

W04 УРАВНЕНИЯ СИНОСУС-ГОРДОНА И КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

§ 01 Уравнение синус-Гордона

◆ Гиперболическое уравнение вида

$$\Psi_{yy} - \Psi_{zz} = F(\Psi) \quad (1)$$

или, в других координатах,

$$\Psi_{xt} = F(\Psi), \quad (1a)$$

впервые возникшее в теории поля, называют уравнением Клейна-Гордона. Однако еще до появления квантовой механики в дифференциальной геометрии возникло уравнение (1a) с $F(\Psi) = \alpha \sin \Psi$, которое называют уравнением синус-Гордона (СГ):

$$\Psi_{xt} = \alpha \sin \Psi. \quad (2)$$

G.L.Lamb, Rev.Mod.Phys., **43**, 99 (1871)

Отметим, что именно это уравнение описывает распространение волны самоиндуцированной прозрачности. Исключительную роль уравнения СГ в теории нелинейных волновых уравнений определяет тот факт, что из всего семейства уравнений Клейна-Гордона только оно одно имеет солитонные решения.

◆ Найдем решение этого уравнения в виде бегущей волны $\Psi(x, t) = f(x \pm Vt)$.

Подставляя его в (2), получаем уравнение математического маятника

$$Vf'' \pm \alpha \sin f = 0. \quad (3)$$

Знак перед синусом в этом уравнении не имеет значения, так как изменяется при добавлении к неизвестной функции постоянной величины, кратной π . Домножая уравнение на f' и интегрируя один раз, получаем уравнение осциллятора, движущегося в потенциале $U(f) = 2\alpha \cos f / V$:

$$\frac{V}{2} f'^2 + \alpha \cos f = E. \quad (4)$$

Фазовый портрет такого движения показан на рис.W04.A. При $E < -\alpha$ уравнение не имеет решений, при $-\alpha < E < \alpha$ функция f совершает периодические движения в одной из ям потенциала, а при $E > \alpha$ совершает инфинитное движение.

◆ Значение $E = \alpha$ соответствует движению по сепаратрисе, при котором функция f приближается к точке поворота $f_n = 2\pi n$ бесконечно долго. Соответствующее решение описывает уединенное возмущение, стремящееся к постоянным значениям на бесконечности $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi) = \text{const}$. Уравнение (4) в этом

случае легко интегрируется второй раз:

$$f' = 2\sqrt{\alpha/V} \sin(f/2), \quad (5)$$

откуда

$$\ln \frac{1 - \cos(f/2)}{1 + \cos(f/2)} = 2 \left(\sqrt{\alpha/V} \xi + \varphi_0 \right). \quad (6)$$

Обращая полученное выражение, получаем решение уравнения СГ в виде бегущей волны:

$$\operatorname{tg}(\psi/4) = \exp \left\{ \sqrt{\alpha/V} (x \pm Vt) + \varphi_0 \right\}. \quad (7)$$

Полученное решение (рис.W04.B) представляет собой уединенное возмущение, описывающее изменение значения функции на 2π при изменении аргумента от $-\infty$ до $+\infty$. Решение подобного типа называют “кинком” (kink – изгиб *англ.*) в отличие от решения, полученного нами в W03 для НУШ, имеющего форму колокола. Оно похоже на решение уравнения Бюргерса в форме ударной волны (W02, 29б), но в отличие от него является солитоном: при встрече двух кинков они проходят друг сквозь друга без изменения формы и скорости. Чтоб показать это, необходимо получить “двухсолитонное” решение уравнения СГ.

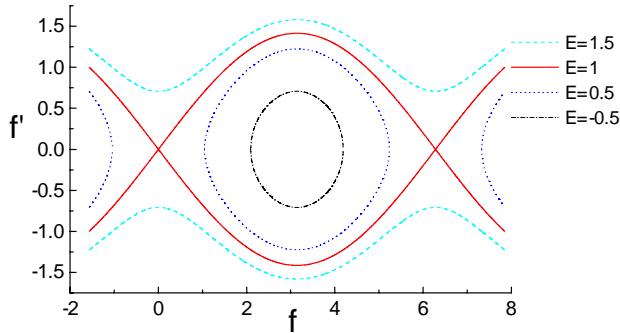


Рис.W04.A.
Фазовый портрет нелинейного осциллятора (3) при $\alpha = V = 1$ при различных значениях энергии.

