W02 ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

◆ *Как известно, уравнение*

$$\psi_t + V\psi_x = 0, \qquad (1)$$

является простейшим волновым уравнением. Его решением является любая функция вида $\psi(x,t) = F(t - x/V)$, *описывающая распространение граничного возмущения* $\psi(0,t) = F(t)$ *со скоростью* V *без искажения его формы. Рассмотрим более сложное уравнение*

$$\psi_t + V(x,t,\psi)\psi_x = 0, \qquad (2)$$

которое называют уравнением простых волн, так как в нем скорость волны в какой-либо точке определяется значениями независимых переменных и функции только в этой точке.

§ 01 Простые линейные волны в неоднородных средах

◆ В этом параграфе ограничимся рассмотрением простых линейных волн в стационарных неоднородных средах $V = V(x)$:

$$\psi_t + V(x)\psi_x = 0 \qquad (2а)$$

Уравнение (2а) можно решать методом разделения переменных. Предположим, что неизвестную функцию можно представить в виде $\psi(x,t) = f(x)g(t)$. Подставляя ее в (2а), получим

$$\frac{g_t}{g} = -V(x)\frac{f_x}{f} = C. \qquad (3)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от времени, а правая - только от координаты, поэтому, очевидно, $C = \mathrm{const}$. Интегрируя оба уравнения (3), получаем частное решение уравнения (2а)

$$\psi_c(x,t) = A\exp\left(Ct - \int_{x_0}^{x}\frac{Cdx'}{V(x')}\right) \qquad (4)$$

При мнимом значении C получаем решение в виде монохроматической волны

$$\psi_\omega(x,t) = A\exp\left(i\omega t - i\int_{x_0}^{x}\frac{\omega dx'}{V(x')}\right) \qquad (5)$$

Полученное решение соответствует граничному условию $\psi(x_0,t) = A\exp(i\omega t)$.

◆ В силу линейности уравнения (2а) его общее решение может быть представлено в виде суперпозиции мод (5). В частности, решение, соответствующее граничному условию $\psi(x_0,t) = g(t)$, имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g_\omega \exp\left(i\omega t - i\int_{x_0}^{x}\frac{\omega dx'}{V(x')}\right)d\omega = g\left(t - \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{V(x')}\right), \qquad (6)$$

где g_ω - фурье-образ функции $g(t)$.

◆ Поиск решения уравнения (2а), соответствующего начальному условию $\psi(x,t_0)=f(x)$, может оказаться технически сложнее, но принципиальных трудностей не содержит. Достаточно произвести неравномерное масштабное преобразование, введя новую переменную $\xi(x)$, так чтобы $d\xi = V^{-1}(x)dx$, то есть

$$\xi = \int \frac{dx'}{V(x')}\bigg|_x . \qquad (7)$$

Тогда уравнение (2а) записывается в виде $\psi_t + \psi_\xi = 0$, а начальное условие можно записать в виде сложной функции $f\left(x(\xi)\right)$. Поэтому, решением уравнения в этом случае будет $f\left(x(\xi - t)\right)$.

✧ Результаты этого параграфа легко модифицировать на случай простых линейных волн в однородных, но нестационарных средах. К сожалению, решение одновременно неоднородной и нестационарной задачи сложно получить в общем виде.

§ 02 Простые нелинейные волны в однородных средах

◆ Нелинейное уравнение простых волн

$$\psi_t + V(\psi)\psi_x = 0 \qquad (2б)$$

описывает ситуацию, в которой скорость распространения возмущения зависит от величины возмущения. Действительно, легко проверить, что функция, неявно заданная соотношением

$$\psi(x,t) = F\left(x - V(\psi)t\right), \qquad (8)$$

где F - произвольная функция, является решением уравнения (2б).

✧ Один из наиболее общеизвестных случаев возникновения уравнения (2б) с $V(\psi)=\psi$ - описание звуковых волн произвольной амплитуды с помощью уравнений гидродинамики. Мы еще вернемся к нему во второй части курса. Решение (8) этого уравнения впервые было получено Риманом в 1860 г.

