

## W09 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ПОЛЯРИТОНЫ.

Перейдем к рассмотрению особенностей электромагнитных волн в различных средах. Всем известные уравнения Максвелла будем использовать в виде

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \end{cases} \quad (1)$$

дополнив их материальными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\hat{\chi}) \mathbf{E} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \hat{\mu}\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2)$$

где восприимчивость  $\hat{\chi}$  и диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$  в общем случае - операторы. Для простоты ограничимся ситуациями, в которых можно считать магнитную проницаемость тождественно равной единице, а операторы восприимчивости и диэлектрической проницаемости - локальными, что означает, что поляризация  $\mathbf{P}$  и электрическая индукция  $\mathbf{D}$  зависят от значений электрического поля  $\mathbf{E}$  только в той же точке пространства. Кроме того, очевидно, мы считаем плотность свободных зарядов равной нулю.

### § 01 Поляритоны.

◆ В случае однородной среды, диэлектрическая проницаемость которой не зависит от координаты, применяя оператор ротора ко второму из уравнений Максвелла, легко получаем волновое уравнение

$$c^2 \Delta \mathbf{E} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = 0, \quad (3)$$

Свойства волн, описываемых уравнением (3), зависят в первую очередь от свойств оператора диэлектрической проницаемости, зависящего от свойств среды.

◆ Рассмотрим, например, взаимодействие электромагнитной волны с механическими колебаниями кристаллической решетки (или, как их еще называют, фононами). При этом ограничимся зависимостью волн только от одной пространственной координаты. Как мы уже знаем, в цепочках неодинаковых частиц возникают несколько мод колебаний. Дипольно-активными, то есть взаимодействующими с электромагнитными колебаниями, оказываются те моды, которые были названы оптическими (собственно, с этим и связано их название). На оптических длинах волн частоты оптических мод механических колебаний решетки  $\omega_0$  обычно практически не зависят от волнового вектора. Поэтому поведение поляризации среды, пропорциональной дипольному моменту, то есть амплитуде колебаний атомов в цепочке, возникающих при возбуждении элек-

трическим полем одной из оптических фононных мод, можно описывать в каждой точке уравнением гармонического осциллятора с вынуждающей силой

$$P_{tt} + \omega_0^2 P = \frac{\sigma}{4\pi} E, \quad (4)$$

где  $\sigma$  - некий коэффициент пропорциональности. С другой стороны, разделяя в (3) электрическую индукцию  $D$  на электрическое поле и поляризацию, можно записать волновое уравнение в виде

$$c^2 E_{xx} - E_{tt} = 4\pi P_{tt}. \quad (5)$$

Для нахождения дисперсионных соотношений электромагнитных волн в среде подставим в полученные уравнения решение в виде гармонической бегущей волны и получим систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) P_0 = \frac{\sigma}{4\pi} E_0 \\ (k^2 c^2 - \omega^2) E_0 = 4\pi \omega^2 P_0. \end{cases} \quad (6)$$

Условие их совместности имеет вид

$$(k^2 c^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) = \sigma \omega^2, \quad (7)$$

откуда легко находим закон дисперсии

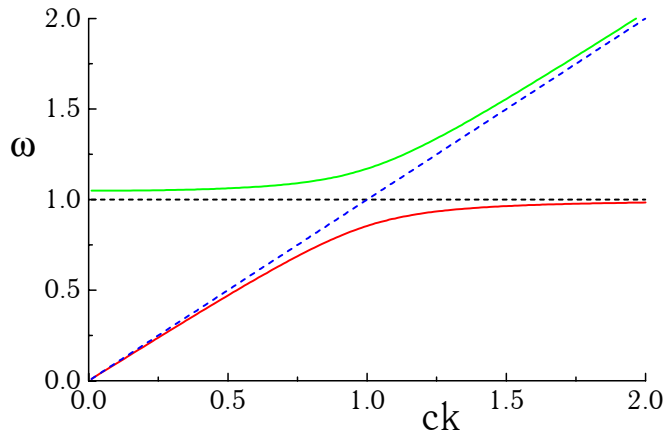
$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left( \omega_l^2 + c^2 k^2 \pm \sqrt{(\omega_l^2 + c^2 k^2)^2 - 4\omega_0^2 c^2 k^2} \right), \quad (8)$$

где  $\omega_l^2 = \omega_0^2 + \sigma$ . В результате законы дисперсии взаимодействующих фотона и фонона преобразуются в две ветви так называемых поляритонных дисперсионных соотношений, которые соответствуют собственным модам электромагнитно-механических волн в этой среде. Характерный вид дисперсионных кривых типа “бутылочное горло” (см. рис.W09.A) возникает при взаимодействии любых двух волновых процессов с пересекающимися дисперсионными кривыми. При этом колебания с частотами в диапазоне между  $\omega_0$  и  $\omega_l$  оказываются затухающими. Следует уточнить, что полученный нами закон дисперсии соответствует так называемым фонон-поляритонам в диэлектриках. В металлах возможно существование плазмон-поляритонов, имеющих немного иную природу, хотя и сходные свойства.

