

## W05 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

### § 01 Обратная задача рассеяния

◆ *Методом обратной задачи рассеяния* называют метод получения решения задачи Коши для уравнения КдФ и многих других уравнений, имеющих солитонные решения. Этот метод впервые был сформулирован Гарднером, Грином, Крускалом и Миура в 1967г. для уравнения Кортевега - де Фриза. Позднее он был обобщен Захаровым и Шабатом и Абловицем, Каупом, Ньюэллом и Сигуром (задача ЗШ-АКНС) на значительно более широкий класс уравнений, включающий семейства уравнений СГ и НУШ. Для последовательного изложения этого метода требуется как минимум семестровый самостоятельный курс и более фундаментальная математическая подготовка, чем получают студенты физического факультета МГУ. Поэтому здесь будет дано лишь краткое изложение общей схемы метода обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ.

✧ C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura, "Method for solving the Korteweg-de Vries equation", Phys.Rev.Lett., **19**, 1095-1097 (1967)

В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, "Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах", ЖЭТФ, **61**, 118-134 (1971)

M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, "Method for solving the sine-Gordon equation", Phys.Rev.Lett., **30**, 1262-1264 (1973)

◆ Рассмотрим преобразования Бэклунда

$$\begin{aligned}u_x &= -\psi - k^2 - u^2, \\u_t &= 2(\psi - 2k^2)(\psi + k^2 + u^2) + \psi_{xx} - 2u\psi_x,\end{aligned}\tag{1}$$

для уравнений

$$\begin{aligned}\psi_t + 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} &= 0 \\u_t - 6k^2u_x - 6u^2u_x + u_{xxx} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Второе из этих уравнений называют модифицированным уравнением Кортевега - де Фриза (мКдФ). Оно также имеет солитонные решения, которые, очевидно, связаны преобразованиями Бэклунда (1) с солитонными решениями уравнения КдФ. Как мы уже знаем, преобразования Бэклунда устроены так, что уравнения КдФ и мКдФ являются их следствием. При этом первое из них имеет вид уравнения Риккати относительно функции  $u$ , и, поэтому, может быть лианеризовано с помощью подстановки Хопфа-Коула

$$u = \frac{\Phi_x}{\Phi}.\tag{3}$$

После подстановки (3) в (1) и необходимых преобразований получаем систему линейных относительно функции  $\Phi$  уравнений

$$\begin{aligned}\hat{L}\Phi &= -k^2\Phi \\ \Phi_t &= \hat{M}\Phi\end{aligned}\tag{4}$$

где операторы  $\hat{L} = \psi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\hat{M} = \psi_x + C(t) + 2(2k^2 - \psi)\frac{\partial}{\partial x}$ . Уравнение КдФ по-прежнему содержится в этой системе: дифференцируя первое из них по времени и подставляя  $\varphi_t$  из второго, получаем

$$\hat{L}_t \varphi = (\hat{M}\hat{L} - \hat{L}\hat{M})\varphi \quad (5)$$

Можно убедиться, что операторное соотношение  $\hat{L}_t = \hat{M}\hat{L} - \hat{L}\hat{M}$  эквивалентно уравнению КдФ. Если нелинейное уравнение удастся записать в таком виде, то операторы  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$  называют парой Лакса. Таким образом, анализ нелинейного уравнения КдФ сводится к анализу системы двух линейных уравнений (4).

✧ P.D.Lax "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", Comm.Pure Appl.Math., **21**, 467-490 (1968).

◆ Легко видеть, что первое уравнение системы (4) имеет вид стационарного уравнения Шредингера, описывающего процесс рассеяния функции  $\varphi(x, k)$  на потенциале  $\psi(x)$ . При этом потенциал  $\psi(x)$  является одним из решений уравнения КдФ, и нас, конечно, интересуют различные многосолитонные решения. Если бы потенциал был нам известен, то задача о нахождении коэффициентов прохождения и отражения не составила бы труда. Оказывается, верно и обратное – если нам известна совокупность коэффициентов отражения и прохождения при разных значениях энергии  $k^2$ , то с помощью *интегрального уравнения Марченко* можно восстановить рассеивающий потенциал  $\psi(x)$ . Именно поэтому метод называется *обратной задачей рассеяния*.