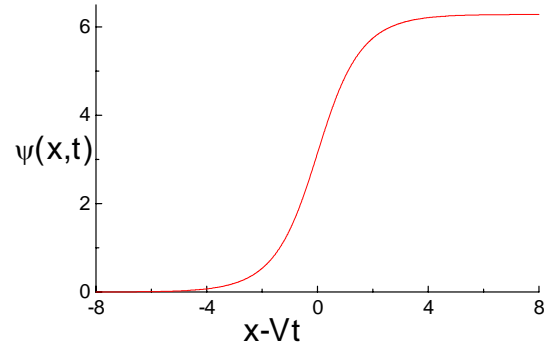


Рис. W04.B.
Вид решения уравнения СГ в виде “кинка” (7) при $\alpha = V = 1$

§ 02 Автопреобразования Бэклунда

◆ При рассмотрении уравнения Бюргерса мы упоминали, что подстановка Хопфа-Коула - половина преобразований Бэклунда, связывающих уравнение Бюргерса с линейным уравнением диффузии. Рассмотрим теперь преобразования Бэклунда для уравнения СГ, имеющие вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi})_x &= a \sin \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi}) \\ \frac{1}{2}(\psi - \tilde{\psi})_t &= \frac{1}{a} \sin \frac{1}{2}(\psi + \tilde{\psi}). \end{aligned} \quad (8)$$

A.V.Baclund, “Einiges uber Curven und Flachentransformationen”, Lund Universitets Arsskrift, 10, 1-12, 1875

Дифференцируя первое уравнение по t , а второе - по x , подставляя значения первых производных опять из (8), складывая или вычитая полученные уравне-

ния и используя равенство $\psi_{xt} = \psi_{tx}$, получаем, что обе функции удовлетворяют одному и тому же уравнению СГ

$$\psi_{xt} = \sin \psi. \quad (2a)$$

Подобные преобразования, связывающие два разных решения одного и того же уравнения, называют автопреобразованиями Бэклунда (АПБ). Подставляя в (8) очевидное решение уравнения СГ $\tilde{\psi}_0 \equiv 0$ и интегрируя один раз каждое из уравнений, легко получаем уже знакомое решение-кинк уравнения СГ

$$\psi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp(ax + t/a + \varphi_0) \quad (7a)$$

◆ Рассмотрим теперь два решения (7a) ψ_1 и ψ_2 с различными параметрами a_1 и a_2 . Предположим, что одно и то же решение ψ_3 связано АПБ с параметром a_1 с решением ψ_2 и АПБ с параметром a_2 - с решением ψ_1 . Тогда мы можем записать первые части АПБ для пар (ψ_0, ψ_1) , (ψ_0, ψ_2) , (ψ_1, ψ_3) и (ψ_2, ψ_3) . Складывая первую и четвертую пару и вычитая из них сумму второй и третьей, получаем выражение без производных, связывающее все четыре решения:

$$a_1 \sin \frac{1}{4}(\psi_0 - \psi_1 + \psi_2 - \psi_3) = a_2 \sin \frac{1}{4}(\psi_0 + \psi_1 - \psi_2 - \psi_3), \quad (9)$$

откуда легко получаем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(\psi_3 - \psi_0) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\psi_2 - \psi_1) \quad (10)$$

Подставляя решения ψ_1 и ψ_2 (7a) в (10), получаем двухсолитонное решение уравнения СГ, описывающее столкновение кинка и антикинка:

$$\psi_3(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \frac{\exp \theta_1 - \exp \theta_2}{1 + \exp(\theta_1 + \theta_2)} \right), \quad (11)$$

где $\theta_i = a_i x + t/a_i + \varphi_i$ - фаза соответствующего решения. График полученного решения показан на рис. W04.C.

