

ЛЕКЦИЯ #13
ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 3
ОТОБРАЖЕНИЕ ХЕНОНА
ФРАКТАЛЫ

§ 13.01 Сценарий Помо - Манневиля:
Переход к хаосу через перемежаемость - 2

◆ Продолжим рассмотрение перехода к хаосу через перемежаемость на основе отображения отрезка в себя, которое при малых ε описывается зависимостью

$$x' = x + x^2 + \varepsilon \quad (1)$$

При $\varepsilon \ll 1$ изменение x за одну итерацию мало, и отображение может быть заменено дифференциальным уравнением (ср. § 4.02 и § 6.03):

$$\frac{dx}{dn} = x^2 + \varepsilon \Rightarrow x = x_0 + \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} n\sqrt{\varepsilon} \quad (2)$$

Время (число шагов) выхода фазовой точки из ламинарной зоны равно

$$N(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right], \quad (3)$$

после чего фазовая точка вновь попадает в турбулентную зону.

◆ Будем считать, что из турбулентной зоны фазовая точка возвращается в ламинарную зону в λ равномерно распределенные точки x_0 . При $\lambda \ll 1$ функцию распределения можно считать равномерной:

$$W(x_0) \approx \operatorname{const} \cong (2\lambda)^{-1} \quad (|x_0| < \lambda), \quad W(x_0) \cong 0 \quad (|x_0| > \lambda) \quad (4)$$

Средняя длительность \bar{N} (число шагов) фазы ламинарного движения

$$\bar{N} = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} N(x_0) dx_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (5)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина \bar{N} почти не зависит от λ : $\bar{N} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

◆ Рассмотрим поведение показателя Ляпунова при переходе к хаосу по сценарию РМ. Найдем фактор ламинарной неустойчивости Σ_L - средний вклад в $\Sigma \ln|A(x_n)|$ от движения в ламинарной зоне:

$$\Sigma_L(x_0) = \sum_{n=0}^{N(x_0)} \ln|1 + 2x_n| \approx \int_0^N \ln|1 + 2x(n)| dn \approx \int_{x_0}^{\lambda} \frac{\ln(1 + 2x)}{x^2 + \varepsilon} dx. \quad (6)$$

При $\lambda \ll 1$ можно разложить логарифм в ряд. Тогда

$$\Sigma_L(x_0) \approx \ln\left(\frac{\varepsilon + \lambda^2}{\varepsilon + x_0^2}\right). \quad (7)$$

Усредняя величину $\Sigma_L(x_0)$ с функцией распределения $W(x_0)$ (4), получаем

$$\Sigma_L = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \Sigma_L(x_0) dx_0 \approx 2 - 2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (8)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина почти не зависит от λ : $\Sigma_L = 2$. Прохождение фазовой точкой турбулентной зоны вносит в $\Sigma \ln|A(x_n)|$ некоторый положительный вклад Σ_T . Пренебрегая длительностью пребывания точки в турбулентной зоне, для показателя Ляпунова I - модели получаем оценку

$$\sigma \approx \kappa \sqrt{\varepsilon} \quad (9)$$

где

$$\kappa = \frac{2}{\pi} (2 + \Sigma_T) > 1.273 \quad (10)$$

Зависимость показателя Ляпунова от превышения порога является мягкой.

✧ Простая модель отображения отрезка $(0,1)$ на себя, локально описываемая формой (1), дается формулами

$$x' = 1 - \mu x \left(\frac{1}{2} - x\right) \quad \left(x < \frac{1}{2}\right), \quad x' = 2x - 1 \quad \left(x > \frac{1}{2}\right).$$

Порогу хаоса соответствует значение $\mu_c = 6 + \sqrt{32} = 11.6568$. Численные расчеты дают для этой модели значение $\kappa \approx 7.4$.

§ 13.02 Кризисы и сценарий GOY

◆ Для логистического отображения при **уменьшении** μ в точке $\mu_f = 4$ имеется порог рождения хаоса при разделении странного аттрактора и неустойчивой неподвижной точки. Перестройка хаотического аттрактора (рождение, уничтожение, изменение формы) в результате совпадения неустойчивого инвариантного множества с границей аттрактора называется *кризисом* (**crisis**). Возникновение хаотических аттракторов через кризис было исследовано Гребоги, Оттом и Йорке [GOY83] и образует *GOY-сценарий* перехода к хаосу.

✧ Отметим сходство и контраст с РМ-сценарием: в РМ хаос **исчезает** при рождении пары устойчивого и неустойчивого множеств (точек или циклов); в GOY хаос **исчезает** при столкновении устойчивого (хаотического) аттрактора и неустойчивой неподвижной точки.