◆ Предполагая, что потенциал  $\psi(x)$  является солитонным решением, и, поэтому, ограничен в пространстве  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$ , будем искать решения уравнения (4а)  $\varphi_{\pm}(x, k)$  в виде падающих и отраженных волн, имеющих в пределе  $x \rightarrow \pm\infty$  следующие асимптотики:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} \varphi_+(x, k) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} \varphi_-(x, k) = 1. \quad (6)$$

Набор решений  $\varphi_+(x, k)$ ;  $\bar{\varphi}_+(x, k)$ ;  $\varphi_-(x, k)$ ;  $\bar{\varphi}_-(x, k)$ , где черта сверху обозначает комплексное сопряжение, называется решениями Йоста. Вообще говоря, эти решения в неявном виде могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} - k^{-1} \int_{-\infty}^x \psi(y) \sin k(y-x) \varphi_-(y, k) dy; \\ \varphi_+(x, k) &= e^{ikx} + k^{-1} \int_x^{\infty} \psi(y) \sin k(y-x) \varphi_+(y, k) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, множество решений  $\varphi_+(x, k)$ ;  $\bar{\varphi}_+(x, k)$  или  $\varphi_-(x, k)$ ;  $\bar{\varphi}_-(x, k)$  при фиксированном  $k$  является базисом. Поэтому функцию  $\varphi_-(x, k)$  можно записать в базисе  $\{\varphi_+; \bar{\varphi}_+\}$ :

$$\varphi_-(x, k) = a(k)\bar{\varphi}_+(x, k) + b(k)\varphi_+(x, k), \tag{8}$$

где

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{iky} \varphi_-(y, k) dy; \tag{9}$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) e^{-iky} \varphi_-(y, k) dy,$$

что позволяет определить матрицу рассеяния

$$S(k) = \begin{pmatrix} T_+(k) & R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где  $T_+(k) = a^{-1}(k)$  и  $R_+(k) = b(k)a^{-1}(k)$  - коэффициенты прохождения и отражения.

◆ Взаимоднозначная связь данных рассеяния с самим потенциалом  $\psi(x, t)$ , эволюционирующим согласно уравнению КдФ, составляет *первую ключевую идею* метода обратной задачи рассеяния. Под данными рассеяния понимается матрица рассеяния  $S(k)$  для вещественных значений  $k$ , а также набор нормировочных постоянных и отрицательных собственных значений энергии дискретного спектра, соответствующих мнимым значениям  $k$ .

◆ Теперь рассмотрим второе уравнение системы (4) для описания зависимости матрицы рассеяния от времени. Так как  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$ , то при  $x \rightarrow \pm\infty$  оно имеет простой вид

$$\varphi_t = 4k^2\varphi_x + C(t)\varphi. \tag{11}$$

Подставляя в него сначала асимптотику при  $x \rightarrow -\infty$   $\varphi(x) = \varphi_-(x, k) = e^{-ikx}$ , получаем  $C(t) = 4ik^3 = const$ . Теперь используя асимптотику при  $x \rightarrow +\infty$

$\varphi(x) = a(t, k)\bar{\varphi}_+(x, k) + b(t, k)\varphi_+(x, k) = a(t, k)e^{-ikx} + b(t, k)e^{ikx}$ , получаем

$$a(t, k) = a(0, k) = const, \tag{12}$$

$$b(t, k) = b(0, k)e^{8ik^3t}.$$

То, что для уравнения КдФ и других солитонных уравнений эволюция данных рассеяния описывается линейными дифференциальными уравнениями, является *второй ключевой идеей* метода обратной задачи рассеяния.

