W08 СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

§ 01 Адиабата Гюгонио

◆ На предыдущей лекции было показано, что на поверхности ударной волны выполняются граничные условия

$$\begin{cases} \rho V_z = \text{const} \\ w + V_z^2/2 = \text{const} \\ p + \rho V_z^2 = \text{const} \end{cases} \qquad (1)$$

Эти условия связывают между собой ρ_2 и p_2 при заданных (ρ_1, p_1). Эта зависимость, определяющая связь между скачками различных величин в жидкости на фронте ударной волны, называется адиабатой Гюгонио. В отличие от обычной равновесной адиабаты Пуассона $p \sim \rho^\gamma$, она двупараметрическая: для адиабаты Гюгонио важно, из какой точки она начинается (рис.W08.A). Отсюда, в частности, следует, что прохождение двух ударных волн переводит жидкость в состояние, в котором она никогда бы не оказалась после одной ударной волны.

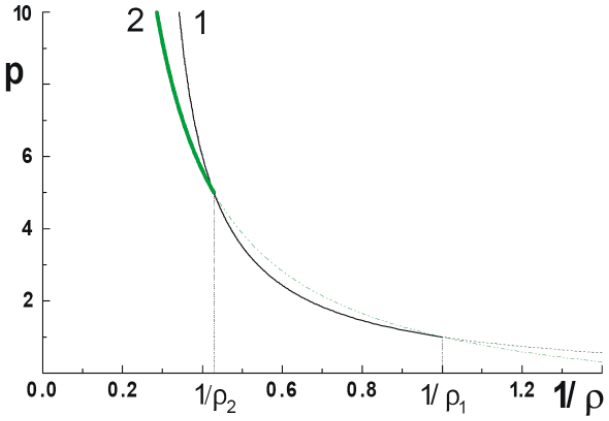

Рис.W08.A.
Две адиабаты Гюгонио, начинающиеся в точках $\rho_1 = 1$, $p_1 = 1$ и $\rho_2 = 7/3$, $p_2 = 5$, для идеального одноатомного газа.

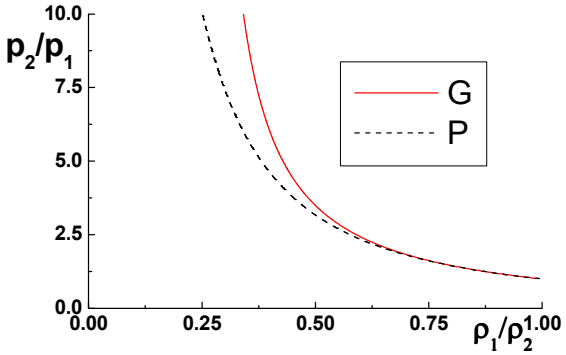

Рис.W08.B.
Адиабата Гюгонио (G) и обычная адиабата Пуассона (P) для идеального политропного одноатомного ($\gamma = 5/3$) газа.

◆ Учитывая, что плотность внутренней энергии политропного газа

$$w = c_p T = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}, \qquad (2)$$

из (1) можно получить (рис.W08.B)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}. \qquad (3)$$

Следует отметить, что при увеличении разницы давлений с двух сторон от ударной волны отношение плотностей стремится к постоянной величине

$$\lim_{p_2 \gg p_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \qquad (4)$$

§ 02 Сферическая ударная волна

◆ До этого момента мы говорили только о плоских поверхностях разрыва. Вообще говоря, их форма зависит от геометрии источника волн. Например, в случае взрыва, т.е. выделения большого количества энергии в небольшом объеме жидкости, возникшая ударная волна будет иметь форму сферы.

Взрыв сопровождается резким повышением температуры и давления жидкости или газа, т.е. можно считать, что $p_2 \gg p_1$. Согласно (4), отношение плотностей при этом стремится к постоянной величине. Это означает, что задача имеет всего два параметра, определяющие свойства расходящейся ударной волны – начальную плотность ρ_1 и энергию взрыва E. Из этих параметров, координаты и времени можно составить единственную безразмерную комбинацию, определяющую закон роста радиуса ударной волны со временем

$$R \sim \left(Et^2 / \rho_1 \right)^{1/5} \qquad (5)$$

Поскольку плотность за ударной волной в 6 раз (для двухатомного газа) превышает начальную плотность, а новому веществу внутри сферической ударной волны возникнуть неоткуда, то почти все вещество сосредоточено в тонком слое сразу за ударной волной, тогда как внутри сферы жидкость находится в сильно разреженном состоянии. Формула (5) была получена Л.И.Седовым в 1944 году в связи с разработками атомной бомбы.

✧ Л.И.Седов «Распространение сильных взрывных волн», Прикладная математика и механика, **10**, №2 (1946).

§ 03 Сверхзвуковой характер ударной волны.