◆ Описанный выше тип кризиса, при котором неустойчивая точка сливается с хаотическим аттрактором на его границе, называется *граничным кризисом* (**boundary crisis**). У логистического отображения имеется и другой тип кризиса.

В окне периодичности W_3 неустойчивый цикл длины 3 при увеличении μ сталкивается с полосами хаотического аттрактора, возникшего по F-сценарию. В результате скачком изменяется размер аттрактора. Соответствующие значения параметра μ таковы: $\mu_{W_{3F}} = 3.8495$, $\mu_{W_{3GOY}} = 3.8658$ ($\delta\mu \approx 1.6 \cdot 10^{-2}$). Такой тип перестройки аттрактора называется *внутренним кризисом* (*interior crisis*).

∞ [GOY83] - Grebogi C., E. Ott E., Yorke J.A. - Physica D, 1983, 7, 181-200.

§ 13.03 Отображение Хенона:

**определение, неподвижные точки
хаотический аттрактор**

📖 [2, с.419-422 • 5, с.112-115 • 7, с.141 • 8, с.37-40 • 9, с.148-154].

В качестве примера двумерных диссипативных отображений рассмотрим отображение Хенона.

◆ **Отображением Хенона (Henon mapping)** [H76] называется динамическая система - отображение с динамическими переменными x, y , параметрами a, b и уравнениями движения

$$x' = 1 + y - ax^2, \quad y' = bx. \quad (11)$$

∞ [H76] - Henon M. - Commun. Math. Phys., 1976, 50, 69.

◆ Отображение (11) - его оператор будем обозначать через \hat{H} - обратимо Якобиан отображения имеет постоянную величину: $J = \text{Det } \hat{A} = -b$. Диссипация системы (см. § 3.02) $\Lambda(\vec{x}) = -\ln|b|$ постоянна. При $|b| < 1$ (11) есть сжимающее отображение.

◆ Координаты неподвижных точек \vec{o}_{\pm} отображения (11) определяются формулами

$$x_{\pm} = \frac{1}{2a} \left[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \right], \quad y_{\pm} = bx_{\pm} \quad (12)$$

(в численных примерах $b = 0.3$). При $a \rightarrow 0$,

$$x_+ \approx \frac{1}{1-b}, \quad x_- \approx -\frac{1-b}{a} \rightarrow \infty. \quad (13)$$

При $a \rightarrow \infty$,

$$x_+ \approx -x_- \approx \frac{1}{\sqrt{a}} \rightarrow 0. \quad (14)$$

Точка $\vec{o}_- = (x_-, y_-)$ всегда неустойчива, а точка $\vec{o}_+ = (x_+, y_+)$ устойчива при $a < a_1 = 3(1-b^2)/4 = 0.3675$. При $a > a_1$ начинается каскад бифуркаций удвое-

ния, приводящий к возникновению хаоса по F-сценарию при $a_c = 1.058$. При $a_c < a < a_* = 1.55$ система совершает аперидическое движение.

◆ Найденный в численном эксперименте хаотический аттрактор отображения Хенона [2, с.421; 5, с.114; 7, с.142; 8, с.39; 9, с.149] имеет вид пучка параболических дуг, охватывающих начало координат. Можно указать область \mathcal{S} , которая оператором \hat{H} отображается в себя и содержит все точки аттрактора. Неподвижная точка \vec{o}_+ лежит на внешней границе аттрактора, а собственный вектор матрицы устойчивости $\hat{A}(\vec{o}_+)$, соответствующий неустойчивому направлению ($|\lambda_1| > 1$), касателен к внешней кривой аттрактора. Таким образом, аттрактор модели Хенона тесно связан с неустойчивым многообразием W_u седловой неподвижной точки \vec{o}_+ .

◆ Найдем приближенное аналитическое выражение для формы аттрактора отображения Хенона. При малом b значения y малы, поэтому можно принять в нулевом приближении $y = 0$. Из (11₁) $x' = 1 - ax^2$, а из (11₂) $x = y'/b$. Подставляя второе выражение в первое и опуская штрихи, получаем уравнение для аттрактора первого приближения:

$$x = 1 - \frac{a}{b^2} y^2. \quad (15)$$

Во втором приближении возьмем из (15) $y = \pm \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1-x}$. Подстановка в первое из уравнений отображения дает

$$x' = 1 \pm \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1-x} - ax^2 \quad (16)$$

Подставляя из второго из уравнений отображения $x = y'/b$ и опуская штрихи, получаем уравнение для аттрактора второго приближения формулу:

$$x = 1 - \frac{a}{b^2} y^2 \pm \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - \frac{y}{b}} \quad (17)$$

В этом приближении аттрактор имеет две ветви. Дальнейшие итерации увеличивают число ветвей параболических кривых. Ту же картину дают численные эксперименты: при последовательных итерациях число наблюдаемых ветвей аттрактора увеличивается, стремясь к бесконечности. Аттрактор модели Хенона есть система квазипараллельных линий; поперечная структура которой самоподобна, как канторово множество.

