

## W08 СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

### § 01 Сверхзвуковой характер ударной волны.

◆ Направление изменения каждого термодинамического параметра на адиабате Гюгонио строго определено вторым законом термодинамики: энтропия жидкости в результате прохождения ударной волны может только возрасти. Поэтому если жидкость движется со стороны 1 на сторону 2 (рис.W08.A), то  $s_2 > s_1$ , откуда достаточно легко вывести, что  $p_2 > p_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ . Из этих соотношений также можно получить неравенства  $V_1 > c_1$ ,  $V_2 < c_2$ , где  $c_1 < c_2$  - скорости звука с разных сторон от ударной волны, а  $V_1$  и  $V_2$  - скорости жидкости относительно ударной волны.

◆ Соотношение между скоростью жидкости и скоростью звука с обеих сторон от ударной волны можно получить и из других соображений. Рассмотрим задачу об устойчивости фронта ударной волны относительно мелких возмущений. Рябь на поверхности разрыва возбуждает звуковые и энтропийно-вихревые волны, распространяющиеся вглубь второй среды. Таким образом, у нас есть три величины - амплитуды возмущения поверхности разрыва и двух волн, связанные тремя граничными условиями, дающими в итоге закон дисперсии для этих волн. Если нарушается неравенство  $V_1 > c_1$ , то возникает звуковая волна, распространяющаяся от поверхности разрыва в первую среду. Если же нарушается неравенство  $V_2 < c_2$ , то нужно будет принять во внимание звуковую волну, направленную из второй среды к поверхности разрыва, но сносимую потоком со скоростью  $V_2 - c_2$ . В обоих случаях возникают дополнительные параметры, и задача становится недоопределенной, т.е. имеет бесконечное количество решений. Таким образом, неравенства  $V_1 > c_1$ ,  $V_2 < c_2$  вытекают из эволюционности ударной волны.

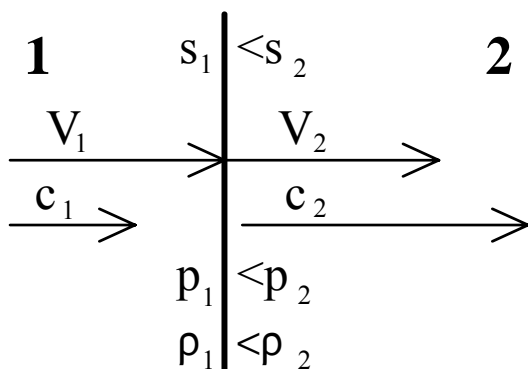


Рис.W08.A.

Разрыв типа ударная волна и соотношения термодинамических параметров на нем.

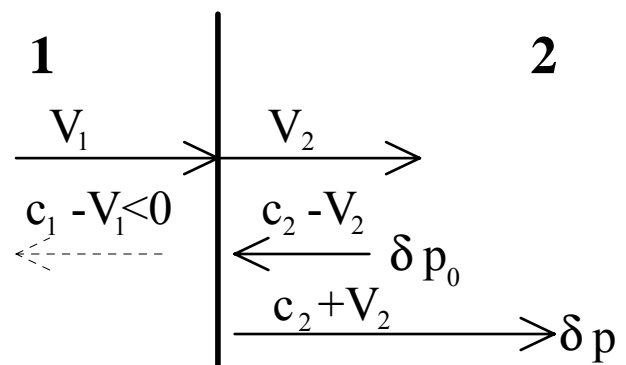


Рис.W08.B.

Отражение звука от фронта ударной волны.