◆ Эволюция решения Римана приводит к возникновению многозначности. Действительно, два различных значения функции $\psi(x_i,0)=\psi_i$, соответствующие в начальный момент двум различным точкам x_i, в момент времени

$$t = \frac{x_1 - x_2}{V(\psi_2) - V(\psi_1)}$$

будут соответствовать одной и той же координате

$$x = \frac{x_1 V(\psi_2) - x_2 V(\psi_1)}{V(\psi_2) - V(\psi_1)} . \qquad (9)$$

Физический смысл такой многозначности зависит от конкретной физической ситуации, моделируемой уравнением простых волн. При описании эволюции пучка слабовзаимодействующих частиц многозначность означает возникновение нетермодинамического *многопотокового* состояния: в одной и той же точке пространства находятся несколько потоков частиц, имеющих различные температуры, плотности и скорости. Подобная ситуация возникает, в частности, при описании эволюции облака темной материи, состоящей из частиц, взаимодействующих между собой только гравитационно.

Если же существование нескольких потоков в одной точке пространства физически невозможно, как, например, для звука в сплошной среде, то ширина нетермодинамической области стремится к нулю, что означает возникновение *разрыва*. В масштабах уравнения (2б) разрыв представляет собой бесконечно тонкую область пространства, где полевые переменные испытывают скачок. Для рассмотрения структуры разрыва необходим переход от гидродинамического к кинетическому подходу и учет взаимодействий на микроскопическом уровне, приводящих к диссипации и дисперсии, отсутствующих в исходном уравнении. Возникновение разрыва происходит через возрастание высших гармоник: синусоидальное возмущение постепенно превращается в пилообразное. Разрыв возникает в момент опрокидывания гребней пилы.

◆ Некоторые свойства разрыва, однако, можно определить без уточнения его структуры. Интегрируя уравнение (2б) в малой окрестности разрыва S (см. рис. W02.A) по обеим координатам и преобразуя интеграл по формуле Грина, получаем

$$\iint_S \left[\psi_t + V(\psi)\psi_x\right] dx dt = \oint_G \left[\psi dx - U(\psi) dt\right] = 0, \qquad (10)$$

где G - граница области S, а $U(\psi) = \int V(\psi) d\psi$. В случае бесконечно тонкого разрыва для контура G, бесконечно близкого к разрыву, учитывая связь скорости и координат разрыва $dx = udt$, из (10) получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta\left[u\psi - U(\psi)\right] dt = 0, \qquad (11)$$

где Δ означает разность величин с двух сторон от разрыва. В силу произвольности пределов интегрирования подынтегральное выражение равно нулю, что дает граничные условия, связывающие скачок функции ψ со скоростью разрыва:

$$\Delta U(\psi) = u\Delta\psi \qquad (12)$$

В системе координат, связанной с разрывом, граничные условия упрощаются - $\Delta U(\psi) = 0$.

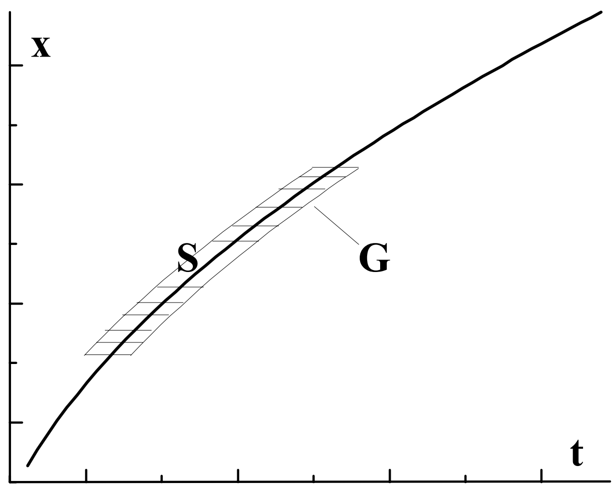

Рис. W02.A.
Линия разрыва, область интегрирования S и ее контур G.

§ 03 Уравнение диффузии

◆ Как известно из курса ММФ, уравнение параболического типа

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\big(G(x)\psi\big)+\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{13}$$

обычно применяется при описании процессов теплопроводности или диффузии. Такой же вид имеет уравнение Фоккера-Планка, используемое в статистической физике для описания эволюции функции распределения.