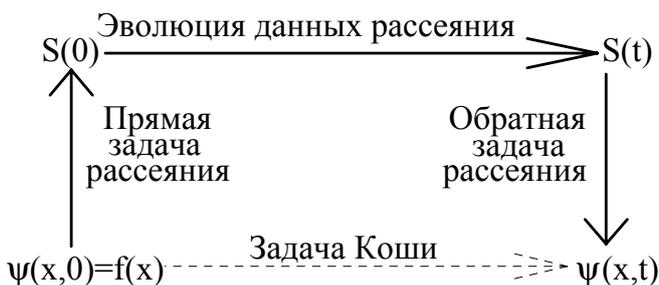
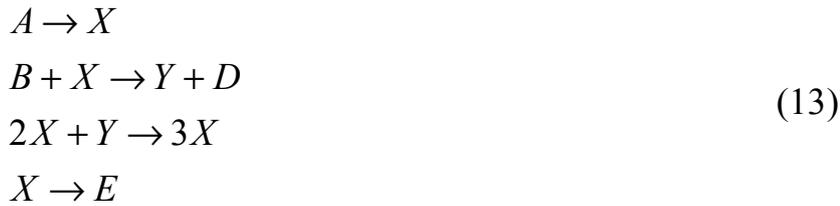


Рис.05.А. Схема метода обратной задачи рассеяния.

◆ Таким образом, по начальному значению функции  $\psi(x,0)$  можно определить данные рассеяния. Зависимость данных рассеяния от времени описывается линейными дифференциальными уравнениями. С помощью уравнения Марченко по данным рассеяния в любой момент времени можно восстановить потенциал  $\psi(x,t)$ , решив тем самым задачу Коши для уравнения КдФ (рис.05.А). Исследование свойств уравнения Марченко, однако, слишком сложно для данного курса. Отметим только, что  $N$ -солитонные решения уравнения КдФ являются *безотражательными потенциалами* с  $R_{\pm} = 0$  для уравнения Шредингера (4а).

## § 02 Возникновение автоволновых решений

◆ Рассмотрим теперь еще один механизм формирования устойчивых решений нелинейных волновых уравнений - возникновение автоволн. Хотя автоволновые решения могут возникать в различных системах, наиболее изучены автоволны, возникающие в диффузионно-реактивных системах (например, в реакции Белоусова-Жаботинского). Классической моделью, описывающей распространение автоколебательных решений в пространстве за счет диффузии, является брюсселятор, называющийся также тримолекулярной моделью химической реакции:



Концентрации веществ  $X$  и  $Y$  описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x_t &= a - (b+1)x + x^2y + d_1\Delta x; \\ y_t &= bx - x^2y + d_2\Delta y. \end{aligned} \quad (14)$$

✧ I.Prigogine, R.Lefever, "Symmetry breaking instabilities in dissipative systems II", J.Chem.Phys., **48**, 1695-1700 (1968).

◆ Как известно, в сосредоточенном случае неподвижная точка  $x = a$ ,  $y = b/a$  теряет устойчивость при  $b > 1 + a^2$ . Линеаризуем уравнения (14) относительно малых возмущений вблизи неподвижной точки в одномерном случае  $u = x - a$ ,  $v = y - b/a$ :

$$\begin{aligned} u_t &= (b-1)u + a^2v + d_1u_{xx}; \\ v_t &= -bu - a^2v + d_2v_{xx}. \end{aligned} \quad (15)$$

Предполагая, что  $u$  и  $v$  имеют вид растущего со временем гармонического возбуждения  $u, v \sim e^{\chi t - ikx}$ , получаем дисперсионное соотношение

$$(\chi + 1 - b + d_1k^2)(\chi + a^2 + d_2k^2) + a^2b = 0 \quad (16)$$

Анализ этого соотношения показывает, что распределенная модель брюсселятора теряет устойчивость при нарушении любого из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} b &> 1 + d_1 k_n^2 + a^2 (1 + d_1 k_n^2) / d_2 k_n^2; \\ b &> 1 + a^2 + (d_1 + d_2) k_n^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $k_n$  - значение волнового вектора, определяющееся граничными условиями. При нарушении первого из неравенств возникают неподвижные диссипативные структуры, при нарушении второго – бегущие автоволны. В двумерном случае это приводит к появлению спиральных волн концентраций.

