W05 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

§ 01 Обратная задача рассеяния

◆ *Методом обратной задачи рассеяния* называют метод получения решения задачи Коши для уравнения КдФ и многих других уравнений, имеющих солитонные решения. Этот метод впервые был сформулирован Гарднером, Грином, Крускалом и Миура в 1967г. для уравнения Кортевега - де Фриза. Позднее он был обобщен Захаровым и Шабатом и Абловицем, Каупом, Ньюэллом и Сигуром (задача ЗШ-АКНС) на значительно более широкий класс уравнений, включающий семейства уравнений СГ и НУШ. Для последовательного изложения этого метода требуется как минимум семестровый самостоятельный курс и более фундаментальная математическая подготовка, чем получают студенты физического факультета МГУ. Поэтому здесь будет дано лишь краткое изложение общей схемы метода обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ.

✧ C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura, “Method for solving the Korteweg-de-Vries equation”, Phys.Rev.Lett., **19**, 1095-1097 (1967)

В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, ЖЭТФ, **61**, 118-134 (1971)

M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, “Method for solving the sine-Gordon equation”, Phys.Rev.Lett., **30**, 1262-1264 (1973)

◆ Рассмотрим преобразования Бэклунда

$$\begin{aligned} u_x &= -\psi - k^2 - u^2, \\ u_t &= 2\left(\psi - 2k^2\right)\left(\psi + k^2 + u^2\right) + \psi_{xx} - 2u\psi_x, \end{aligned} \qquad (1)$$

для уравнений

$$\begin{aligned} &\psi_t + 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0 \\ &u_t - 6k^2 u_x - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Второе из этих уравнений называют модифицированным уравнением Кортевега - де Фриза (мКдФ). Оно также имеет солитонные решения, которые, очевидно, связаны преобразованиями Бэклунда (1) с солитонными решениями уравнения КдФ. Как мы уже знаем, преобразования Бэклунда устроены так, что уравнения КдФ и мКдФ являются их следствием. При этом первое из них имеет вид уравнения Риккати относительно функции u, и может быть лианеризовано с помощью подстановки Хопфа-Коула

$$u = \varphi_x / \varphi \,. \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (1) и необходимых преобразований получаем систему линейных относительно функции φ уравнений

$$\begin{aligned} &\hat{L}\varphi = -k^2\varphi \\ &\varphi_t = \hat{M}\varphi \end{aligned} \qquad (4)$$

где операторы $\hat{L}=\psi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\hat{M}=\psi_x+C(t)+2\left(2k^2-\psi\right)\frac{\partial}{\partial x}$. Уравнение КдФ по-прежнему содержится в этой системе: дифференцируя первое из них по времени и подставляя φ_t из второго, получаем

$$\hat{L}_t\varphi=\left(\hat{M}\hat{L}-\hat{L}\hat{M}\right)\varphi \tag{5}$$

Можно убедиться, что операторное соотношение $\hat{L}_t=\hat{M}\hat{L}-\hat{L}\hat{M}$ эквивалентно уравнению КдФ. Если нелинейное уравнение удается записать в таком виде, то операторы $\hat{L}$ и $\hat{M}$ называют парой Лакса. Таким образом, анализ нелинейного уравнения КдФ сводится к анализу системы двух линейных уравнений (4).

✧ P.D.Lax "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", Comm.Pure Appl.Math., **21,** 467-490 (1968).

◆ Легко видеть, что первое уравнение системы (4) имеет вид стационарного уравнения Шредингера, описывающего процесс рассеяния функции $\varphi(x,k)$ на потенциале $\psi(x)$. При этом потенциал $\psi(x)$ является одним из решений уравнения КдФ, и нас, конечно, интересуют различные многосолитонные решения. Если бы потенциал был нам известен, то задача о нахождении коэффициентов прохождения и отражения не составила бы труда. Оказывается, верно и обратное – если нам известна совокупность коэффициентов отражения и прохождения при разных значениях энергии k^2, то с помощью *интегрального уравнения Марченко* можно восстановить рассеивающий потенциал $\psi(x)$. Именно поэтому метод называется *обратной задачей рассеяния*.