§ 13.04 Канторово множество и фракталы

◆ Канторово множество в широком смысле определяется как компактное, нигде не плотное, несчетное множество. Примером является канторово множество крайних третей \mathbf{C}_{02} (G. Cantor, 1883). Для системы отрезков установим

процедуру устранения из каждого данного отрезка его средней трети. Начиная с отрезка $[0,1]$, повторим процедуру бесконечное число раз. Множество точек, остающееся в пределе, есть множество \mathbf{C}_{02} .

1. Мера множества \mathbf{C}_{02} равна нулю. Суммарная длина удаленных отрезков,

$$L_{\Sigma} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1/3}{1-2/3} = 1, \quad (18)$$

совпадает с длиной начального отрезка.

2. Множество \mathbf{C}_{02} несчетно - равномощно множеству точек отрезка $[0,1]$. Точки \mathbf{C}_{02} определяются в трюичной системе числами $\{0; a_1, a_2, a_3, \dots\}$ с $a_i = 0$ или 2. Заменяв символ "2" на "1", получим все числа из отрезка $[0,1]$ в двоичной записи.

◆ Множество \mathbf{C}_{02} обладает *самоподобием*: оно может быть разбито на $N (= 2^k)$ множеств, подобных исходному, но имеющих в $n (= 3^k)$ раз меньший масштаб длины. Для самоподобного множества M величина

$$D_S = \frac{\ln N}{\ln n} \quad (19)$$

называется *размерностью самоподобия (similarity dimension)*.

✧ Величина D_S называется размерностью, так как для отрезка, квадрата и куба (самоподобных множеств) $D_S = 1, 2, 3$ соответственно, в согласии с векторной их размерностью. Для канторова множества \mathbf{C}_{02} $D_S = \ln 2 / \ln 3 = 0.631$

◆ Для множеств без регулярной структуры необходимо более широкое определение размерности. Если ограниченное множество M принадлежит d -мерному евклидову пространству \mathbf{R}^d , и $N(\varepsilon)$ есть минимальное число d -мерных кубов со стороной ε , накрывающих все точки множества, то величина

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{|\ln \varepsilon|} \quad (20)$$

называется *емкостью (capacity)*, или *фрактальной размерностью (fractal dimension)*, множества M .

✧ Подсчет числа занятых точками инвариантного множества квадратов с уменьшающимися сторонами использовался при численном расчете меры хаотической компоненты стандартного отображения (§ 4.04). Таким образом, в [UF85] показано, что фрактальная размерность хаотической компоненты стандартного отображения равна двум: $D_F = 2$.

✧ Для множества \mathbf{C}_{02} емкость и размерность самоподобия равны: $D_S = D_F$.

◆ Множества с нецелыми значениями емкости D_F называются *фракталами (fractals)* (B. Mandelbrot, 1975).

§ 13.05 Фракталы и хаос

☰ [3, с.233(?) • 4, с.424 • 5, с.130 • 6, с.66 • 7, с.146].

◆ Аттрактор - фрактал называются *странным аттрактором* (**strange attractor**). Хаотические аттракторы обычно являются странными.

✧ Термин "странный аттрактор" введен Рюэлем и Такенсом в 1971 г. [RT71] при рассмотрении структуры проекции аттрактора системы - потока с $K = 4$ на сечение Пуанкаре.

∞ [RT71] - Ruelle D., Takens F. - Commun. Math. Phys., 1971, 20, 167-92.

✧ Хаотический аттрактор **не обязательно** странный. Например, для логистического отображения при $\mu = 4$ инвариантная плотность $W(x)$ непрерывна (§ 12.03), откуда следует $D_F = 1$.

✧ Странный аттрактор **не обязательно** хаотический. Например, для логистического отображения на границе каскада удвоений периода, при $\mu = \mu_c = 3.5699$, фрактальная размерность аттрактора $D_F = 0.538$ [ChM84], а показатель Ляпунова $\sigma(\mu_c) = 0$. Другие примеры приведены в [G+84].

∞ [ChM84] - Chang S.-J., McCown J. - Phys. