ЛЕКЦИЯ #14
КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬ И ХАОС

◆ Рассмотренные выше модели были привязаны к эволюции (в пространстве параметров) регулярного движения, которое изначально было **периодическим**. Неподвижные точки на двумерных отображениях можно рассматривать как следы предельного цикла на сечении Пуанкаре. Периодические режимы исключительно важны для систем со знакопостоянной диссипацией, но не исчерпывают всех режимов регулярного движения. Наиболее общим видом такого движения является **квазипериодическое** движение (§1.02) с несколькими частотами ω_i. В диссипативных системах квазипериодическое (QP) движение свойственно ограниченной области в пространстве параметров. В других областях движение может быть периодическим (P) или хаотическим (Ch). Установление закономерностей изменения характера движения при переходе между этими областями представляет принципиальный интерес.

§14.01 Синусное отображение окружности

◆ Если трехмерная автономная система - поток совершает квазипериодическое движение с двумя частотами (QP_2), то инвариантное множество на сечении Пуанкаре представляет замкнутую кривую. То же относится и к двумерной неавтономной системе - потоку с периодическим возмущением. При переходе к хаосу инвариантное множество будет лежать вблизи этой кривой. Пусть инвариантное множество задано отображением

$$\rho' = F(\rho,\theta), \qquad \theta' = G(\rho,\theta). \tag{1}$$

Если размер инвариантного множества по радиусу ρ невелик (аттрактор - узкая полоса), его форму то можно описать функциональной зависимостью функциональной зависимостью $\rho(\theta)$, и исключением переменной ρ свести отображение плоскости на себя к отображению окружности на себя

$$\theta' = G(\rho(\theta),\theta), \tag{2}$$

представляющему одномерное отображение. Таким образом, некоторые особенности перехода от квазипериодического двухчастотного движения к хаосу можно исследовать с помощью одномерной модели отображения окружности на себя.

◆ В качестве примера рассмотрим модель синусного отображения окружности на себя.

◆ *Синусным отображением окружности* (sine-circle map) называется динамическая система - отображение с угловой динамической переменной θ (по традиции θ измеряется в единицах полного угла; $0 \le \theta < 1$), двумя параметрами Ω и K и уравнением движения

$$\theta' = \left\{ \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta \right\}, \qquad (3)$$

где фигурные скобки $\{,\}$ означают операцию взятия дробной части.

Для того, чтобы отображение отрезка на себя $\theta' = M(\theta)$ было обратимо, необходимо, чтобы функция $M(\theta)$ была монотонной. Для синусного отображения (3) это условие сводится к требованию отсутствия нулей у множителя устойчивости

$$A(\theta) = \frac{dM}{d\theta} = 1 - K \cos 2\pi\theta \qquad (4)$$

исключающему наличие экстремумов у $M(\theta)$. Таким образом, синусное отображение обратимо при $K \le 1$ и необратимо при $K > 1$.

◆ Рассмотрим основные свойства синусного отображения в области обратимости $K \le 1$. При $K = 0$ синусное преобразование сводится к повороту окружности на постоянный угол Ω, равный числу вращения α (см. определение числа вращения в § 4.01), и ни при каком значении $\Omega \ne 0$ неподвижных точек нет. В дальнейшем мы будем называть Ω затравочным числом вращения. Рассмотрим неподвижные точки отображения, соответствующие малым значениям Ω при $K > 0$. Они определяются уравнением

$$\theta = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta, \qquad (5)$$

откуда

$$\frac{2\pi\Omega}{K} = \sin 2\pi\theta. \qquad (6)$$

Если выполнено условие

$$\Omega < \frac{K}{2\pi}, \qquad (7)$$

то уравнение (5) имеет два корня, причем меньший, лежащий в области $\theta < \pi/2$, есть устойчивая неподвижная точка. Таким образом, всюду в области (7) синусное отображение имеет одну устойчивую неподвижную точку, соответствующую движению с числом вращения $\alpha = 0$.

Эти неподвижные точки существуют только в области достаточно малых значений Ω. Рассмотрим теперь другие неподвижные точки, которые возникают при значениях Ω, близких к единице. Для них положение неподвижных точек определяется уравнением

$$\theta + 1 = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\theta. \tag{8}$$

Такие неподвижные точки существуют при условии

$$\Omega > 1 - \frac{K}{2\pi}. \tag{9}$$

В этом случае устойчива неподвижная точка с большим значением θ; она соответствует движению с числом вращения $\alpha = 1$.

