

## W07 ГИДРОДИНАМИКА. ЗВУК.

### § 01 Система уравнений гидродинамики

◆ Перейдем к рассмотрению различных типов волн в газе или жидкости. Полная система уравнений гидродинамики включает в себя уравнения непрерывности, Навье-Стокса и теплопереноса. Однако в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью уравнение Навье-Стокса сводится к уравнению Эйлера, а вместо уравнения переноса тепла удобно использовать уравнение сохранения энтропии:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V} + \operatorname{grad}(p + U) = 0 \\ \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} s = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь функции  $\rho$ ,  $p$ ,  $s$ ,  $\vec{V}$  - соответственно, плотность, давление, энтропия и скорость жидкости в точке  $\vec{r}$ , а  $U(\vec{r})$  - плотность потенциальной энергии в этой точке. Для полноты систему уравнений гидродинамики необходимо дополнить уравнением состояния  $\rho = \rho(p, s)$ . Мы ограничимся рассмотрением этой идеальной системы уравнений, не учитывающей диссипацию энергии, причем в части случаев нам будет достаточно первых двух уравнений.

### § 02 Гравитационно-капиллярные волны.

◆ Прежде чем перейти к изучению волн в объеме жидкости, рассмотрим так называемые гравитационно-капиллярные волны на поверхности несжимаемой жидкости. Простота задачи связана с тем, что влиянием газообразной фазы (воздуха) на свойства волн в силу ее малой плотности можно пренебречь. Название волн связано с тем, что при искривлении поверхности жидкости возникают возвращающие силы тяжести и поверхностного натяжения.

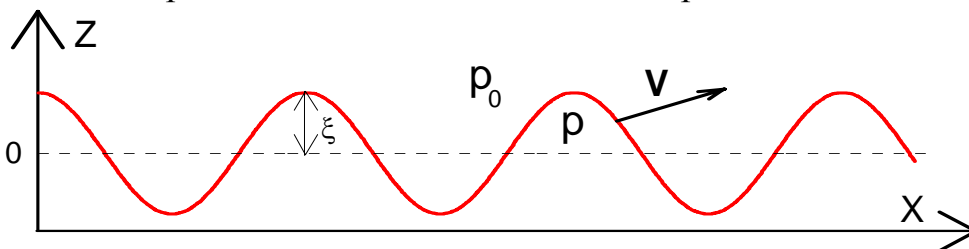


Рис.W07.A.  
Возмущение на поверхности жидкости.

◆ Пусть на плоской поверхности жидкости  $z = 0$  возникает малое возмущение  $\xi(x)$  (Рис.W07.A). В этом случае мы можем ограничиться рассмотрением лианеризованной относительно малых отклонений системы (1) в двумерном слу-

чае. Записывая уравнение Эйлера в скалярном виде и учитывая, что потенциальная энергия  $U(z) = \rho g(z + \xi)$ , получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \\ \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho g \xi) = 0 \\ \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(p + \rho g \xi) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

причем на поверхности жидкости выполняются граничные условия

$$\begin{cases} p = -\sigma \xi_{xx} \\ V_z = \xi_t, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения.

◆ Будем искать решение в виде гармонической волны, затухающей при удалении от поверхности  $p, V_x, V_z, \xi \sim \exp(i\omega t - ikx + \kappa z)$ . Дифференцируя второе уравнение (2) по  $x$ , а третье – по  $z$ , и складывая их, получаем  $\Delta(p + \rho g \xi) = 0$ , откуда легко получить  $\kappa = \pm k$ . Учитывая, что в нижней полуплоскости невозрастающим на бесконечности является только решение с  $\kappa = k$ , из (3) и третьего уравнения (2) получаем закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = gk + \sigma k^3 / \rho \quad (4)$$

Отсюда легко видеть, что свойства длинных волн ( $\lambda \gg \sqrt{\sigma/\rho g}$ ) на поверхности жидкости определяются силой тяжести, а в обратном случае коротких волн - силой поверхностного натяжения. Например, для волн длиной в один метр на поверхности воды (которые можно считать длинными:  $\sqrt{\sigma/\rho g} \approx 3$  мм) фазовая скорость, т.е. скорость движения гребней,

$$V_{ph} = \omega/k = \sqrt{g/k} \approx 1.25 \text{ м/с}, \quad (5)$$

тогда как групповая скорость, т.е. скорость распространения всего возмущения от одной точки к другой, в два раза меньше:

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (6)$$

### § 03 Звук.

◆ Как известно из курса общей физики, закон дисперсии для звука в сплошной среде имеет вид  $\omega = kc$ , где  $c$  - скорость звука. Рассмотрим теперь волны в объеме жидкости (или газа) в общем случае, не исключая возможного течения жидкости со скоростью  $\vec{V}_0$ .