◆ Направление изменения каждого термодинамического параметра на адиабате Гюгонио строго определено вторым законом термодинамики: энтропия жидкости в результате прохождения ударной волны может только возрасти. Поэтому если жидкость движется со стороны 1 на сторону 2 (рис.W08.C), то $s_2 > s_1$, откуда достаточно легко вывести, что $p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$. Из этих соотношений также можно получить неравенства $V_1 > c_1$, $V_2 < c_2$, где $c_1 < c_2$ - скорости звука с разных сторон от ударной волны, а V_1 и V_2 - скорости жидкости относительно ударной волны.

◆ Соотношение между скоростью жидкости и скоростью звука с обеих сторон от ударной волны можно получить и из других соображений. Рассмотрим задачу об устойчивости фронта ударной волны относительно мелких возмущений. Рябь на поверхности разрыва возбуждает звуковые и энтропийно-вихревые волны, распространяющиеся вглубь второй среды. Таким образом, у нас есть

три величины - амплитуды возмущения поверхности разрыва и двух волн, связанные тремя граничными условиями, дающими в итоге закон дисперсии для этих волн. Если нарушается неравенство $V_1 > c_1$, то возникает звуковая волна, распространяющаяся от поверхности разрыва в первую среду. Если же нарушается неравенство $V_2 < c_2$, то нужно будет принять во внимание звуковую волну, направленную из второй среды к поверхности разрыва, но сносимую потоком со скоростью $V_2 - c_2$. В обоих случаях возникают дополнительные параметры, и задача становится недоопределенной, т.е. имеет бесконечное количество решений. Таким образом, неравенства $V_1 > c_1$, $V_2 < c_2$ вытекают из *эволюционности* ударной волны.

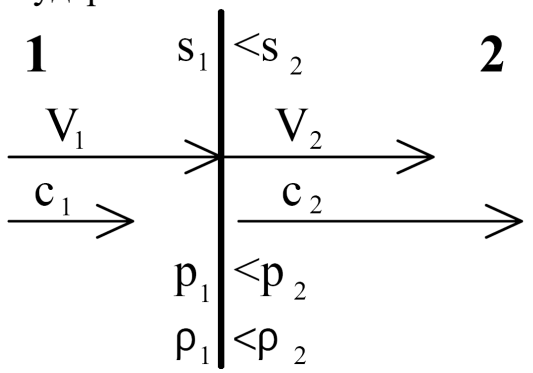

Рис.W08.C.
Разрыв типа ударная волна и соотношения термодинамических параметров на нем.

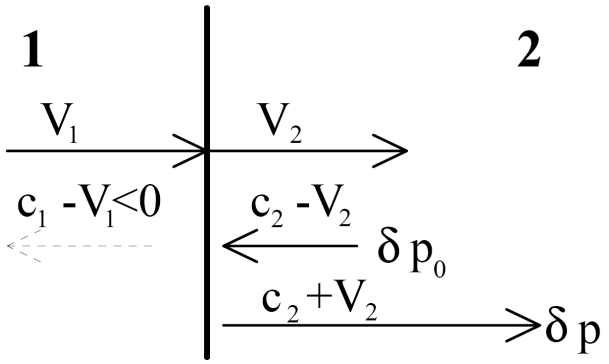

Рис.W08.D.
Отражение звука от фронта ударной волны.

§ 04 Отражение звука от поверхностей разрыва.

◆ Граничные условия (1) определяют связь термодинамических параметров с двух сторон от ударной волны. При этом они воплощают собой фундаментальные законы сохранения, и поэтому выполняются как для стационарных значений этих параметров, так и для их возмущений. Поэтому свойства адиабаты Гюгонио определяют не только скачок параметров газа при прохождении ударной волны, но и закон взаимодействия ударной волны с другими возбуждениями в жидкости. Рассмотрим для примера отражение звука, догоняющего ударную волну. Пусть в системе отсчета, связанной с ударной волной, жидкость движется в положительном направлении со стороны 1 на сторону 2 (рис.W08.D). Звук, догоняющий ударную волну, движется со стороны 2 в отрицательном направлении. При этом никакие возмущения не могут распространяться на стороне 1 в направлении от ударной волны, так как $V_1 > c_1$ - их сносит течением потока обратно к ударной волне. Поэтому нам достаточно рассмотреть возмущения на стороне 2, вызванные падающим и отраженным звуком. Рассматривая малые отклонения в граничном условии, соответствующем условию постоянства потока импульса $p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$, имеем для амплитуд возмущений скорости, давления и плотности

$$\delta p_2 + V_2^2 \delta\rho_2 + 2\rho_2 V_2 \delta V_2 = 0 . \qquad (6)$$

Учитывая, что на поверхности ударной волны изменения термодинамических величин связаны адиабатой Гюгонио, получаем

$$\delta V_2 = -\frac{1+h}{2\rho_2 V_2}\delta p_2, \qquad (7)$$

где $h = V_2^2\left(\partial\rho_2/\partial p_2\right)_G$; индекс G означает взятие производной вдоль адиабаты Гюгонио. С другой стороны, возмущения давления и скорости состоят из возмущений, вызванных падающим и отраженным звуком:

$$\begin{aligned} &\delta p_2 = \delta p_0 + \delta p; \\ &\delta V_2 = \delta V_0 + \delta V = \left(\delta p - \delta p_0\right)/c_2\rho_2 . \end{aligned} \qquad (8)$$

Объединяя (7) и (8), для возмущения давления в отраженном звуке находим

$$\delta p = -\frac{1+h-2M_2}{1+h+2M_2}\delta p_0, \qquad (9)$$

где $M_2 = V_2/c_2$ - число Маха. Аналогичным образом можно найти коэффициенты отражения или преломления звука при его произвольном падении на ударную волну или тангенциальный разрыв.