◆ Рассмотрим теперь цикл длины 2. При $1 >> K > 0$ естественно искать такие циклы в окрестности линии $\Omega = 1/2$. Положим $\Omega = 1/2 + \varepsilon$, где $\varepsilon << 1$. Уравнение для неподвижных точек квадрата синусного отображения окружности будет иметь вид

$$2\varepsilon = \frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\theta - \frac{K}{2\pi}\sin\left[2\pi(\theta + \varepsilon) - K\sin 2\pi\theta\right]. \tag{10}$$

Считая ε малой величиной более высокого порядка по сравнению с K и раскладывая правую часть (10) по K, получаем уравнение

$$\varepsilon = \frac{K^2}{8\pi}\sin 4\pi\theta. \tag{11}$$

Таким образом, на плоскости $\Omega - K$ область полуцелого резонанса, в которой число вращения $\alpha = 1/2$, расположена внутри полосы

$$\frac{1}{2} - \frac{K^2}{8\pi} < \Omega < \frac{1}{2} + \frac{K^2}{8\pi}. \tag{12}$$

Числовые расчеты показывают, что область полуцелого резонанса заполняет почти всю эту полосу, при этом выражение (12) имеет достаточно высокую точность даже при $K = 1$ (аналитическая оценка ширины полосы синхронизации $\Delta\Omega = (4\pi)^{-1} = 0.07958$, численный расчет дает $\Delta\Omega = 0.07396$).

✧ Оценить ширину полосы синхронизации с числами вращения $\alpha = 1/3$ и $\alpha = 2/3$ при малых K.

Таким образом, на плоскости управляющих параметров $\Omega - K$ области изученных нами резонансов имеют вид расширяющихся с увеличением K полос, схлопывающихся в точки при $K \to 0$. Эти полосы принято называть *языками Арнольда* (Arnold's tongues). Внутри этих полос движение является периодическим - имеет место *синхронизация* (mode locking, frequency locking - L).

◆ Можно показать, что каждому рациональному значению числа вращения α соответствует свой язык Арнольда. С ростом K их ширины возрастают. Мера областей значений Ω, соответствующих иррациональным числам вращения, убывает при $K \to 1$ степенным образом:

$$\mu(K) \propto (1 - K)^{\beta}, \tag{13}$$

где $\beta = 0.34$ [JBB84]. Таким образом, при $K = 1$ области синхронизации почти полностью перекрывают весь интервал значений Ω. Движение может быть квазипериодическим (обладать иррациональным числом вращения α) только на границах областей синхронизации, имеющих меру ноль.

[JBB84] - Jensen M.H., Bak P., Bohr R. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps. Phys. Rev., 1984, v.30, p. 1960-9.

При $K = 1$ график зависимости числа вращения α от параметра Ω состоит из бесконечно большого числа горизонтальных отрезков. Этот график принято называть *чертовой лестницей* (devil's staircase).

◆ Рассмотрим теперь свойства синусного отображения окружности при $K > 1$. Начнем с частного случая $\Omega = 0$. Неподвижная точка $\theta = 0$ устойчива при $K < 2$, а при $K = 2$ она теряет устойчивость. Одновременно в окрестности малых θ появляется устойчивый цикл периода 2 - значение $K = 2$ является точкой бифуркации удвоения периода. Это - признак каскада удвоений периода: следующее удвоение периода происходит при $K = 3.44$, еще одно при $K = 3.5055$ - в результате происходит переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, каскад заканчивается при $K = 3.5247$.

Найдем оценку порога хаоса методом, основанным на приближенном вычислении показателя Ляпунова. Примем в нулевом приближении, что инвариантное распределение угла θ не зависит от начального числа вращения Ω и равномерно в интервале $0 \le \theta < 1$: $W_0(\theta) = 1$. Тогда, усредняя локальный показатель Ляпунова, получаем

$$\sigma(K) = \int_0^1 \ln|1 - K\cos 2\pi\theta| d\theta = \ln\frac{K}{2}. \qquad (14)$$

Из условия $\sigma(K_c) = 0$ находим порог хаоса: $K_c = 2$. Упрощения, положенные в основу этой оценки, слишком грубы. Фактически граница области хаоса - линия $K_c(\Omega)$ - имеет сложный вид, в бесконечном числе точек касаясь линии $K = 1$, однако среднее положение границы $\langle K_c(\Omega) \rangle = 2.17$ неплохо согласуется с найденной выше оценкой.

✧ В отличие от логистического отображения, синусное отображение окружности может обладать бистабильностью. Так, при значениях параметров $\Omega = 0.33$ и $K = 1.4$ аттракторами системы являются цикл C_3 и цикл C_4. Меры соответствующих бассейнов равны $\mu_3 = 0.69$ и $\mu_4 = 0.31$ соответственно.