◆ С помощью уравнения состояния малое изменение плотности может быть выражено через дифференциалы давления и энтропии:

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p ds. \quad (7)$$

Для идеального газа легко выразить скорость звука через термодинамические параметры:

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad (8)$$

где  $\gamma = c_p/c_v$  - показатель адиабаты. Подставляя (7) в уравнение непрерывности, из (1) для волн малой амплитуды в жидкости получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\vec{V}_0}{c^2} \text{grad } p + \rho_0 \text{div } \vec{V} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{V}_0 \vec{\nabla}) \vec{V} + \text{grad } p = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V}_0 \text{grad } s = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где величины с индексом “0” обозначают невозмущенные величины, а величины без индекса – малые амплитуды колебаний давления, скорости и энтропии жидкости, вызванных распространением волны. Поиск решения в виде гармонической волны  $e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$  приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (\omega - \vec{k}\vec{V}_0) p = \rho_0 c^2 \vec{k}\vec{V} \\ \rho_0 (\omega - \vec{k}\vec{V}_0) \vec{V} = \vec{k} p \\ (\omega - \vec{k}\vec{V}_0) s = 0, \end{cases} \quad (10)$$

◆ Система (10) имеет два решения. Первое – это обыкновенный звук, скорость которого в соответствии с эффектом Доплера модифицирована скоростью течения всей жидкости:

$$\omega = \vec{k}\vec{V}_0 \pm kc, \quad (11)$$

а амплитуды колебаний гидродинамических величин связаны соотношениями  $s = 0$ ;  $\vec{V} = \pm \vec{k} p / kc\rho_0$ ;  $\rho = p/c^2$ ;  $p$  - произвольно.

◆ Второе решение - так называемые энтропийно-вихревые волны, перемещающиеся со скоростью среды, для которых  $\text{rot } \vec{V}$  отличен от нуля:

$$\omega = \vec{k}\vec{V}_0, \quad (12)$$

где  $p = 0$ ;  $\vec{V} \perp \vec{k}$ ;  $\rho = (\partial \rho / \partial s)_p s$ ,  $s$  и модуль  $\vec{V}$  - произвольны. Отметим, что в отличие от звука энтропийно-вихревые волны являются поперечными. При рассеянии света на флуктуациях плотности среды звук приводит к рассеянию Манделъштама-Бриллюэна, а энтропийно-вихревые волны – к рэлеевскому рассеянию.

### § 04 Простые волны в жидкости

◆ Перейдем к рассмотрению гидродинамических волн произвольной амплитуды. В предположении однородности жидкости в начальный момент времени энтропия  $s = \text{const}$ . Как мы теперь знаем, возмущения энтропии в звуке равны нулю, поэтому можно считать, что  $s = \text{const}$  в любой момент времени. Тогда давление будет являться функцией только плотности. Кроме того, будем предполагать, что скорость и плотность жидкости также однозначно связаны друг с другом, т.е. искать решение уравнений гидродинамики в форме простых волн, в которых все величины могут быть представлены как функции одной из них. В этом случае из уравнений непрерывности и Эйлера получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( V + \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \rho V + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial V} \right) \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда по правилу дифференцирования неявной функции находим

$$-\frac{dx}{dt} = V + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial V} = V + \rho \frac{\partial V}{\partial \rho},$$

то есть

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \pm \frac{c}{\rho}. \quad (14)$$

Подставляя полученную производную в (13), получаем уравнения простых волн:

$$\begin{cases} \rho_t + (V(\rho) \pm c) \rho_x = 0 \\ V_t + (V \pm c) V_x = 0. \end{cases} \quad (15)$$