## § 02 Отражение звука от поверхностей разрыва.

◆ Граничные условия (W07.23), рассмотренные в предыдущей лекции, определяют связь термодинамических параметров с двух сторон от ударной волны. При этом они воплощают собой фундаментальные законы сохранения, и поэтому выполняются как для стационарных значений этих параметров, так и для их возмущений. Поэтому свойства адиабаты Гюгонио определяют не только скачок параметров газа при прохождении ударной волны, но и закон взаимодействия ударной волны с другими возмущениями в жидкости. Рассмотрим для примера отражение звука, догоняющего ударную волну. Пусть в системе отсчета, связанной с ударной волной, жидкость движется в положительном направлении со стороны 1 на сторону 2 (рис.W08.B). Звук, догоняющий ударную волну, движется со стороны 2 в отрицательном направлении. При этом никакие возмущения не могут распространяться на стороне 1 в направлении от ударной волны, так как  $V_1 > c_1$  - их сносит течением потока обратно к ударной волне. Поэтому нам достаточно рассмотреть возмущения на стороне 2, вызванные падающим и отраженным звуком. Рассматривая малые отклонения в граничном условии, соответствующем условию постоянства потока импульса  $p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$ , имеем для амплитуд возмущений скорости, давления и плотности

$$\delta p_2 + V_2^2 \delta \rho_2 + 2\rho_2 V_2 \delta V_2 = 0. \quad (1)$$

Учитывая, что на поверхности ударной волны изменения термодинамических величин связаны адиабатой Гюгонио, получаем

$$\delta V_2 = -\frac{1+h}{2\rho_2 V_2} \delta p_2, \quad (2)$$

где  $h = V_2^2 (\partial \rho_2 / \partial p_2)_G$ ; индекс  $G$  означает взятие производной вдоль адиабаты Гюгонио. С другой стороны, возмущения давления и скорости состоят из возмущений, вызванных падающим и отраженным звуком:

$$\delta p_2 = \delta p_0 + \delta p; \quad (3)$$

$$\delta V_2 = \delta V_0 + \delta V = (\delta p - \delta p_0) / c_2 \rho_2.$$

Объединяя (2) и (3), для возмущения давления в отраженном звуке находим

$$\delta p = -\frac{1+h-2M_2}{1+h+2M_2} \delta p_0, \quad (4)$$

где  $M_2 = V_2 / c_2$  - число Маха. Аналогичным образом можно найти коэффициенты отражения или преломления звука при его произвольном падении на ударную волну или тангенциальный разрыв.

◆ Поток энергии в отраженной волне оказывается меньше падающего потока энергии. Так как на сторону 1 никакие возмущения не проникают, то избыточная энергия уносится энтропийно-вихревыми возмущениями, для определения амплитуды которых необходимо учитывать также возмущения плотности.

### § 03 Гофрировочная неустойчивость тангенциальных разрывов

◆ Изучение эволюции поверхностей разрывов имеет смысл, только если последние устойчивы по отношению к неоднородным возмущениям. Для изучения устойчивости ударной волны или тангенциального разрыва необходимо задать возмущение поверхности разрыва в виде слабой ряби и проверить, не будет ли она усиливаться. В этом параграфе мы рассмотрим устойчивость тангенциального разрыва, причем для простоты будем считать жидкость несжимаемой. Задача оказывается схожей с задачей о гравитационно-капиллярных волнах, однако в этом случае необходимо учитывать состояние жидкости с обеих сторон от поверхности разрыва.

◆ Пусть поверхность тангенциального разрыва находится в плоскости  $(x - y)$ . Без ограничения общности можно считать, что по одну сторону от разрыва жидкость покоится  $V_2 = 0$ , а скорость  $V_1$  направлена в направлении  $x$  (рис. W08.C). Запишем уравнения непрерывности и Эйлера, которые для слабых возмущений в случае несжимаемой жидкости имеют вид