Поведение показателя Ляпунова $\sigma(K)$ при заданном затравочном числе вращения Ω похоже на то, которое наблюдается для логистического отображения - общая тенденция к росту при увеличении K и наличие окон периодичности, в которых новые циклы возникают за счет тангенциальных бифуркаций.

◆ При изменении одного управляющего параметра (например, K при постоянном Ω) переход к хаосу с подавляющей вероятностью будет происходить от периодического движения через каскад бифуркаций или от квазипериодического - к периодическому и далее через каскад бифуркаций.

✧ Переход от квазипериодического движения к хаотическому можно осуществить, если менять два параметра K и Ω так, чтобы результирующее число вращения α оставалось неизменным. Для каждого заданного иррационального числа вращения α существует максимальное значение K_c такое, при котором движение теряет устойчивость и становится хаотическим. Вблизи точки порога зависимость показателя Ляпунова от превышения над порогом имеет вид

$$\sigma(K) \propto (K - K_c)^{\gamma} \qquad (15)$$

где γ - показатель степени, близкий к единице и слабо зависящий от числа вращения α [JP85] и одинаковый для всех отображений окружности с кубической точкой перегиба. Для золотого числа вращения ($\alpha = \mathbf{g} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$) $\gamma = 0.948$, для серебряного ($\alpha = \mathbf{s} = \sqrt{2}-1$) $\gamma = 0.954$.

[JP85] - Jensen M.H., Procaccia I. Chaos via quasiperiodicity: Universal scaling laws in the chaotic regime. Phys. Rev. A, 1985, v.32, no.2, p.1225-1228.

Таким образом, при переходе от квазипериодического движения к хаотическому в случае общего положения переход происходит через синхронизацию. Возможность наблюдать непосредственный переход от квазипериодического к хаотическому движению имеет чисто теоретический характер.

§ 14.02 Квазипериодичность и бифуркация Хопфа

◆ Появление в спектре движения новой частоты (ω_1 при смене устойчивого равновесия устойчивым предельным циклом, ω_2 при смене предельного цикла устойчивым движением на двумерном торе) происходит в результате *бифуркации Хопфа.*

[2, с.415 • 3, с.106 • 4, с.89-92 • 5, с.131 • 6, с.41 • 7, с.160 • 8, с.30, • 9, с.48].

Если при изменении управляющего параметра λ в области $\lambda < \lambda_H$ существует устойчивая неподвижная точка, при $\lambda > \lambda_H$ неподвижная точка неустойчива, а аттрактором является близкий к ней устойчивый предельный цикл, то в точке λ_H происходит *бифуркация Хопфа.*

◆ Простейшим примером модели, обладающей бифуркацией Хопфа, является двумерный автономный поток с уравнениями движения (в полярных координатах - динамические переменные ρ и φ)

$$\dot{\rho} = \rho\left(\lambda - \rho^2\right), \qquad \dot{\varphi} = \omega \qquad (16)$$

(λ и ω - параметры). Первое из уравнений имеет две неподвижные точки: $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = \sqrt{\lambda}$. При $\lambda < 0$ первая точка устойчива, аттрактором является неподвижная точка - начало координат, а при $\lambda > 0$ устойчива вторая - аттрактором служит предельный цикл - окружность радиуса $\sqrt{\lambda}$.

§ 14.03 Переход "тор - хаос": отображение Канеко

◆ При второй бифуркации Хопфа - бифуркации рождения тора - предельный цикл теряет устойчивость, и на его месте появляется устойчивый тор. На сечении Пуанкаре неподвижная точка сменится окружающим ее контуром. Это явление и последующую эволюцию аттрактора можно изучить на моделях отображения плоскости на себя.

◆ *Отображением Канеко* (Kaneko mapping) [K84] называется динамическая система - отображение с динамическими переменными x, y, параметрами a, b и уравнениями движения

$$x' = bx + (1-b)\left(1 - ay^2\right), \quad y' = x. \tag{17}$$

[K84] - Kaneko K. - Prog. Theor. Phys., 1984, 72, 2, 202-15.

Управляющим считается параметр a; в числовых примерах ниже $b = 0.3$. Локальная диссипация отображения Канеко определяется выражением: $\Lambda(\vec{x}) = -\ln\left|2a(1-b)y\right|$. Диссипация положительна при $|y| < Y$, где $Y = \left[2a(1-b)\right]^{-1}$, и отрицательна вне этой полосы.

◆ Неподвижные точки $\vec{o}_\pm$ отображения (17) имеют координаты

$$x_\pm = y_\pm = \frac{\pm\sqrt{1+4a} - 1}{2a} \tag{18}$$

Движение точек: при $a \to 0$ $x_+ \to 1$, $x_- \to -\infty$; при $a \to \infty$ $x_+ \approx \approx x_- \approx 1/\sqrt{a} \to 0$. При малых a точка $\vec{o}_+$ устойчива - лежит в области, где $\Lambda > 0$. Точка $\vec{o}_+$ пересекает линию $y = \lambda$ при значении $a = a_H$:

$$a_H = \frac{3-2b}{4(1-b)^2} = 1.2245 \tag{19}$$

При этом она теряет устойчивость, а в ее окрестности появляется тор - инвариантная кривая, окружающая точку $\vec{o}_+$. С ростом a диаметр тора возрастает (при малых превышениях над порогом - примерно по закону $D \propto \sqrt{a - a_H}$, ср. конец предыдущего параграфа), а тор становится все более извилистым. Дальнейшая эволюция типов движения описана в следующей таблице (значения a соответствуют порогам при увеличении параметра).

$a \rightarrow$	Тип движения
1.796	L_{31} синхронизация
1.803	QP_2 квазипериодическое
1.920	L_{84} синхронизация
1.940	Ch хаотическое
1.948	L_{62} синхронизация
2.003	Ch хаотическое
2.520	--- аттрактор исчезает ---

✧ Такая смена режимов является типичной. Другим примером является отображение Карри - Йорке [9, с.191-199], где переход "тор - хаос" происходит через синхронизацию L_3.

◆ Осцилляции тора перед переходом к хаосу связаны с тем, что вблизи области существования седлового цикла форма тора близка к форме неустойчивых многообразий составляющих его точек и имитирует гетероклиническую структуру последних.

§ 14.04 Сценарий Рюэля - Такенса - Ньюхауза (RTN)

🕮 [2, с.480 • 5, с.133 • 7, с.163-165 • 8, с.66 • 9, с.184].

◆ Рассмотренный выше переход "тор - хаос" проходит через переход от периодического к квазипериодическому двухчастотному движению, которое сменяется синхронизацией и хаосом. Такая картина типична для потоков с $K=3$ (отображений с $K=2$). Возникает вопрос: возможны ли при больших K последующие бифуркации Хопфа с появлением произвольно большого числа несоизмеримых частот ω_3, ω_4 и т.д. (так называемый *сценарий Ландау*)? Ответ принято считать отрицательным на основании следующей теоремы Рюэля - Такенса - Ньюхауза

RTN В любой окрестности квазипериодического трехмерного движения на торе T^3 есть движение со странным аттрактором.

✧ Первоначально теорема была доказана для четырехмерных торов T^4 [RT71], а затем обобщена на трехмерные торы T^3 [NRT78].

➾ [RT71] - Ruelle D., Takens F. - Comm. Math. Phys., 1971, 20, 2, 167-92.
➾ [NRT78] - Newhouse S., Ruelle D., Takens F. - Comm. Math. Phys., 1978, 64, 1, 35-40.

Хотя **RTN** есть теорема существования (бассейны притяжения странных аттракторов м.б. исчезающе малы), ее часто принято истолковывать так:

Устойчивое трехчастотное квазипериодическое движение невозможно.

При изменении управляющего параметра одновременно с бифуркацией Хопфа, при которой движение становится квазипериодическим трехчастотным (QP_3), возникает хаотическое движение со странным аттрактором, обладающее непрерывным спектром частот. Эта последовательность бифуркаций образует *сценарий Рюэля - Такенса - Ньюхауза* (RTN- сценарий).

✧ Известны натурные эксперименты, в которых наблюдался переход к хаосу по сценарию RTN [GS75, SG78]. В этих опытах исследовались гидродинамические системы, в которых число эффективных степеней свободы изменяется при изменении управляющего параметра.

- [GS75] - Gollub J.P., Swinney H.L. - Phys. Rev. Lett., 1975, 35, 927-30.
- [SG78] - Swinney H.L., Gollub J.P. - Phys. Today, 1978, 31, 8, 41-9.

✧ Известны многочисленные контрпримеры расширенному толкованию RTN - теоремы. В численных [GOY83] и натурных экспериментах наблюдалось устойчивое квазипериодическое движение с тремя [CL88], четырьмя и пятью [WK+84] частотами.

- [GOY83] - Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. - Phys. Rev. Lett., 1983, 51, 5, 339-42.
- [CL88] - Cumming A., Linsay P.S. - Phys. Rev. Lett., 1988, 60, 26, 2719-22.
- [WK+84] - Walden R.W., Kolodner P., Passner A., Surko C. - Phys. Rev. Lett., 1984, 53, 242-5.

Таким образом, сценарий RTN следует рассматривать как один из **возможных** путей перехода от квазипериодического движения к хаотическому.

EOL
☯