◆ Для полученных уравнений справедливы все выводы относительно простых волн, сделанные в W02. В качестве решения второго из уравнений можно сразу записать уже рассмотренное нами решение Римана

$$V = F \{ x - (V \pm c)t \}, \quad (16)$$

где  $F(x)$  - начальное возмущение. Эволюция начального гармонического возмущения  $F(x) = \sin kx$  в соответствии с решением Римана сопровождается перекачкой энергии в высшие гармоники. Разложим его в ряд Фурье:

$$V_n = \frac{k}{\pi} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} \sin \{ k(x \pm ct) - ktV \} e^{inkx} dx. \quad (17)$$

Учитывая нечетность решения и вынося несущественный фазовый фактор  $e^{ikct}$ , имеем:

$$|V_n| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(y - ktV) \sin(ny) dy. \quad (18)$$

Используя замену  $z = y - ktV = y - kt \sin z$  и интегрируя по частям, получаем

$$|V_n| = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin z d \cos(nz + nkt \sin z) = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos z \cos(nz + nkt \sin z) dz \quad (19)$$

Преобразовывая произведение косинусов в сумму, получаем интегральное представление функций Бесселя:

$$|V_n| = \frac{\pi}{n} \{J_{n+1}(-nkt) + J_{n-1}(-nkt)\}, \quad (20)$$

которое при помощи рекуррентного соотношения  $J_{n+1}(x) = 2nJ_n(x)/x - J_{n-1}(x)$  преобразуется к виду

$$|V_n| = 2 \frac{J_n(nkt)}{nkt}. \quad (21)$$

Полученное представление решения Римана в виде ряда Фурье называется разложением Бесселя-Фубини. Все гармоники, кроме первой, в начальный момент времени равны нулю, но постепенно растут, профиль волны со временем становится все круче, что в итоге приводит к возникновению разрыва. Как известно, в разрыве происходит диссипация энергии, т.е. структуру разрыва невозможно рассматривать в рамках идеальных уравнений гидродинамики, без учета вязкости и теплопроводности. Однако идеальной системы уравнений гидродинамики (1) достаточно для установления граничных условий на поверхности разрыва.

### § 05 Тангенциальные разрывы и ударные волны

◆ Перейдем к установлению граничных условий для уравнений гидродинамики на поверхностях разрывов. Система уравнений (1) фактически выражает законы сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме, поэтому из системы уравнений гидродинамики следует, что при течении жидкости потоки массы, импульса и энергии остаются неизменными. Это означает, что на поверхности разрыва, лежащей в плоскости  $(y - z)$ , остаются непрерывными следующие выражения:

$$\begin{aligned} \rho V_z &= \text{const} \\ \rho V_z \left( w + V^2/2 \right) &= \text{const} \\ p + \rho V_z^2 &= \text{const} \\ \rho V_z V_x &= \text{const}; \quad \rho V_z V_y = \text{const}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $w(p, \rho)$  - плотность внутренней энергии.

◆ Возможны две ситуации, в которых выполняются все условия (22). В первой из них на поверхности разрыва есть скачок тангенциальной скорости  $V_{y1} \neq V_{y2}$  или  $V_{x1} \neq V_{x2}$ . В этом случае  $V_{z1} = V_{z2} = 0$  и, кроме того,  $p_1 = p_2$ . Подобные разрывы называют тангенциальными.

Во втором случае  $V_{y1} = V_{y2}$  и  $V_{x1} = V_{x2}$ . Это означает, что на поверхности разрыва выполняются условия

$$\begin{cases} \rho V_z = \text{const} \\ w + V_z^2/2 = \text{const} \\ p + \rho V_z^2 = \text{const} \end{cases} \quad (23)$$

Подобные разрывы называют ударными волнами, именно они возникают в результате эволюции простых волн, рассмотренных в предыдущем параграфе. Условия (23) связывают между собой  $\rho_2$  и  $p_2$  при заданных  $(\rho_1, p_1)$ . Эта зависимость, определяющая связь между скачками различных величин в жидкости на фронте ударной волны, называется адиабатой Гюгонио. В отличие от обычной адиабаты Пуассона  $p \sim \rho^\gamma$ , она двупараметрическая: для адиабаты Гюгонио важно, из какой точки она начинается (рис.W07.B). Другими словами, прохождение двух ударных волн переводит жидкость в состояние, в котором она никогда бы не оказалась после одной ударной волны.