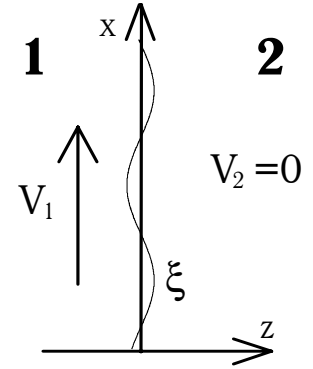


Рис. W08.C. Гофрировочная неустойчивость тангенциального разрыва.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \delta \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} + V_i \frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial x} + \frac{\vec{\nabla} \delta p}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде затухающей гармонической волны  $\delta \vec{V}, \delta p \sim \exp(i\omega t - ikx + \kappa z)$ , вызванной рябью на поверхности разрыва  $\xi(z, t) = \xi_0 e^{i\omega t - ikx}$ . Применяя операцию  $\operatorname{div}$  ко второму уравнению, получаем  $\Delta \delta p = 0$ , откуда

$$\kappa_1 = -\kappa_2 = k. \quad (6)$$

Знаки здесь выбраны из условия затухания волн на бесконечности.

◆ На поверхности тангенциального разрыва  $z = 0$  при этом справедливы граничные условия

$$\begin{cases} \delta p_1 = \delta p_2 = \delta p \\ \delta V_{z_i} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_i \frac{\partial \xi}{\partial x}. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя решение в виде затухающей гармонической волны во все уравнения (5,7), содержащие только  $\xi$ , давление и  $z$ -компоненту скорости, получаем

$$\begin{aligned} i(\omega - kV_1) \delta V_{z_1} - \frac{k}{\rho} \delta p &= 0 \\ \delta V_{z_1} &= i(\omega - kV_1) \xi_0 \end{aligned} \quad (8)$$

для первой полуплоскости и

$$i\omega\delta V_{z_2} + \frac{k}{\rho}\delta p = 0 \quad (9)$$

$$\delta V_{z_2} = i\omega\xi_0$$

- для второй. Совместное решение (8) и (9) дает дисперсионное соотношение

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2} kV_1. \quad (10)$$

Таким образом, любая рябь на поверхности тангенциального разрыва приводит к возникновению волн с частотой, имеющей отрицательную мнимую составляющую, что означает абсолютную неустойчивость тангенциального разрыва. Можно показать, что учет сжимаемости жидкости существенно не меняет ситуацию - тангенциальный разрыв разрушается путем возрастания ряби на его поверхности - поэтому такую неустойчивость называют гофрировочной.

◆ Аналогично можно исследовать устойчивость ударных волн. В отличие от тангенциальных разрывов, ударные волны оказываются устойчивыми в широком диапазоне параметров, заданных неравенством

$$-1 - 2M_2 < h = V_2^2 \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial p_2} \right)_G < 1. \quad (11)$$

#### § 04 Распространение пламени. Неустойчивость Дарье-Ландау

◆ Еще один возможный вариант поверхности, которую можно рассматривать как гидродинамический разрыв – это фронт пламени (или иной химической реакции), разделяющий область с исходными веществами и область, содержащую продукты горения. Если первоначальная температура исходной среды меньше температуры горения, то объемное возгорание невозможно. Энергия, выделяющаяся на фронте горения, будет расходоваться на нагрев прилегающих слоев исходной среды до температуры горения, поэтому фронт будет продолжать оставаться тонким.

◆ В зависимости от способа передачи этой энергии разделяют два механизма распространения пламени – сверхзвуковой и медленный дозвуковой. В сверхзвуковом случае нагревание среды происходит в результате ее резкого сжатия при прохождении ударной волны, т.е. в этом случае фронт пламени привязан к уже изученному нами типу разрыва. А вот в обратном случае медленного распространения пламени передача энергии происходит благодаря теплопередаче и диффузии. Если интересоваться структурой такого фронта пламени – то его можно рассматривать как волну переброса в параболическом уравнении с нелинейным членом в модели Колмогорова, Петровского и Пискунова. Если же рассматривать его как поверхность разрыва, то граничные условия на фронте пламени по-прежнему представляют собой законы постоянства потоков массы, импульса и энергии. Однако в последнем из них должна быть учтена энергия  $Q$ , выделяющаяся в результате горения:

$$\begin{cases} \rho_1 V_{z1} = \rho_2 V_{z2} \\ p_1 + \rho_1 V_{z1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{z2}^2 \\ w_1 + V_{z1}^2/2 = w_2 + Q + V_{z2}^2/2 \end{cases} \quad (12)$$