Рис.W09.A.

Дисперсионные кривые оптической моды механических колебаний кристалла, электромагнитных волн в вакууме и поляритонных ветвей (8), образованных их взаимодействием.

$\sigma=0.1$ ;  $\omega_0^2 = 1$ .



## § 02 Монохроматические электромагнитные волны

◆ Диэлектрическая проницаемость среды, рассмотренной в предыдущем параграфе, имеет вид интегрального оператора, связывающего значение  $\mathbf{D}$  со значениями электрического поля во все предыдущие моменты времени

$$\mathbf{D}(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau. \quad (9)$$

Зато в частотном представлении эта связь имеет простой алгебраический вид

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (9a)$$

причем диэлектрическая проницаемость может состоять из действительной и мнимой частей:  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ . Как известно, вследствие принципа причинности действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости связаны интегральными соотношениями Крамерса-Кронига. Для монохроматической волны уравнения Максвелла в переменных  $\omega$ ,  $\mathbf{r}$  имеют вид

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1a)$$

Четвертое уравнение Максвелла в отсутствие магнитной восприимчивости выполняется автоматически.

◆ В однородной среде  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , и из оставшихся уравнений легко получить уравнение Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mathbf{E} = 0. \quad (10)$$

Подставляя в него  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , получаем дисперсионное соотношение, связывающее частоту и волновой вектор, в виде

$$c^2 \mathbf{k}^2 = \varepsilon(\omega) \omega^2 = (n(\omega) + i\kappa(\omega))^2 \omega^2, \quad (11)$$

где показатель преломления  $n$  и показатель поглощения  $\kappa$  очевидным образом связаны с действительной и мнимой компонентами диэлектрической проницаемости. Учитывая (7), легко получить, что диэлектрическая проницаемость среды при наличии фонона, т.е. оптической моды механических колебаний, имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = I + \frac{\sigma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12)$$

Необходимо отметить, что даже в случае прозрачной среды  $\varepsilon''(\omega) = \kappa(\omega) = 0$  волна может затухать, а волновой вектор - содержать мнимую часть, если его мнимая и действительная части перпендикулярны  $(\mathbf{k}'\mathbf{k}'') = 0$ . Примером такой волны может являться поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела двух сред в условиях полного внутреннего отражения.

◆ Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в неоднородных прозрачных средах  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r})$ . В случае плавных неоднородностей среды (то есть, если их пространственные масштабы много больше длины волны) в

приближении геометрической оптики можно считать, что все компоненты волнового поля имеют вид  $a = a_0(\mathbf{r}) \exp\left(i \frac{\omega}{c} \psi(\mathbf{r})\right)$ , где фаза  $\psi(\mathbf{r})$  меняется гораздо

быстрее амплитуды. Подставляя электрическое и магнитное поле в таком виде в уравнения Максвелла (1а) и пренебрегая производными амплитуд, получаем

$$[\mathbf{E} \nabla \psi] = \mathbf{H}, \quad [\mathbf{H} \nabla \psi] = -\varepsilon \mathbf{E}, \quad (13)$$

откуда легко получить уравнение для фазы  $\psi$ , которую называют эйконалом:

$$(\nabla \psi)^2 = n^2. \quad (14)$$

Произведенное преобразование по своей сути является переходом к пространственным Фурье-образам с медленно меняющимся волновым вектором  $c\mathbf{k} = \omega \nabla \psi$ , а уравнение эйконала - дисперсионным соотношением для электромагнитных волн в неоднородной среде. Для определения направления распространения волны введем единичный вектор  $\mathbf{l} = \nabla \psi / n$  и найдем производную  $\nabla \psi$  вдоль этого направления:

$$(\mathbf{l} \nabla) \nabla \psi = \frac{1}{n} (\nabla \psi \nabla) \nabla \psi = \frac{1}{n} \left\{ \nabla \left( \frac{\nabla \psi}{2} \right)^2 - [\nabla \psi \operatorname{rot} \nabla \psi] \right\} \equiv \nabla n \quad (15)$$

◆ Для случая плоскопараллельной среды  $n = n(z)$  из уравнения (15) следует  $(\mathbf{l} \nabla) \nabla_{\perp} \psi = 0$ , и, учитывая, что  $l_{\perp} = \sin \theta$ , получаем закон Снеллиуса

$$|\nabla_{\perp} \psi| = n \sin \theta = \text{const}. \quad (16)$$

справедливый как для плавных, так и для резких неоднородностей. Однако в случае прохождения электромагнитной волны через резкую границу двух сред помимо преломления лучей согласно закону Снеллиуса происходит возникновение отраженной волны. Рассмотрим граничные условия для электромагнитного поля на поверхности раздела двух сред, определяющие амплитуды прошедшей и отраженной волны.