✧ Вообще говоря, граничным условиям (22) могут удовлетворять и более экзотические виды разрывов, но мы их рассматривать не будем, т.к. они не могут возникнуть сами по себе, без задания специфических начальных условий.

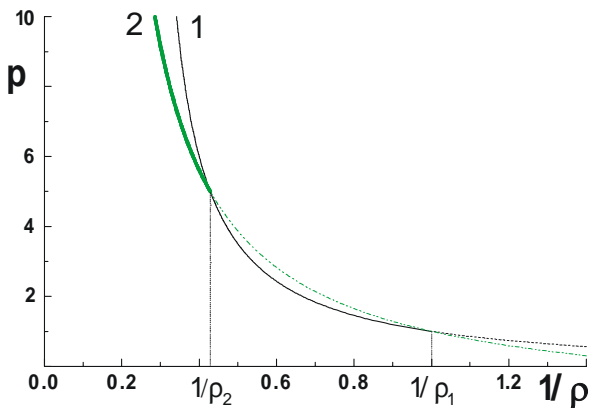


Рис.W07.B.

Две адиабаты Гюгонио, начинающиеся в точках  $\rho_1 = 1$ ,  $p_1 = 1$  и  $\rho_2 = 7/3$ ,  $p_2 = 5$ , для идеального одноатомного газа.

◆ Учитывая, что плотность внутренней энергии политропного газа

$$w = c_p T = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (24)$$

из (23) можно получить (рис.W07.C)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}. \quad (25)$$

Следует отметить, что при увеличении разницы давлений с двух сторон от ударной волны отношение плотностей стремится к постоянной величине

$$\lim_{p_2 \gg p_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (25a)$$

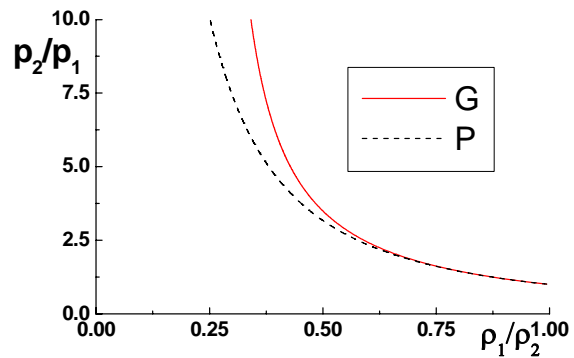


Рис.W07.C.

Адиабата Гюгонио (G) и обычная адиабата Пуассона (P) для идеального политропного одноатомного ( $\gamma = 5/3$ ) газа.

## § 06 Сферическая ударная волна

◆ До этого момента мы говорили только о плоских поверхностях разрыва. Вообще говоря, их форма зависит от геометрии источника волн. Например, в случае взрыва, т.е. выделения большого количества энергии в небольшом объеме жидкости, возникшая ударная волна будет иметь форму сферы.

Взрыв сопровождается резким повышением температуры и давления жидкости или газа, т.е. можно считать, что  $p_2 \gg p_1$ . Согласно (25а), отношение плотностей при этом стремится к постоянной величине. Это означает, что задача имеет всего два параметра, определяющие свойства расходящейся ударной волны – начальную плотность  $\rho_1$  и энергию взрыва  $E$ . Из этих параметров, координаты и времени можно составить единственную безразмерную комбинацию, определяющую закон роста радиуса ударной волны со временем

$$R \sim \left( Et^2 / \rho_1 \right)^{1/5} \quad (26)$$

Поскольку плотность за ударной волной в 6 раз (для двухатомного газа) превышает начальную плотность, а новому веществу внутри сферической ударной волны возникнуть неоткуда, то почти все вещество сосредоточено в тонком слое сразу за ударной волной, тогда как внутри сферы жидкость находится в сильно разреженном состоянии. Формула (26) была получена Л.И.Седовым в 1944 году в связи с разработками атомной бомбы.

✧ Л.И.Седов «Распространение сильных взрывных волн», Прикладная математика и механика, **10**, №2 (1946).

