W01 ВОЛНЫ. КИНЕМАТИКА.

С точки зрения автора, курс ***теории волн*** *(равно как и теории колебаний) является не столько курсом общей или теоретической физики, сколько продолжением математических курсов, читавшихся студентам на младших курсах. В этом смысле теория колебаний является продолжением курса дифференциальных уравнений, а курс теории линейных волн - продолжением курсов, посвященных линейным уравнениям в частных производных. Поэтому первую часть данного курса, посвященную изложению некоторых элементов* ***теории нелинейных уравнений в частных производных****, можно считать дополнением к курсу ММФ:*

дифференциальные уравнения 1-го порядка	*уравнения в частных производных 1-го порядка*
линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка	*ММФ, теория линейных волн*
теория колебаний, нелинейная динамика	*теория нелинейных волн*

К сожалению, более последовательное изложение теории нелинейных волн требует значительно большего времени и математической подготовки, которая обычно отсутствует у студентов четвертого курса физического факультета. Во второй части курса происходит возвращение к более простым уравнениям теории волн, но уже с точки зрения их физических приложений. Задачи, рассмотренные во второй части курса, подобраны по принципу демонстрации роли ***дисперсионных соотношений*** *волновых уравнений (как одного из базовых понятий экспериментальной физики) для решения различных задач оптики, радиофизики и акустики.*

§ 01 Кинематика. Основные определения

◆ *Волной* или *волновым процессом* называют процесс передачи колебательных движений от одних частей системы другим.

✧ В этом смысле простейшим примером волнового процесса являются биения в системе двух связанных осцилляторов.

◆ В связи с этим при описании волны рассматривается эволюция *поля*, то есть временная зависимость совокупности физических величин (называемых *полевыми переменными*) $\psi\left(\vec{r},t\right)$, зависящих также и от пространственных переменных. Закон движения полевых переменных обычно определяется системой дифференциальных уравнений в частных производных или их конечно-разностных аналогов.

◆ В дальнейшем мы будем использовать ряд стандартных моделей волновых процессов: плоская волна, бегущая и стоячая волны, гармоническая и монохроматическая волны, волновой пакет и затухающая волна.

◆ *Плоской* называется волна, зависящая только от одной пространственной координаты $\psi\left(\vec{r},t\right)=\psi\left(\vec{\kappa}\vec{r},t\right)=\psi\left(\kappa_x x+\kappa_y y+\kappa_z z,t\right)$. Выбрав координатную ось x вдоль направления волнового вектора $\vec{\kappa}$, можно записать ее в виде $\psi\left(x,t\right)$.

◆ ***Бегущей волной*** будем называть тип движения, при котором полевые переменные зависят только от линейной комбинации времени и пространственных переменных: $\psi\left(\vec{r},t\right)=\psi\left(t-\vec{\kappa}\vec{r}\right)$. Зависимость функции $\psi\left(\xi\right)$ от переменной $\xi=t-\vec{\kappa}\vec{r}$ иногда называют амплитудой или профилем волны, а саму переменную ξ - фазой. Профиль бегущей волны со временем без изменений перемещается в пространстве со скоростью $\vec{V} = \vec{\kappa} / |\vec{\kappa}|^2$. Профиль бегущей волны может быть как периодическим, так и непериодическим.

◆ Таким образом, состояние поля бегущей волны через время t определяется начальным состоянием поля, перенесенным на расстояние $\Delta\vec{r} = \vec{V}t$. Другими словами, бегущая волна инвариантна относительно преобразований Галилея $t \to t' = t + T$, $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{V}T$, $\psi \to \psi' = \psi$.

◆ ***Стоячей волной*** называется волновое поле, закон движения которого может быть представлен в виде $\psi(\vec{r},t) = C(\vec{r})q(t)$.

◆ *Монохроматическим* (от греч. mónos — один, единственный, и chromatos — цвет) называется движение волнового поля, при котором значения его компонент в произвольной точке пространства меняются со временем по гармоническому закону с частотой ω. *Монохроматическая волна* может быть описана законом движения $\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r})\cos\omega t + B(\vec{r})\sin\omega t$ или $\psi(\vec{r},t) = C(\vec{r})\cos(\omega t - \varphi(\vec{r}))$. В последнем выражении $C(\vec{r})$ называется амплитудой или огибающей, а $\varphi(\vec{r})$ - фазой монохроматической волны.