✧ В соответствии с историей развития теории теплопроводности и диффузии это уравнение в различных случаях может носить название уравнения Фурье или уравнения Эйнштейна-Колмогорова.

◆ В простейшем случае $F(x);G(x)=\mathrm{const}$ заменой переменных $t'=Ft$; $x'=x+Gt$ уравнение (13) приводится к виду

$$\psi_t=\psi_{xx}, \tag{14}$$

Будем искать его решение в виде затухающей гармонической волны

$$\psi_k(x,t)=A\exp(ikx-\alpha t). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), получаем аналог закона дисперсии, связывающий показатель затухания α с волновым вектором k

$$\alpha=k^2. \tag{16}$$

Отметим, что α не зависит от знака волнового вектора. Поэтому гармоническое возмущение $\psi_k(x)=a\cos(kx)+b\sin(kx)$ со временем затухает по закону

$$\psi_k(x,t)=e^{-k^2t}\psi_k(x). \tag{17}$$

Эволюция произвольного начального возмущения $\psi(x,0)$ может быть определена путем его разложения по модам:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k\exp\left(ikx-k^2t\right)dk, \tag{18}$$

$$\psi_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx.$$

◆ Найдем эволюцию дельтаобразного возмущения $\psi_j(x)=\delta\left(x-x_j\right)$.

✧ Примером физической ситуации, описываемой такой математической моделью, может служить процесс диффузии капли краски в жидкости.

◆ Фурье-образ дельтаобразного возмущения имеет вид $\psi_j(k)=e^{-ikx_j}\big/\sqrt{2\pi}$. Подставляя его в (18), получаем решение в виде расплывающегося колокола:

$$\psi_j(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\left(x-x_j\right)^2\big/4t\right). \tag{19}$$

Так же как произвольное начальное возмущение может быть разложено по модам $\psi_k(x)$, оно может быть тривиально представлено в виде суперпозиции дельта-функций, откуда для произвольного возмущения $\psi(x,0)$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x',0)\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4t}\right)dx' \qquad (20)$$

✧ Некорректный пример: рассмотреть эволюцию неограниченного начального возмущения $\psi(x,0)=\exp\left(ax^2\right)$ при помощи решений (18) и (20).

◆ В общем случае произвольных функций $F(x)$ и $G(x)$ получить аналитическое решение уравнения (13) невозможно. В таком случае, как и при решении уравнения Шредингера в квантовой механике, обычно интересуются собственными значениями и функциями уравнения вида $\psi_\lambda(x,t)=\psi_\lambda(x)e^{\lambda t}$:

$$\left\{\frac{d}{dx}F(x)\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx}G(x)\right\}\psi_\lambda=\lambda\psi_\lambda\,. \qquad (21)$$

а также стационарным решением уравнения, соответствующим нулевому собственному значению $\lambda_0=0$

$$\psi_0(x)=C\exp\left(-\int\frac{G(x)}{F(x)}dx\right). \qquad (22)$$

Это решение представляет интерес, т.к. обычно все остальные собственные значения имеют отрицательные действительные части, обуславливающие затухание всех прочих собственных функций.

§ 04 Уравнение Бюргерса

◆ Уравнение диффузии (14) с дополнительным нелинейным членом называется уравнением Бюргерса:

$$\psi_t=\psi_{xx}+V(\psi)\psi_x\,. \qquad (23)$$

Другой путь возникновения этого уравнения - введение диссипативного члена ψ_{xx} в уравнение простых волн (2б) с целью описания структуры разрывов. Ограничимся рассмотрением простейшего нелинейного члена $V(\psi)=\psi$:

$$\psi_t=\psi_{xx}+\psi\psi_x\,. \qquad (23а)$$

Как и решение уравнения диффузии (19), это уравнение инвариантно относительно масштабного преобразования $\psi\to\gamma\psi$, $t\to t/\gamma^2$, $x\to x/\gamma$. Вообще говоря, это означает, что решение этого уравнения можно искать в виде $\psi(x,t)=x^{-1}f(z)$, где $z=x^2/t$, также инвариантного относительно данного масштабного преобразования. Такая *автомодельная подстановка* позволяет сократить число независимых переменных, однако в результате мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$4z^2f''+zf'(2f+z-2)+2f-f^2=0\,, \qquad (24)$$

решение которого весьма нетривиально.