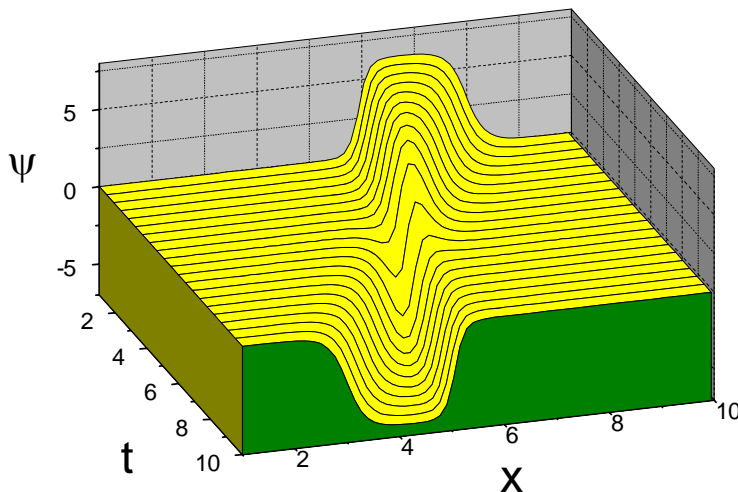


Рис. W04.C.
Двухсолитонное решение уравнения СГ (11) (столкновение кинка и антикинка) с $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$.

§ 03 Бризер

◆ Рассмотрим еще один способ получения решения СГ. Заменой $y = ax + t/a$; $z = ax - t/a$ снова вернемся к виду (1) и будем искать решение в виде $\psi(y, z) = 4 \operatorname{arctg}(F(y)/G(z))$, где функции F и G нам пока неизвестны. Используя эту замену, уравнение СГ можно привести к виду

$$\left(F^2 + G^2\right)\left(\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G}\right) - 2F'^2 - 2G'^2 = G^2 - F^2, \quad (12)$$

где функции F и G зависят от разных независимых аргументов. Дифференцируя это уравнение отдельно по y и отдельно по z и складывая то, что получилось, можно разделить переменные:

$$\frac{1}{FF'}\left(\frac{F''}{F}\right)' = -\frac{1}{GG'}\left(\frac{G''}{G}\right)' = \operatorname{const} = -4k^2. \quad (13)$$

Таким образом, мы получаем отдельные уравнения для F и G , которые можно дважды проинтегрировать:

$$\begin{cases} F'^2 = -k^2 F^4 + \mu_1 F^2 + \nu_1 \\ G'^2 = -k^2 G^4 + \mu_2 G^2 + \nu_2 \end{cases} \quad (14)$$

Подстановкой (14) в (12) несложно убедиться, что $\mu_1 - \mu_2 = 1$ и $\nu_1 + \nu_2 = 0$:

$$\begin{cases} F'^2 = -k^2 F^4 + m^2 F^2 + n^2 \\ G'^2 = -k^2 G^4 + (m^2 - 1)G^2 - n^2 \end{cases} \quad (14a)$$

◆ В общем случае решения этих двух уравнений могут быть выражены через эллиптические интегралы, однако полезно рассмотреть частные случаи. В наиболее простом случае $k = 0$; $m > 1$; $n = 0$ можно получить уже знакомое нам односолитонное решение (7). Вариант $k = 0$; $m > 1$; $n \neq 0$ приводит к также полученному выше двухсолитонному решению (11). Наконец, для случая $k \neq 0$; $n = 0$ существенное значение имеет величина m^2 : если $m^2 > 1$, то мы опять получаем двухсолитонное решение, а вот если $m^2 < 1$, то решение уравнений (14a) приводит к решению нового типа:

$$\psi(x, t) = -4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{m \sin \left\{ \sqrt{1 - m^2} (ax - t/a) + \varphi_2 \right\}}{\sqrt{1 - m^2} \operatorname{ch} \left\{ m(ax + t/a) + \varphi_1 \right\}} \right\}, \quad (15)$$

которое также является солитоном, схоже с солитонным решением НУШ и носит название "бризер". Его можно трактовать как связанное состояние кинка и антикинка, которые, в отличие от решения (11), не имеют энергии для того, чтобы разойтись на бесконечное расстояние.

§ 04 Уравнение КдФ

◆ Для сглаживания разрыва при формировании ударной волны в уравнении простых волн можно добавить член не со второй пространственной производной, а с третьей. В этом случае вместо уравнения Бюргерса мы получим уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ):

$$\psi_t + \alpha \psi \psi_x + \psi_{xxx} = 0. \quad (16)$$

Впервые оно было получено в 1885 году голландскими учеными Кортевегом и де Фризом для описания распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала. Коэффициент α в уравнении изменением масштабов легко может быть произвольно изменен.

✧ Уравнение КдФ было первым нелинейным волновым уравнением, имеющим солитонные решения. Впервые уединенная волна, описываемая этим уравнением, наблюдалась шотландским инженером Скоттом Расселом в 1834 году (он следовал за ней на лошади на протяжении нескольких километров)

J.S.Russel, "Report on waves", British Association Reports, (1844)

D.J.Korteweg, G.Vries "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves", Phil.Mag., **39**, 422-443 (1885)

◆ Внесение в уравнение члена с третьей производной имеет смысл введения в уравнение не диссипации, как в случае с уравнением Бюргерса, а дисперсии. Действительно, пренебрегая квадратичным членом, легко получаем для лианеризованного уравнения КдФ

$$\psi_t + \psi_{xxx} = 0 \quad (16a)$$

дисперсионное соотношение

$$\omega = k^3 \quad (17)$$

◆ Будем искать решение уравнение КдФ в виде бегущей волны. Подставляя неизвестную функцию в виде $\psi(x,t) = f(x - Vt)$ в (16) и интегрируя, получаем уравнение нелинейного осциллятора:

$$f'' + \frac{\alpha}{2} f^2 - Vf - C = 0. \quad (18)$$

При условии $\beta^2 = V^2 + 2\alpha C \geq 0$ добавлением постоянной к неизвестной функции это уравнение может быть сведено к виду

$$f'' + \frac{\alpha}{2} f^2 - \beta^2 f = 0. \quad (18a)$$

Домножая его на f' и снова интегрируя, получаем уравнение

$$f'^2 + \frac{\alpha}{3} f^3 - \beta^2 f^2 = E, \quad (19)$$

описывающее движение частицы в кубическом потенциале. При $-\frac{4\beta^6}{3\alpha^2} \leq E \leq 0$

и $f > 0$ частица совершает финитное периодическое движение. Фазовый портрет такого движения показан на рис.W04.D. Движение при $E = 0$ соответствует движению по сепаратресе и, как и раньше, решению в виде уединенной волны.

Интегрируя (19) в этом случае, получаем решение уравнения КдФ в виде уединенной бегущей волны:

$$\psi(x,t) = \frac{3}{\alpha} \frac{\beta^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}(\beta x - \beta^3 t + \varphi_0)}. \quad (20)$$

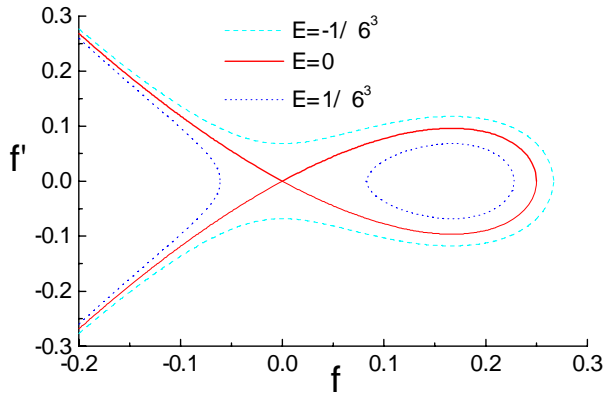


Рис. W04.D.

Фазовый портрет нелинейного осциллятора (18а) при $\alpha = 12$, $a = 1$ и различных значениях энергии.

◆ Полученное решение является солитоном, который и наблюдал С. Рассел. Оно же приближенно описывает волну цунами. Его скорость однозначно связана с амплитудой. Доказательство его устойчивости в общем случае весьма сложно, однако относительно несложно найти двухсолитонное решение уравнения КдФ, описывающее встречу двух таких солитонов. Для этого можно было бы применить, как и в случае с уравнением синус-Гордона, автопреобразования Бэклунда, однако мы воспользуемся другим методом. Уравнение (16) легко преобразуется к виду

$$w_t + \frac{\alpha}{2} w_x^2 + w_{xxx} = 0, \quad (21)$$

где $w_x = \psi$. Теперь применим к этому уравнению подстановку Хопфа-Коула

$$w = \frac{12}{\alpha} \frac{u_x}{u}, \quad (22)$$

позволяющее свести его к однородному относительно функции u (хотя и нелинейному) уравнению Хироты

$$u(u_{xxxx} + u_{xt}) - 4u_x u_{xxx} + 3u_{xx}^2 - u_x u_t = 0. \quad (23)$$

R.Hirota, "Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons", Phys.Rev.Lett., **27**, 1192-1194 (1971)

Отметим, что односолитонное решение (20) для данного уравнения имеет вид

$$u = 1 + \exp \theta, \quad (24)$$

где $\theta = ax - a^3 t + \varphi$. Будем искать решение уравнения (23) в виде разложения по некоторому малому параметру ε :

$$u = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} u^{(\alpha)}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23) и приравнявая коэффициенты при разных степенях ε , получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 u_{xxxx}^{(1)} + u_{xt}^{(1)} &= 0 \\
 u_{xxxx}^{(2)} + u_{xt}^{(2)} &= - \left\{ u^{(1)} \left(\cancel{u_{xxxx}^{(1)}} + \cancel{u_{xt}^{(1)}} \right) - 4u_x^{(1)} u_{xxx}^{(1)} + 3u_{xx}^{(1)2} - u_x^{(1)} u_t^{(1)} \right\} \\
 u_{xxxx}^{(3)} + u_{xt}^{(3)} &= - \left\{ u^{(1)} \left(u_{xxxx}^{(2)} + u_{xt}^{(2)} \right) - 4u_x^{(1)} u_{xxx}^{(2)} - 4u_x^{(2)} u_{xxx}^{(1)} + 6u_{xx}^{(1)} u_{xx}^{(2)} - u_x^{(1)} u_t^{(2)} - u_x^{(2)} u_t^{(1)} \right\},
 \end{aligned} \tag{26}$$

и т.д. Подставляя $u^{(1)}$ в виде

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= \exp \theta_1 + \exp \theta_2, \\
 \theta_i &= a_i x - a_i^3 t + \varphi_i,
 \end{aligned} \tag{27}$$

для уравнения порядка $O(\varepsilon^2)$ получаем

$$u_{xxxx}^{(2)} + u_{xt}^{(2)} = 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2), \tag{28}$$

откуда легко находим

$$u^{(2)} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2). \tag{29}$$

Важным свойством уравнения Хироты является тот факт, что при подстановке $u^{(1)}$ (27) и $u^{(2)}$ (29) в третье уравнение (26) его правая часть оказывается равной нулю, что дает возможность оборвать разложение (25) уже на третьем шаге. После этого можно взять малый параметр $\varepsilon = 1$. Двухсолитонное решение уравнения КдФ (рис. W05.Е) получается из (25,27,29) по формулам

$$\begin{aligned}
 \psi(x, t) &= \frac{12}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln u(x, t), \\
 u &= 1 + \exp \theta_1 + \exp \theta_2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \exp(\theta_1 + \theta_2).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя в (27) сумму из N экспонент, точно таким же образом можно получить N -солитонное решение уравнения КдФ.

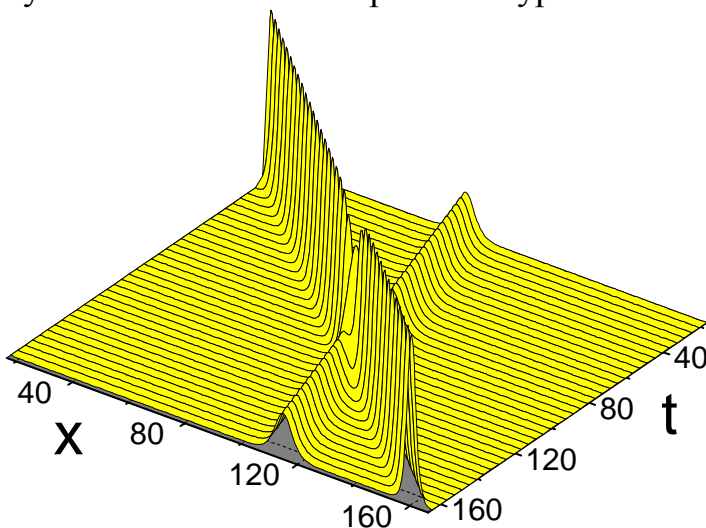


Рис. W05.Е.
Двухсолитонное решение уравнения КдФ (30), $\alpha = 12$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1$.