◆ Предполагая, что потенциал $\psi(x)$ является солитонным решением, и, поэтому, ограничен в пространстве $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi(x)=0$, будем искать решения уравнения (4а) $\varphi_\pm(x,k)$ в виде падающих и отраженных волн, имеющих в пределе $x\to\pm\infty$ следующие асимптотики:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-ikx}\varphi_+(x,k)=1;\qquad \lim_{x\to-\infty}e^{ikx}\varphi_-(x,k)=1. \tag{6}$$

Набор решений $\varphi_+(x,k)$; $\bar{\varphi}_+(x,k)$; $\varphi_-(x,k)$; $\bar{\varphi}_-(x,k)$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение, называется решениями Йоста. Вообще говоря, эти решения могут быть найдены в неявном виде методом функций Грина:

$$\begin{aligned}\varphi_-(x,k)&=e^{-ikx}-k^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi(y)\sin k(y-x)\varphi_-(y,k)\,dy;\\ \varphi_+(x,k)&=e^{ikx}+k^{-1}\int_{x}^{\infty}\psi(y)\sin k(y-x)\varphi_+(y,k)\,dy.\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, при заданном k множество решений $\varphi_+(x,k)$; $\bar{\varphi}_+(x,k)$ и $\varphi_-(x,k)$; $\bar{\varphi}_-(x,k)$ - два разных базиса. Поэтому функцию $\varphi_-(x,k)$ можно записать в базисе $\{\varphi_+;\ \bar{\varphi}_+\}$:

$$\varphi_-(x,k) = a(k)\overline{\varphi}_+(x,k) + b(k)\varphi_+(x,k), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a(k) &= 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)e^{iky}\varphi_-(y,k)\,dy; \\ b(k) &= \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)e^{-iky}\varphi_-(y,k)\,dy, \end{aligned} \quad (9)$$

что позволяет определить матрицу рассеяния

$$S(k) = \begin{pmatrix} T_+(k) & R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $T_+(k) = a^{-1}(k)$ и $R_+(k) = b(k)a^{-1}(k)$ - коэффициенты прохождения и отражения.

◆ Взаимооднозначная связь данных рассеяния с самим потенциалом $\psi(x,t)$, эволюционирующим согласно уравнению КдФ, составляет *первую ключевую идею* метода обратной задачи рассеяния. Под данными рассеяния понимается матрица рассеяния $S(k)$ для вещественных значений k, а также набор нормировочных постоянных и отрицательных собственных значений энергии дискретного спектра, соответствующих мнимым значениям k.

◆ Теперь рассмотрим второе уравнение системы (4) для описания зависимости матрицы рассеяния от времени. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi(x) = 0$, то при $x \to \pm\infty$ оно имеет простой вид

$$\varphi_t = 4k^2\varphi_x + C(t)\varphi. \quad (11)$$

Подставляя в него сначала асимптотику при $x \to -\infty$ $\varphi(x) = \varphi_-(x,k) = e^{-ikx}$, получаем $C(t) = 4ik^3 = const$. Теперь используя асимптотику при $x \to +\infty$ $\varphi(x) = a(t,k)\overline{\varphi}_+(x,k) + b(t,k)\varphi_+(x,k) = a(t,k)e^{-ikx} + b(t,k)e^{ikx}$, получаем

$$\begin{aligned} a(t,k) &= a(0,k) = const, \\ b(t,k) &= b(0,k)e^{8ik^3t}. \end{aligned} \quad (12)$$

То, что для уравнения КдФ и других солитонных уравнений эволюция данных рассеяния описывается линейными дифференциальными уравнениями, является *второй ключевой идеей* метода обратной задачи рассеяния.

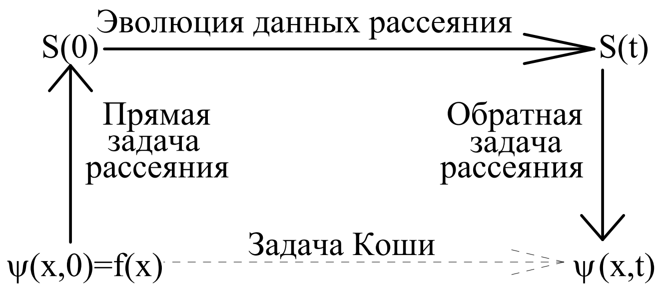

Рис.05.А.
Схема метода обратной задачи рассеяния.

◆ Таким образом, по начальному значению функции $\psi(x,0)$ можно определить данные рассеяния. Зависимость данных рассеяния от времени описывается линейными дифференциальными уравнениями. С помощью уравнения Марченко по данным рассеяния в любой момент времени можно восстановить потенциал $\psi(x,t)$, решив тем самым задачу Коши для уравнения КдФ (рис.05.A). Исследование свойств уравнения Марченко, однако, слишком сложно для данного курса. Отметим только, что N-солитонные решения уравнения КдФ являются *безотражательными потенциалами* с $R_{\pm}=0$ для уравнения Шредингера (4а).

☯