

## W06 ВОЛНЫ В ЦЕПОЧКАХ

Переходя ко второй части курса, мы возвращаемся к более простым волновым уравнениям, описывающим конкретные физические ситуации. В большинстве задач, которые здесь будут рассмотрены, важную роль для получения решений или исследования их устойчивости будут играть дисперсионные соотношения в той или иной форме.

### § 01 Колебания в цепочках

◆ Примером процесса, который можно рассматривать как с точки зрения теории колебаний, так и с точки зрения теории волн, являются возбуждения в системе двух (или нескольких) связанных осцилляторов. Рассмотрим бесконечную цепочку одинаковых осцилляторов  $\{\psi_n\}$ , взаимодействующих друг с другом:

$$\ddot{\psi}_n + \omega_0^2 \psi_n = -\frac{\partial W(\{\psi_n\})}{\partial \psi_n} \quad (1)$$

Потенциальная энергия взаимодействия осцилляторов зависит от разности их координат:

$$W(\{\psi_n\}) = \sum_n \sum_{m>0} U(\psi_{n+m} - \psi_n) \quad (2)$$

Далее для простоты будем считать, что взаимодействуют лишь ближайшие соседи

$$W(\{\psi_n\}) = \sum_n U(\psi_{n+1} - \psi_n) \quad (2a)$$

Разлагая ее в ряд относительно малых отклонений  $\{\psi_n\}$  от положения равновесия, получаем уравнение:

$$\ddot{\psi}_n + \omega_0^2 \psi_n = U''(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) \quad (1a)$$

◆ Частное решение этого уравнения будем искать в виде гармонической бегущей волны  $\psi_n(t) = A \exp(i\omega t - ikan)$ , где  $a$  - расстояние между соседними осцилляторами. Подставляя его в уравнение, получаем дисперсионное соотношение между частотой колебаний  $\omega$  и волновым числом  $k$ , определяющим сдвиг фаз между колебаниями соседних осцилляторов:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4U'' \sin^2(ka/2) \quad (3)$$

✧ Волновые числа, отличающиеся на величину, кратную  $2\pi/a$ , соответствуют одному и тому же значению частоты колебаний. Поэтому интерес представляют только волновые числа в диапазоне  $|k| < \pi/a$ , который называют зоной Бриллюэна. Существование ограниченного физически осмысленного диапазона изменения значений волновых чисел характерно для любых периодических структур. ✧ Для малых частот  $\omega < \omega_0$  уравнение (1a) имеет затухающее решение вида  $\psi_n(t) = A \exp(i\omega t - kan)$ , где  $\omega^2 = \omega_0^2 - 4U'' \text{sh}^2(ka/2)$ .

◆ Часто используется модель цепочки, состоящей из связанных пружинами шариков, что означает, что собственная частота колебаний осцилляторов от-

существует, и взаимодействуют лишь ближайшие соседи. В этом случае дисперсионное соотношение упрощается:

$$\omega^2 = 4U'' \sin^2(ka/2) \quad (3a)$$

Рассмотрим волны в такой цепочке, обрывающейся с одного конца ( $n \geq 0$ ). Любое возмущение в цепочке можно разложить по базису гармонических бегущих волн, распространяющихся в противоположные стороны  $\psi_n(t) = \{Ae^{-ikan} + Be^{ikan}\}e^{i\omega t}$ , но при этом оно должно удовлетворять уравнению для крайней частицы, которое отличается от уравнения (1a):

$$\ddot{\psi}_0 = U''(\psi_1 - \psi_0). \quad (1б)$$

✧ В случае жестко закрепленного конца цепочки граничное условие будет иметь вид

$$\ddot{\psi}_0 = U''(\psi_1 - 2\psi_0) \quad (1в)$$

◆ Подставляя возмущение в уравнение (1б), получаем связь между амплитудами волн, распространяющихся в противоположные стороны, которая определяет коэффициент их отражения от свободного конца цепочки:

$$R = A/B = e^{-ika}. \quad (4)$$

## § 02 Колебания в цепочках неодинаковых элементов

◆ Перейдем теперь к рассмотрению волн в цепочке, в которой чередуются частицы двух типов. Четные и нечетные шарики имеют различные массы  $g = m/M$ . Их колебания описываются уравнениями

$$\ddot{\psi}_{2n} = U''(\psi_{2n-1} + \psi_{2n+1} - 2\psi_{2n}) \quad (5)$$

$$\ddot{\psi}_{2n+1} = gU''(\psi_{2n} + \psi_{2n+2} - 2\psi_{2n+1})$$

Решение этой системы, как и раньше, ищем в виде гармонической бегущей волны, с той только разницей, что четные и нечетные осцилляторы имеют разные амплитуды колебаний. Условие совместности двух уравнений (5) приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = U'' \left\{ 1 + g \pm \sqrt{(1+g)^2 - 4g \sin^2 ka} \right\} \quad (6)$$