### § 03 Формулы Френеля

◆ Законы отражения и преломления света следуют из условия одинаковой пространственной зависимости полей падающей, отраженной и преломленной волн на самой границе раздела двух сред, для выполнения которого необходимо равенство тангенциальных компонент волновых векторов этих трех волн. Для нахождения коэффициентов преобразования падающей волны в отраженную и преломленную необходимо записать граничные условия для электрического и магнитного поля на границе раздела двух сред, следующие из уравнений Максвелла (1). Интегрируя их в бесконечной малой области, прилегающей к границе, легко получить граничные условия

$$\begin{aligned} E_{\tau}^{(1)} &= E_{\tau}^{(2)}; \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)}; \\ H_{\tau}^{(1)} &= H_{\tau}^{(2)}; \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где индексы  $\tau$  и  $n$  обозначают тангенциальную и нормальную к поверхности компоненты поля, а цифры 1 и 2 - номер среды. Отсюда для соотношений амплитуд трех волн следуют соотношения

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2; \\ k_{1n}(E_0 - E_1) &= k_{2n}E_2 \end{aligned} \quad (18)$$

для электрического поля, перпендикулярного плоскости падения, и

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 &= H_2; \\ \varepsilon_2 k_{1n}(H_0 - H_1) &= \varepsilon_1 k_{2n}H_2 \end{aligned} \quad (19)$$

- в случае электрического поля, лежащего в плоскости падения.

◆ Из полученных соотношений (18,19) и закона Снеллиуса (16) получаем формулы Френеля для амплитуд отраженной и преломленной волн в первом:

$$\begin{aligned} E_1^\perp &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}} E_0^\perp; \\ E_2^\perp &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}} E_0^\perp; \end{aligned} \quad (20)$$

и во втором случаях:

$$\begin{aligned} H_1^\parallel &= \frac{\varepsilon_2 \cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1)}}{\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1)}} H_0^\parallel; \\ H_2^\parallel &= \frac{2\varepsilon_2 \cos \theta_1}{\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1)}} H_0^\parallel. \end{aligned} \quad (21)$$

В случае прозрачности обеих сред имеет смысл определить коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $T$  как отношение нормальных компонент отраженного и преломленного потоков энергии к падающему:

$$\begin{aligned} R_\perp &= \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_1)}; \\ R_\parallel &= \frac{\text{tg}^2(\theta_2 - \theta_1)}{\text{tg}^2(\theta_2 + \theta_1)}; \end{aligned} \quad (22)$$

$T = 1 - R$ . Как известно, угол падения, при котором  $\theta_2 + \theta_1 = \pi/2$ , называется углом Брюстера, при этом отраженный свет поляризован перпендикулярно к плоскости падения. А при условии  $n_2 < n_1$  угол падения, при котором  $\theta_2 = \pi/2$ , называется углом полного внутреннего отражения.

◆ В металлах на оптических частотах диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_m \gg 1$ . Это означает, что угол преломления практически равен нулю, т.е. можно считать, что волна в металле распространяется по нормали, а ее электрическое и магнитное поле лежат в плоскости поверхности. Учитывая связь между напря-

женностями электрического и магнитного поля в электромагнитной волне, получаем связь между тангенциальными компонентами электромагнитного поля рядом с поверхностью металла вне его:

$$\sqrt{\epsilon_m} E_\tau = [H_\tau n], \quad (23)$$

где  $n$  - вектор нормали к поверхности. Это приближенное граничное условие называется условием Леонтовича.

#### § 04 Электромагнитные волны в резонаторах.

◆ Граничное условие для напряженности электрического поля (23) на поверхности идеально проводящего металла  $\epsilon_m \rightarrow \infty$  принимает вид

$$E_\tau = 0. \quad (24)$$

Для нахождения поля электромагнитной волны в резонаторе, то есть в области пустого пространства, ограниченной со всех сторон идеально проводящими поверхностями, необходимо найти решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad (25)$$

удовлетворяющее также уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (26)$$

и граничному условию (24) (прочие граничные условия при этом выполняются автоматически). Это решение для резонатора произвольной формы представляет собой суперпозицию набора стоячих волн, частоты которых определяются дискретным спектром собственных волновых векторов резонатора. Например, для прямоугольного резонатора со сторонами  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  решение уравнений (24-26) имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z; \\ E_y &= A_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z; \\ E_z &= A_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $(\mathbf{kA}) = 0$ , а собственные значения волновых векторов и частот определяются соотношениями

$$\begin{aligned} k_j &= \frac{\pi}{a_j} n_j; \\ \omega^2 &= c^2 \mathbf{k}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Расчет модовой структуры для резонаторов более сложной формы обычно требует громоздких математических выкладок, но не содержит принципиальных отличий.