◆ Исключительной моделью считается ***бегущая гармоническая волна***:

$$\psi(\vec{r},t) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right) = A\sin\left(-\vec{k}\left(\vec{r} - \vec{V}t\right) + \varphi_0\right) \qquad (1)$$

Величина $\vec{k}$, играющая роль частоты пространственных колебаний функции ψ при постоянном значении времени, называется *волновым вектором,* а ее модуль - волновым числом. Отношение $\vec{V}_{ph} = \omega\vec{k} / |\vec{k}|^2$ называют *фазовой скоростью* волны, то есть скоростью, с которой перемещается конкретное значение *фазы* гармонической волны $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0$. Фаза волны меняется на 2π на *длине волны* $\lambda = 2\pi / |\vec{k}|$. Параметр A называют *амплитудой гармонической волны.*

✧ В каком-то смысле бегущая и стоячая волны - два предельных случая представления зависимости параметров волнового процесса от координат, хотя это разделение - весьма условное: любую стоячую волну часто можно представить в виде суперпозиции бегущих и наоборот. Например, *стоячую гармоническую волну* можно представить в виде суммы двух бегущих гармонических волн с одинаковыми частотами, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\psi(\vec{r},t) = 2A\sin(\omega t)\cos(\vec{k}\vec{r}) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) + A\sin\left(\omega t + \vec{k}\vec{r}\right)$$

◆ Для описания волн, отличающихся от описанных выше, часто используется понятие модулированных волн. *Модулированной* называется волна, закон движения которой имеет какой-либо стандартный вид (бегущей или стоячей волны, или еще какой-либо), параметры которого зависят от времени или пространственных переменных. В случае слабой зависимости этих параметров волна называется *слабомодулированной*.

◆ Типичными примерами слабомодулированных волн являются *волновой пакет*

$$\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t)\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right), \tag{2}$$

где $\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} << \omega$ и $\frac{\left|\vec{\nabla} A\right|}{A} << \left|\vec{k}\right|$, и *затухающая бегущая волна*

$$\psi(\vec{r},t) = f\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)e^{-\alpha t},\ \alpha \ll \omega. \tag{3}$$

◆ Как преобразования Галилея определяют эволюцию бегущей волны, так и в общем случае эволюция волнового поля может быть определена путем задания закона преобразования координат и полевых переменных, позволяющего определить состояние волнового поля в произвольный момент времени, если известно его состояние в начальный. Рассмотрим несколько примеров, ограничиваясь для простоты одним пространственным измерением:

t	x	ψ	**примеры волнового процесса**
$t+T$	$x+VT$	ψ	бегущая волна
$t+T$	$x+VT$	$\alpha(T)\psi$	затухающая бегущая волна
$t+T$	x	$\alpha(T)\psi$	стоячая волна
$t+T$	$\beta(T)x$	ψ	расплывающийся волновой пакет
$t+T$	$\beta(T)x$	$\alpha(T)\psi$	диффузия
$\nu(X)t$	$x+X$	ψ	фотон в гравитационном поле

Отдельного упоминания заслуживают ситуации, при которых возможно задать состояние волнового поля в асимптотике через бесконечно большой промежуток времени, несмотря на сложность задания преобразований, определяющих состояние волны в произвольный момент времени:

при $T \to \infty$		$\psi = \sum \psi_n\colon\ \forall\psi_n$	**разложение по модам**
$t+T$	$x+V_nT$	ψ_n	мода
$t+T$	$x+V_nT$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_n \neq const$	диспергирующая бегущая волна
$t+T$	$x+V_nT$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi_n = const$	солитон
$t+T$	x	$\forall\psi\exists!\psi_\infty$	автоволновой процесс

Однако в большинстве случаев, как уже говорилось, волновой процесс задан не подобными преобразованиями, а дифференциальными уравнениями в частных производных, часто нелинейными. Поэтому собственно задачей теории волн является нахождение аналогичных законов преобразований координат и волнового поля, соответствующих этим уравнениям, позволяющих при условии задания необходимых начальных или граничных условий найти решение определенной физической задачи.

§ 02 Замена переменных и преобразования координат

◆ Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных волновых уравнений, необходимо уточнить терминологию, связанную с заменами переменных и преобразованиями координат, так как теория волн имеет дело с функциями, зависящими более чем от одной переменной.

◆ Будем использовать x и t для обозначения независимых переменных (хотя не всегда они имеют смысл пространственной и временной переменных) и $\psi = \psi(x,t)$ - для обозначения зависящей от них функции.

◆ *Точечной заменой независимых и зависимых переменных* называют произвольные преобразования вида $x' = f(x,t)$, $t' = g(x,t)$ и $\tilde{\psi} = F(\psi,x,t)$. Они существенно не меняют структуру нелинейного уравнения.

◆ *Масштабом* (пространственным, временным или каким-либо еще) называют характерный параметр задачи соответствующей размерности. Если таких параметров одинаковой размерности несколько - говорят, что задача имеет несколько масштабов. Например, в задаче о дифракции электромагнитных волн на отверстии есть два пространственных масштаба - длина волны и размер отверстия, а в задаче о дифракции на краю экрана - только один.

При изменении единиц измерения все масштабы соответствующей размерности меняются в одно и то же число раз. Поэтому м*асштабным преобразованием* будем называть преобразование вида $x' = \alpha x$, $t' = \beta t$, $\tilde{\psi} = \gamma\psi$. Иногда масштабное преобразование какого-либо волнового уравнения, определенное условием или условиями $F(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{const}$, не меняет его вида. В этом случае говорят, что волновое уравнение *инвариантно* относительно этого масштабного преобразования. Иногда это позволяет сократить количество независимых переменных в уравнении.

◆ Преобразованием *годографа* называется точечное преобразование, при котором роли зависимой и одной из независимых переменных меняются местами: вместо поиска решения $\psi(x,t)$ мы ищем решение в неявном виде $x(\psi,t)$. Рассмотрим, к примеру, нелинейное уравнение $\psi_t \psi_x^2 = a\psi_{xx}$. Дифференцируя выражение $x = x(\psi,t)$, получаем:

$$0 = x_t + x_\psi \psi_t;\ 1 = x_\psi \psi_x;\ 0 = x_{\psi\psi}\psi_x^2 + x_\psi \psi_{xx}.$$

Отсюда выражаем производные ψ через производные x:

$$\psi_t = -x_t / x_\psi;\ \psi_x = 1/x_\psi;\ \psi_{xx} = -x_{\psi\psi} / x_\psi^3.$$

Подставляя их в первоначальное уравнение, получаем линейное уравнение диффузии $x_t = a x_{\psi\psi}$. Обычно преобразование годографа применяется в более сложных случаях - в системах двух и более связанных уравнений (например, в гидродинамике).

◆ Преобразования зависимых переменных в уравнениях в частных производных могут иметь и более сложный вид, так как производные функции не однозначно определяют саму функцию. Например, преобразование вида

$\tilde{\psi}_x = F(\psi, \psi_x, x, t)$ не является однозначной заменой зависимой переменной, так как теперь функция $\tilde{\psi}$ может быть определена только с точностью до произвольной функции времени. В подобном случае обычно используют несколько соотношений, связывающих как пространственные, так и временные производные функций:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x &= F\left(\tilde{\psi}, \psi, \psi_x, \psi_t, \psi_{xx}, ..., x, t\right) \\ \tilde{\psi}_t &= G\left(\tilde{\psi}, \psi, \psi_x, \psi_t, \psi_{xx}, ..., x, t\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

Такие преобразования не являются независимыми, так как $\tilde{\psi}_{xt} = \tilde{\psi}_{tx}$. Поэтому уравнение $F_t = G_x$ должно либо быть тождеством, либо быть эквивалентно первоначальному волновому уравнению. В последнем случае преобразования (4) называют *преобразованиями Бэклунда.*

◆ Еще один тип замены полевых переменных - преобразование Фурье.

§ 03 Преобразование Фурье, дельта-функция и функция Грина.

◆ Из курса ММФ известно, что большую роль для уравнений в частных производных играют гармонические функции и разложение произвольной функции в интеграл Фурье:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \qquad (5)$$

позволяющее заменить дифференциальные и интегральные операции алгебраическими:

$$-i\omega f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \qquad (6)$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (7)$$

Подставляя прямое преобразование Фурье в обратное, получаем

$$f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') f(t) dt,$$

где

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega \qquad (8)$$

◆ *Дельта-функция Дирака* $\delta(t)$ - так называемая *обобщенная функция*, обладающая следующими свойствами:

$$\delta(t) = 0, \ t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \right) \qquad (9)$$

✧ Обобщенные функции - класс математических объектов, в отличии от обычных функций не имеющие четко определенного математического смысла вне интеграла. Обычно обобщенные функции играют роль ядра интегрального преобразования или функционала, ставящего в соответствие функции другую функцию или число.

◆ Дельта-функция может быть представлена в виде пределов

$$\delta(t)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha t}{\pi t},\ \delta(t)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2t^2+1\right)},$$

и др. В физике дельта-функция обычно моделирует возмущение, размеры которого много меньше всех остальных масштабов задачи. Интеграл от дельта-функции - ступенчатая функция Хэвисайда

$$\Theta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')\,dt'=\begin{cases}0, & t<0\\ 1/2, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}\ - \tag{10}$$

- также, вообще говоря, обобщенная функция

◆ Решение волнового уравнения $\psi(x,t)=G(x,t)$ при начальном или граничном условии $\psi(x,0)=\delta(x)$ $\left(\psi(0,t)=\delta(t)\right)$ называют *функцией Грина.* Для линейных волновых уравнений нахождение функции Грина эквивалентно решению уравнения, так как произвольное начальное возмущение можно представить в виде суммы дельта-функций.

§ 04 Спектральное представление.

◆ Типичными примерами волн, представляющих интерес для современной физики, являются упругие и электромагнитные волны. Специфика их экспериментального исследования связана с высокими значениями частоты и скорости распространения таких волн, что весьма осложняет прямое наблюдение профиля волны. В связи с этим хорошо развиты экспериментальные методы, основанные на регистрации отдельных спектральных компонент исследуемой волны, имеющих определенные частоту и направление распространения (волновой вектор). Отчасти еще и поэтому математический аппарат, используемый в теории волн, широко использует спектральное представление, основанное на Фурье-преобразовании полевых переменных.

◆ В общем случае анализ закона движения $\psi(x,t)$ может быть произведен с помощью двумерного фурье-преобразования

$$\psi_{\omega k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\psi(x,t)\exp(-i\omega t+ikx)\,dx\,dt \tag{11}$$

В первую очередь представляют интерес случаи, в которых полученный в результате преобразования фурье-образ функции $\psi(x,t)$ отличен от нуля не на всей $\omega-k$-плоскости, а только на одной или нескольких кривых. Функциональную зависимость $\omega(k)$, заданную этими кривыми, называют *дисперсионным соотношением* или *законом дисперсии*.

✧ Фурье-образом гармонической бегущей волны является δ-функция, изображающаяся точкой на $\omega - k$ -плоскости. Этим и обусловлена ее исключительность.

◆ Фурье-образу произвольной бегущей волны соответствует множество точек на прямой $\omega = Vk$. Для непериодической бегущей волны это множество непрерывно, тогда как для периодической волны - дискретно: n-ая точка соответствует n-ой гармонике в разложении периодической функции $\psi(\xi)$ в ряд Фурье. В более общем случае дисперсионное соотношение определяет кривую на $\omega - k$ -плоскости. В этом случае волна представляет собой суперпозицию гармонических волн, распространяющихся каждая со своей фазовой скоростью. Явление зависимости фазовой скорости от частоты волны $V_{ph} = V_{ph}(\omega)$ называется *дисперсией*.

◆ Рассмотрим эволюцию волнового пакета

$$\psi(x,0) = A(x)e^{ik_0 x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_k \exp(ik_0 x + ikx)dk \qquad (12)$$

в среде с законом дисперсии $\omega(k)$. Так как каждая Фурье-гармоника возмущения распространяется со своей скоростью, получаем

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_k \exp\left\{ik_0 x + ikx - i\omega(k + k_0)t\right\} dk \qquad (13)$$

Разлагая $\omega(k)$ в ряд около значения k_0, можно представить (13) в виде

$$\psi(x,t) = A(x,t)e^{ik_0(x - V_{ph}t)}, \qquad (14)$$

где

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_k \exp\left(ik(x - V_g t) - \frac{i}{2} \left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} k^2 t - ... \right) dk \qquad (15)$$

Величина $V_g = \dfrac{d\omega}{dk}$, которую называют *групповой скоростью,* имеет смысл скорости перемещения огибающей волнового пакета: если можно пренебречь всеми высшими производными $\omega(k)$, закон эволюции волнового пакета будет иметь вид $\psi(x,t) = A(x - V_g t)e^{ik_0(x - V_{ph}t)}$. Следующие члены в разложении закона дисперсии описывают расплывание волнового пакета, т.е. изменение его формы, поэтому использование термина "групповая скорость" имеет смысл лишь при условии $\dfrac{d\omega}{dk} \gg k\dfrac{d^2\omega}{dk^2}$.

◆ Как уже говорилось, затухающей называют волну, амплитуда которой уменьшается при распространении в пространстве или со временем (в зависимости от постановки задачи).

$$\psi(x,t) = f(x - Vt)e^{-\alpha t} \qquad (2)$$

Однако искать Фурье-образ данного выражения (требующий интегрирования с бесконечными пределами) физически некорректно, так как оно является неограниченным. Корректным является поиск спектра волны, возникшей в результате ее возбуждения в какой-то точке пространства или в какой-то момент. В последнем случае возникшая волна будет иметь вид

$$\psi(x,t) = \Theta(t) f(x - Vt) e^{-\alpha t}, \qquad (2a)$$

где $\Theta(t)$ - функция Хэвисайда (10). Фурье-образ такой волны имеет вид:

$$\psi_{\omega k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} f(x - Vt)\exp(-i\omega t + ikx - \alpha t)\,dt = \frac{i}{\omega - kV - i\alpha}\frac{f_k}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (16)$$

В экспериментальных условиях обычно регистрируется не комплексная амплитуда спектральной компоненты, а ее энергия, т.е. квадрат ее модуля:

$$|\psi_{\omega k}|^2 = \psi_{\omega k}\psi^*_{\omega k} = \frac{1}{(\omega - kV)^2 + \alpha^2}\frac{f_k^2}{2\pi}, \qquad (17)$$

то есть регистрируемый спектр имеет форму линии Лоренца на $\omega - k$-плоскости вместо одномерной дисперсионной кривой $\omega(k)$ в случае отсутствия затухания. Параметр затухания α определяет ширину линии Лоренца, т.е. масштаб убывания фурье-компонент волны при удалении от центра полосы. Аналогичный вывод может быть сделан и для диспергирующих сред с затуханием.

✧ Возможная интерпретация формулы (17): в среде с затуханием одна и та же спектральная компонента распространяется одновременно с различными фазовыми скоростями, что и приводит к ее затуханию.

◆ Наконец, для нелинейной среды характерно наличие взаимодействия между различными спектральными компонентами, что приводит к тому, что дисперсионная кривая на $\omega - k$-плоскости расплывается, как и в случае затухания. Только в исключительных случаях эффекты дисперсии и нелинейности полностью компенсируют друг друга.

✧ В этих случаях говорят о наличии солитонного решения.

◆ Таким образом, анализ волнового движения в присутствии как затухания, так и нелинейности с помощью двумерного фурье-преобразования теряет свою эффективность. Более полезно в этом случае использовать фурье-преобразование только по одной координате, показывающее зависимость спектральных компонент волнового процесса от другой координаты. Например, для краевой задачи временн**о**е фурье-преобразование

$$\psi_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-i\omega t}dt \qquad (18)$$

дает эволюцию различных частотных компонент волны при ее распространении в пространстве. Подобный анализ позволяет отличить нелинейный процесс от затухающей волны: если при линейном затухании все частотные компоненты уменьшаются одинаково, то при нелинейном процессе соотношения между различными частотными компонентами изменяются.

☯