◆ Уравнение (23а) имеет решение в виде бегущей волны $\psi(x,t)=f(x-Vt)$, где вид функции f определяется дифференциальным уравнением

$$f_{xx} + (V + f)f_x = 0, \tag{25}$$

которое заменой $\tilde{f} = f + V$ сводится к уравнению (25) с $V = 0$:

$$f_{xx} + ff_x = 0. \tag{25a}$$

Уравнение (25а) элементарно интегрируется:

$$f_x + f^2/2 = C\,. \tag{26}$$

Дальнейшие преобразования зависят от C. Возможны три принципиально различных варианта: $C = 0$; $\pm 1/2$. Для них получаем три типа решения:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{2}{x+d} \\ f_+(x) &= \mathrm{th}\{(x+d)/2\}. \\ f_-(x) &= \mathrm{tg}\{(x+d)/2\} \end{aligned} \tag{27}$$

Каждое из этих решений порождает двухпараметрическое семейство решений уравнения Бюргерса (23а):

$$\psi(x,t) = \gamma f_j\left(\gamma x - \gamma^2 Vt\right) - \gamma V\,, \tag{28}$$

однако ограниченным является лишь решение f_+ (27б), которое часто называют решением в виде ударной волны.

◆ Все полученные решения имеют вид бегущих волн, зависящих от одной переменной, являющейся линейной функцией координат. Более общее решение уравнения (23а) может быть получено с помощью подстановки Хопфа-Коула:

$$\psi = \varphi_x = 2\frac{u_x}{u} = 2\frac{\partial}{\partial x}\ln u \tag{29}$$

E.Hopf, “The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$”, Comm. Pure Appl. Math., **3**, 201-230 (1950); J.D.Cole, “On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics”, Quart. Appl. Math., **9**, 225-236 (1951)

Подставляя (29) в (23а) и производя интегрирование по x, получаем уравнение относительно φ:

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + \varphi_x^2/2 + C(t)\,. \tag{30}$$

где $C(t)$ - произвольная функция времени. Подставляя в полученное уравнение вторую часть (29) $\varphi = 2\ln u$, после несложных преобразований получаем линейное уравнение

$$u_t = u_{xx} + C(t)u, \tag{31}$$

Функция ψ инвариантна к преобразованиям $u(x,t) \to \lambda(t)u(x,t)$, что позволяет заменой $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\exp\int C(t)dt$ свести уравнение (31) к рассмотренному выше уравнению диффузии (14). Возможность свести нелинейное уравнение (23а) к линейному уравнению диффузии - уникальное свойство уравнения Бюргерса.

Подстановку Хопфа-Коула не является полноценной заменой зависимой функции: по известной функции ψ она позволяет определить функцию u только с точностью до произвольной функции времени. Для полного определения u необходимо второе условие, определяющее ее временную производную:

$$2\psi_x + \psi^2 = 4\frac{\partial}{\partial t}\ln u\,. \tag{32}$$

Совокупность соотношений (29) и (32) является преобразованиями Бэклунда, связывающими уравнения Бюргерса и диффузии. Оба эти уравнения могут быть восстановлены по преобразованиям Бэклунда: например, дифференцируя (29) по времени, а (32) - по координате, и используя равенство смешанных производных второго порядка для функции $\varphi = 2\ln u$ $\left(\varphi_{xt} = \varphi_{tx}\right)$, получаем уравнение Бюргерса.

Комбинируя решение (20) для уравнения диффузии и подстановку Хопфа-Коула, получаем общее решение уравнения Бюргерса

$$\psi(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\ln\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{x'}\psi(x'',0)\,dx'' - \frac{(x-x')^2}{4t}\right)dx'\right] \tag{33}$$

☯