◆ Для простоты процесс возникновения автоволн в этой модели можно разделить на две части - возникновение автоколебаний в различных точках пространства и распространение фронтов перепадов концентрации от одной точки к другой за счет диффузии. Первая из задач была рассмотрена в курсе теории колебаний, а вторую можно изучать на примере еще более простой модели, рассмотренной в 1937 г. Колмогоровым, Петровским и Пискуновым, описывающей так называемую “волну переброса”.

✧ А.Н.Колмогоров, И.Г.Петровский, Н.С.Пискунов, “Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме”, Бюллетень МГУ, **1**, в.6 (1937)

◆ Рассмотрим эволюцию произвольного начального возмущения в нелинейной диффундирующей среде, описывающуюся уравнением параболического типа

$$\psi_t = \psi_{xx} + F(\psi) \quad (18)$$

с граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, t) = 1, \quad (19)$$

где нелинейная функция  $F(\psi)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} F(0) = F(1) = 0; \quad F'(0) = 1; \\ F(\psi) > 0, \quad F'(\psi) < 1, \quad 0 < \psi \leq 1. \end{aligned}$$

◆ Решением поставленной задачи будет являться бегущая волна  $\psi(x, t) = y(x + Vt)$ , где функция  $y(x)$  - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'' - Vy' + F(y) = 0, \quad (20)$$

удовлетворяющее все тем же граничным условиям, а скорость  $V$  - произвольна. Однако оказывается, что вне зависимости от вида начальных условий скорость распространения возмущения будет приближаться к одному и тому же значению скорости  $V \geq V_c = 2$ , а его профиль - к решению уравнения (20) с этим значением скорости. Именно этим и объясняется возникновение автоволновых решений: распространение возмущений между областями максимума и минимума концентрации того или иного химического вещества в модели брюсселятора происходит за счет движения волны переброса концентрации одной и той же формы с неизменной скоростью.

◆ Для доказательства этого утверждения введем новую переменную  $f = y'$ , преобразовав уравнение (19) к уравнению фазовых траекторий

$$f(df/dy - V) + F(y) = 0. \quad (21)$$

Значение скорости и константа интегрирования этого уравнения первого порядка  $C$  определяются двумя граничными условиями  $f(0, V, C) = 0$  и  $f(1, V, C) = 0$ , вытекающими из граничных условий (19). Легко заметить, что если функция  $F(y)$  - полином нечетного порядка  $n = 2k - 1$ , то решением уравнения (21) будет полином  $k$ -го порядка.

◆ Найдем сначала поведение функции  $f(y)$  вблизи нуля. В этом случае можно считать  $F(y) \equiv y$  и искать решение в виде  $f(y) = ay + b$ . Подставляя его в уравнение (21) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , получаем  $b = 0$  и  $V = a + 1/a$ . Решение уравнения при этом имеет вид  $f(y) \equiv dy/dx = ay$ , откуда получаем закон убывания функции  $\psi(x, t)$  на минус бесконечности:

$$\psi(x, t) = y(x + Vt) \sim \exp\{a(x + Vt)\}.$$

В случае  $V < 2$  значение параметра  $a$  - комплексное. Особая точка  $y = 0$ ,  $f = 0$  меняет свой характер при прохождении скорости значения  $V = 2$ :

$$\begin{cases} 0 < V < 2 - \text{неустойчивый фокус;} \\ V > 2 - \text{неустойчивый узел.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что величина скорости не может быть меньше критического значения  $V_c = 2$ , ч.т.д.

◆ Рассмотрим теперь в качестве примера распространение волны переброса в системе с  $F(y) = y(1 - y^2)$ . Подставляя в (21) решение в виде полинома второй степени, получаем  $V = 3/\sqrt{2} > V_c$  и

$$f(y) \equiv dy/dx = y(1 - y)/\sqrt{2}. \quad (22)$$

Отсюда находим вид волны переброса

$$\psi(x, t) = \left[ 1 + \exp\left\{-\left(\sqrt{2}x + 3t\right)/2\right\}\right]^{-1}. \quad (23)$$