Эти граничные условия означают, что возможные состояния продуктов горения лежат на адиабате Гюгонио, хотя начальная точка ей не принадлежит (рис.W08.D). Направления изменения термодинамических величин в этом случае отличаются от случая ударной волны: в результате горения температура среды резко возрастает, что приводит к сильному расширению газа, т.е. к уменьшению плотности и давления.

✧ Я.Б.Зельдович, Г.И.Баренблатт, В.Б.Либрович, Г.М.Махвиладзе «Математическая теория горения и взрыва», М:Наука (1980)

◆ Учитывая, что скорость  $V_1$  движения фронта пламени в этом случае много меньше скорости звука ( $M_1 \ll 1$ ), можно с точностью до квадратичных по числу Маха членов приближенно считать газ несжимаемым, тогда граничные условия (12) можно использовать в упрощенном виде  $\rho_1 V_{z1} = \rho_2 V_{z2}$ ,  $p_1 = p_2$  (не забывая также о равенстве тангенциальных скоростей  $V_{\tau 1} = V_{\tau 2}$ ). Используем эти условия для анализа устойчивости фронта горения. Эта задача была решена французским ученым Ж.Дарье в 1938 году и независимо – Л.Д.Ландау в 1944.

✧ G.Darrieus «Propagation d'un front de flame», unpublished work presented in Paris: La Technique Moderne (1938) and Le Congrès de Mécanique Appliquée (1945)

✧ Л.Д.Ландау «К теории медленного горения», ЖЭТФ, **14**, 240-244 (1944)

◆ Как и раньше, в случае несжимаемого газа можно ограничиться уравнениями непрерывности и Эйлера. Для слабых отклонений от средних значений, как и в случае с анализом устойчивости тангенциального разрыва, можно записать

$$\begin{cases} \operatorname{div} \delta \vec{V} = 0 \\ \left[ \frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} + V_i \frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial z} + \frac{\vec{\nabla} \delta p}{\rho_i} \right] = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$V_i$  в этом случае - отличные от нуля с обеих сторон от фронта пламени постоянные скорости движения фронта пламени и утекания от него продуктов горения. Как и раньше, применяя операцию дивергенции к уравнению Эйлера, для экспоненциального решения  $\delta p = a_i \exp(\lambda t - ikx + \kappa z)$  получаем связь между инкрементом затухания и волновым вектором  $\kappa_1 = -\kappa_2 = k$ . Для двух компонент скорости тогда получаем уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta V_z}{\partial t} + V_i \frac{\partial \delta V_z}{\partial z} = \mp \frac{k}{\rho_i} a_i e^{\lambda t - ikx \pm \kappa z} \\ \frac{\partial \delta V_x}{\partial t} + V_i \frac{\partial \delta V_x}{\partial z} = i \frac{k}{\rho_i} a_i e^{\lambda t - ikx \pm \kappa z} \end{cases} \quad (14)$$

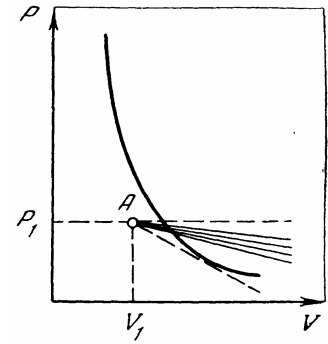


Рис.W08.D. Начальное состояние газа  $A$  и адиабата Гюгонио, на которой лежат возможные состояния продуктов горения газа

