент волновой функции необходимо заменить выражением

$$\nabla\psi \Rightarrow \nabla\psi - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\psi, \quad (33)$$

где  $\mathbf{A}$  - векторный потенциал. В результате получаем эффективный гамильтониан в виде

$$H_{eff} = \int \left\{ \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \left( \nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right\} d^3r. \quad (34)$$

Равновесное распределение волновой функции и магнитного поля в сверхпроводнике теперь определяется условием его минимальности. Варьируя (34) по  $\psi$  и по  $\mathbf{A}$ , получаем уравнения

$$\begin{cases} \frac{1}{4m} \left( i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + a\psi + b\psi|\psi|^2 = 0, \\ \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left\{ -\frac{ie\hbar}{2m} (\psi^*\nabla\psi - \text{к.с.}) - \frac{e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A} \right\}, \end{cases} \quad (35)$$

где выражение в фигурных скобках играет роль плотности сверхпроводящего тока. Эта система уравнений носит название уравнений Гинзбурга-Ландау.

◆ В частности, в случае слабого магнитного поля можно пренебречь его влиянием на плотность сверхпроводящих электронов  $n \equiv |\psi|^2$  и считать ее постоянной внутри сверхпроводника. Тогда, применяя операцию ротора ко второму уравнению (35), получаем

$$\Delta \mathbf{B} = \delta^{-2} \mathbf{B}, \quad (36)$$

где  $\delta^2 = mc^2/4\pi e^2 n$ . Отсюда следует эффект Мейсснера: магнитное поле затухает в сверхпроводнике на расстояниях порядка  $\delta$ .