◆ Наиболее важной особенностью полученного соотношения является тот факт, что одному и тому же значению волнового числа теперь соответствует два значения частоты колебаний, соответствующих двум различным модам колебаний. При малых волновых числах частота одной из мод стремится к нулю, тогда как другая имеет конечную величину:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{2U''g}{1+g}}ka \quad (7a)$$

$$\omega_o = \sqrt{2U''(1+g)} \quad (7б)$$

Первую из этих мод называют *акустической*, при малых волновых числах ей соответствует постоянная, как для обычного звука, фазовая скорость. Вторую

называют *оптической*, потому что обычно в кристаллах именно эти колебания оказываются дипольно-активными и взаимодействуют с электромагнитными волнами. Фазовая скорость для оптической моды при малых волновых числах стремится к бесконечности, то есть все частицы одного типа колеблются в фазе.

◆ При уменьшении разницы между массами осцилляторов зазор между дисперсионными кривыми сокращается, и в пределе превращается в кривую, соответствующую цепочке из одинаковых шариков (рис. W06.A).

✧ С увеличением количества типов элементов цепочки количество оптических мод возрастает.

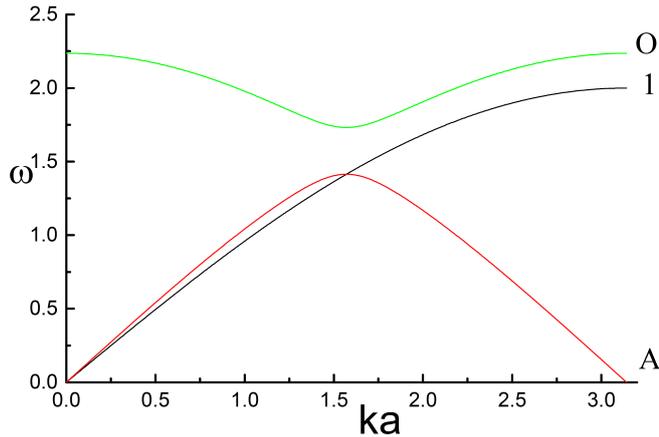


Рис. W06.A.

Дисперсионные кривые для цепочек, состоящих из частиц одного (3б) и двух типов: акустическая (А) и оптическая (О) ветви (6а).  $U'' = 1$ ;  $g = 1.5$ .

### § 03 Континуализация

◆ Рассмотрим волну в цепочке, для которой разность фаз колебаний между соседними осцилляторами достаточно мала ( $ka \ll 1$ ). В этом случае можно заменить дискретный индекс  $n$  непрерывной координатой  $x$ :

$$\psi_n = \psi(na) \rightarrow \psi(x) \quad (8a)$$

$$\psi_{n\pm 1} \rightarrow \psi(x) \pm \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} a^2 + \dots \quad (8б)$$

Подставляя разложение (8) в уравнение (1а) и пренебрегая малыми (с точностью до  $(ka)^3$ ) высшими производными, получаем для волны в цепочке уравнение в частных производных, имеющее вид *лианеризованного уравнения Клейна-Гордона*:

$$\psi_{tt} - c^2 \psi_{xx} + \omega_0^2 \psi = 0 \quad (9)$$

◆ Параметр  $c \equiv \sqrt{U''} a$  имеет размерность и смысл скорости волны. Впрочем, масштабным преобразованием переменных можно свести это уравнение к безразмерному виду

$$\Psi_{tt} - \Psi_{xx} + \Psi = 0, \quad (9a)$$

так как мы пренебрегли единственным пространственным масштабом задачи  $a$ . Подставляя в уравнение (9) решение в виде гармонической бегущей волны  $\psi \sim \exp(i\omega t - ikx)$ , опять получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2, \quad (3в)$$

которое совпадает с (3) с точностью до членов порядка  $(ka)^4$ .