◆ Поток энергии в отраженной волне оказывается меньше падающего потока энергии. Так как на сторону 1 никакие возмущения не проникают, то избыточная энергия уносится энтропийно-вихревыми возмущениями, для определения амплитуды которых необходимо учитывать также возмущения плотности.

§ 05 Гофрировочная неустойчивость тангенциальных разрывов

◆ Изучение эволюции поверхностей разрывов имеет смысл, только если последние устойчивы по отношению к неодномерным возмущениям. Для изучения устойчивости ударной волны или тангенциального разрыва необходимо задать возмущение поверхности разрыва в виде слабой ряби и проверить, не будет ли она усиливаться. В этом параграфе мы рассмотрим устойчивость тангенциального разрыва, причем для простоты будем считать жидкость несжимаемой. Задача оказывается схожей с задачей о гравитационно-капиллярных волнах, однако в этом случае необходимо учитывать состояние жидкости с обеих сторон от поверхности разрыва.

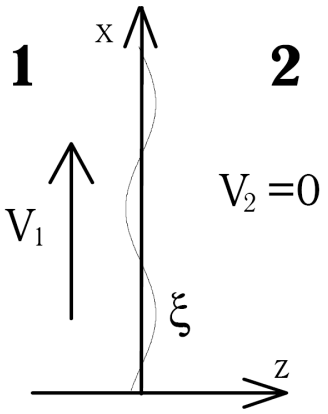

Рис.W08.E. Гофрировочная неустойчивость тангенциального разрыва.

◆ Пусть поверхность тангенциального разрыва находится в плоскости $(x-y)$. Без ограничения общности можно считать, что по одну сторону от разрыва жидкость покоится $V_2 = 0$, а скорость V_1 направлена в направлении x (рис.W08.E). Запишем уравнения непрерывности и Эйлера, которые для слабых возмущений в случае несжимаемой жидкости имеют вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}\delta\vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial\delta\vec{V}}{\partial t} + V_i\dfrac{\partial\delta\vec{V}}{\partial x} + \dfrac{\vec{\nabla}\delta p}{\rho} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде затухающей гармонической волны $\delta\vec{V},\delta p \sim \exp\left(i\omega t - ikx + \kappa z\right)$, вызванной рябью на поверхности разрыва $\xi\left(z,t\right) = \xi_0 e^{i\omega t - ikx}$. Применяя операцию div ко второму уравнению, получаем $\Delta\delta p = 0$, откуда

$$\kappa_1 = -\kappa_2 = k. \qquad (11)$$

Знаки здесь выбраны из условия затухания волн на бесконечности.

◆ На поверхности тангенциального разрыва $z = 0$ при этом справедливы граничные условия

$$\begin{cases} \delta p_1 = \delta p_2 = \delta p \\ \delta V_{z_i} = \dfrac{\partial\xi}{\partial t} + V_i\dfrac{\partial\xi}{\partial x}. \end{cases} \qquad (12)$$

Подставляя решение в виде затухающей гармонической волны во все уравнения (10,12), содержащие только ξ, давление и z-компоненту скорости, получаем

$$\begin{aligned} & i\left(\omega - kV_1\right)\delta V_{z_1} - \frac{k}{\rho}\delta p = 0 \\ & \delta V_{z_1} = i\left(\omega - kV_1\right)\xi_0 \end{aligned} \qquad (13)$$

для первой полуплоскости и

$$\begin{aligned} & i\omega\delta V_{z_2} + \frac{k}{\rho}\delta p = 0 \\ & \delta V_{z_2} = i\omega\xi_0 \end{aligned} \qquad (14)$$

- для второй. Совместное решение (13) и (14) дает дисперсионное соотношение

$$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}kV_1. \qquad (15)$$

Таким образом, любая рябь на поверхности тангенциального разрыва приводит к возникновению волн с частотой, имеющей отрицательную мнимую составляющую, что означает абсолютную неустойчивость тангенциального разрыва. Можно показать, что учет сжимаемости жидкости существенно не меняет ситуацию - тангенциальный разрыв разрушается путем возрастания ряби на его поверхности - поэтому такую неустойчивость называют гофрировочной.

◆ Аналогично можно исследовать устойчивость ударных волн. В отличие от тангенциальных разрывов, ударные волны оказываются устойчивыми в широком диапазоне параметров, заданных неравенством

$$-1 - 2M_2 < h = V_2^2\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial p_2}\right)_G < 1. \qquad (16)$$

☯