В решении этой системы следует учесть не только частное решение неоднородных уравнений, но и решение однородных уравнений:

$$\begin{cases} \delta V_z = \left( b_i e^{-\lambda z/V_i} \mp \frac{ka_i e^{\pm kz}}{\rho_i (\lambda \pm kV_i)} \right) e^{\lambda t - ikx} \\ \delta V_x = \left( c_i e^{-\lambda z/V_i} + \frac{ika_i e^{\pm kz}}{\rho_i (\lambda \pm kV_i)} \right) e^{\lambda t - ikx} \end{cases} \quad (15)$$

Неустойчивые решения соответствуют значениям  $\text{Re}\lambda > 0$ . Для того, чтоб при этом возмущения вдали от пламени отсутствовали, нужно приравнять нулю амплитуды однородных решений в исходной среде  $b_1 = c_1 = 0$ . Эти же амплитуды в продуктах горения связаны уравнением непрерывности  $c_2 = -\lambda b_2 / ikV_2$ .

◆ Теперь необходимо учесть возмущение самого фронта пламени  $\xi(z, t) = de^{\lambda t - ikx}$ , и связать неизвестные амплитуды  $a_1, a_2, b$  и  $d$  при помощи граничных условий:  $\delta p_1 = \delta p_2, \delta V_{1z} = \delta V_{2z} = \xi_t, \delta V_{1x} + V_1 \xi_x = \delta V_{2x} + V_2 \xi_x$ . Если учесть, что  $\rho_1/\rho_2 = V_2/V_1 = \alpha > 1$ , то для безразмерного инкремента  $\gamma = \lambda/\alpha kV_1$  получаем уравнение

$$\gamma^2 + \frac{2}{1+\alpha}\gamma + \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)} = 0. \quad (16)$$

Отсюда получаем два значения инкремента  $\lambda = -\frac{\alpha kV_1}{\alpha+1} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha}} \right)$ . Легко

видеть, что для одного из них  $\text{Re}\lambda > 0$ . Таким образом, фронт пламени оказывается абсолютно неустойчивым, причем быстрее всего должны расти возмущения с большими  $k$ , т.е. с малыми длинами волн. Этот вывод противоречит экспериментам с пламенами.

◆ При анализе причин расхождения теории и эксперимента в первую очередь следует обратить внимание на то, что как раз для малых длин волн, сравнимых с шириной фронта пламени, модель, в которой эта ширина считается бесконечно малой, очевидно, неприменима. Учет конечной ширины фронта пламени может привести к модификации граничных условий. Такая модификация была предложена Маркштейном в 1951 году – он предложил учитывать зависимость скорости пламени от кривизны фронта:

$$V_i = V_{i0} (1 - \mu \xi_{xx}) \quad (17)$$

Это приводит к модификации граничных условий для нормальных компонент скорости и для давления – по сути, введение коэффициента Маркштейна эквивалентно введению эффективного поверхностного натяжения фронта пламени.

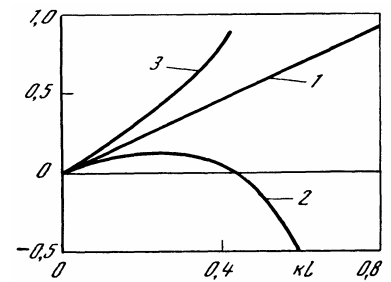


Рис. W08.Е. Зависимость инкремента нарастания возмущений от безразмерного волнового числа для различных коэффициентов Маркштейна:  $\mu = 0$  (1),  $\mu > 0$  (2),  $\mu < 0$  (3).

В этом случае зависимость  $\lambda(k)$  оказывается более сложной – см. рис. W08.Е. Максимум инкремента нарастания теперь соответствует конечной длине волны возмущения. В экспериментах Маркштейн наблюдал разбиение пламени на отдельные ячейки, размер которых позволил ему оценить величину коэффициента  $\mu$ .

✧ G.H.Markstein «Experimental and theoretical studies of flame front stability», J.Aeronaut.Sci., **18**, 199-220 (1951)