✧ Условие применимости *приближения сплошной среды*  $ka \ll 1$  может быть записано также в виде  $a \ll \lambda$ , то есть приближение применимо к волнам, длина которых много больше расстояния между соседними осцилляторами. Использование этого приближения при описании жидкостей и газов соответствует переходу от кинетических уравнений к уравнениям гидродинамики.

### § 04 Задача Ферми-Пасты-Улама

◆ Учтем теперь в разложении потенциальной энергии цепочки одинаковых частиц следующий, нелинейный член:

$$\ddot{\Psi}_n = -\frac{\partial}{\partial \Psi_n} \{U(\Psi_{n+1} - \Psi_n) + U(\Psi_n - \Psi_{n-1})\}, \quad (10)$$

где

$$U(x) = wx^2/2 + vx^3/3. \quad (11)$$

Распространение волн в такой цепочке моделировали американские физики Ферми, Паста и Улам в Лос-Аламосе в 1955 г. при помощи одного из первых в мире компьютеров. Они надеялись увидеть, как благодаря малой нелинейности первоначальная энергия точечного возмущения цепочки равномерно распределится по всем колебательным модам, однако неожиданно для себя обнаружили, что через некоторое время возмущение снова собирается в одной точке. Объяснение этому факту было найдено несколько позже.

✧ E.Fermi, J.R.Pasta, S.M.Ulam, "Studies of nonlinear problems", in "Collected Works of E.Fermi", v.II, Chicago: Univ. Chicago Press, 1965, p.978-988

◆ Подставляя потенциальную энергию (11) в уравнение (10), получаем

$$\ddot{\Psi}_n = (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n) \{w + v(\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1})\}. \quad (12)$$

Применим к полученному уравнению процедуру континуализации, сохраняя при этом в первой скобке большее число членов разложения, чем в предыдущем параграфе:

$$\Psi_{tt} = \left\{ a^2 \Psi_{xx} + a^4 \Psi_{xxxx} / 12 + O(a^6) \right\} \left\{ w + 2av\Psi_x + O(a^3) \right\}. \quad (13)$$

Раскрывая скобки, мы сохраним члены до четвертой степени  $a$  включительно:

$$\Psi_{tt} = wa^2 \Psi_{xx} + 2va^3 \Psi_x \Psi_{xx} + wa^4 \Psi_{xxxx} / 12, \quad (14)$$

или, относительно переменной  $y = x/a$  для функции  $u = a\Psi_x$ :

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ wu + vu^2 + \frac{w}{12} u_{yy} \right\}. \quad (15)$$

Полученное уравнение называется уравнением Буссинеска и имеет солитонные решения. Впервые оно было получено математиком Буссинеском в 1872 г. при исследовании волн на поверхности мелкой воды.

✧ J.Boussinesq, "Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'une canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond", J.Math.Pures.Appl., ser.2, 17, 55-108, (1872)

### § 05 Эквивалентность волновых уравнений

◆ Как известно, стандартное волновое уравнение

$$\Psi_{tt} = c^2 \Psi_{xx}, \quad (16)$$

являющееся частным случаем гиперболического уравнения второго порядка, описывает волны вида  $F(x - ct) + G(x + ct)$ , где функции  $F$  и  $G$ , определяющие профиль волны, произвольны. Однако при этом для описания произвольной бегущей волны  $F(x - ct)$  достаточно уравнения первого порядка

$$\Psi_t = c\Psi_x. \quad (17)$$

Дисперсионное соотношение для этого уравнения имеет вид

$$\omega = ck. \quad (18)$$

◆ В более общем случае линейных волн, распространяющихся в определенном направлении в произвольной диспергирующей среде, закон дисперсии  $f(\omega, k) = 0$  можно записать в виде ряда

$$i\omega(k) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (-ik)^m. \quad (19)$$

Подстановкой решения в виде гармонической волны можно убедиться в том, что такое дисперсионное соотношение может быть получено из уравнения

$$\Psi_t = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\partial_x)^m \Psi, \quad (20)$$

которое для волн, распространяющихся только в одном направлении, оказывается эквивалентным первоначальному волновому уравнению.

◆ Аналогичную процедуру упрощения уравнения в приближении волн, бегущих в одном направлении, можно произвести и с нелинейным волновым уравнением. Рассмотрим ее на примере уравнения Буссинеска (15). Заменяем для удобства параметр  $w \rightarrow c^2$  и сделаем замену переменных  $z = y - ct$ ,  $\xi = y + ct$ .

В новых переменных уравнение (15) принимает вид:

$$4c^2 u_{z\xi} + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left\{ v u^2 + \frac{c^2}{12} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) u \right\} = 0 \quad (21)$$

В приближении волн, бегущих только в одном направлении, производная по одной из переменных много меньше, чем по другой. Поэтому мы можем пренебречь в круглых скобках всеми производными, кроме двойной производной по  $z$ . Интегрируя уравнение, получаем

$$4c^2 u_{\xi} + 2v u u_z + \frac{c^2}{12} u_{zzz} = 0, \quad (22)$$

совпадающее с уравнением Кортевега – де Фриза. То, что задача ФПУ сводится к уравнению КдФ, а наблюдаемое Ферми, Пастой и Уламом восстановление первоначального возмущения объяснялось солитонной природой этого уравне-

ния, было показано Забуски и Крускалом в 1965 году. Именно в их работе впервые появляется термин «солитон».

✧ N.J.Zabusky, M.D.Kruskal “Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states”, Phys.Rev.Lett., **15**, 240-243 (1965).

### § 05 Модель Френкеля-Конторовой

◆ Простейшая механическая модель, предполагающая наличие собственной частоты колебаний  $\omega_0$  у элементов цепочки - это цепочка шариков, связанных пружинками, лежащая на волнистой поверхности. В этом случае потенциальная энергия каждого шарика  $V(\psi_n) = a_0 \omega_0^2 \cos(\psi_n/a_0)$ , и ее учет приводит к уравнению движения

$$\ddot{\psi}_n + \omega_0^2 \sin(\psi_n) = U''(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) \quad (23)$$

Если  $\psi_n$  малы, оно совпадает с (1а). Это уравнение впервые было использовано для описания эволюции дислокаций в кристаллической решетке и носит название модели Френкеля-Конторовой. Несложно видеть, что при не малых отклонениях в континуальном пределе оно сводится к уравнению синус-Гордона, т.е. имеет солитонные решения в виде кинков и бризеров. Однако в дискретной среде солитоны уже не могут играть роль собственных мод - движение дислокации, описываемой кинком, через кристаллическую решетку сопровождается излучением фононов и не описывается точными решениями.

✧ Отметим, что стационарное решение модели Френкеля-Конторовой может быть описано стандартным отображением, представляющим собой консервативную нелинейную систему, обладающую хаотической динамикой.

✧ О.М.Браун, Ю.С.Кившарь "Модель Френкеля-Конторовой", М:Физматлит (2008).

✧ В следующих лекциях будут рассмотрены задачи, возникающие на основе одной из двух систем волновых уравнений: системы уравнений гидродинамики, описывающей акустические волны, и системы уравнений электромагнитных волн, использующихся в нелинейной оптике. Между ними есть важное различие, связанное с ролью дисперсии. В случае акустических волн дисперсия обычно мала, поэтому представляет интерес эволюция пространственного профиля волны, описываемого нелинейными уравнениями типа уравнения простых волн или КдФ. При необходимости описания акустических пучков возникают нелинейные волновые уравнения многих переменных, наиболее известными из которых являются диссипативное уравнение Хохлова-Заболотской

$$(\psi_t + \psi\psi_x)_x = c\Delta_\perp \psi \quad (24)$$

и солитонное уравнение Кадомцева-Петвиашвили

$$(\psi_t + \psi\psi_x - \psi_{xxx})_x = c\Delta_\perp \psi \quad (25)$$

✧ В то же время в оптике дисперсия нелинейных сред достаточно велика, поэтому обычно эффективное взаимодействие возможно только между очень небольшим числом спектральных компонент. Поэтому в оптике обычно стоит задача об эволюции нескольких отдельных частотных мод электромагнитного поля. Более сложные волновые уравнения типа НУШ возникают только при необходимости описать эволюцию поперечных характеристик поля в случае оптических пучков или импульсов.

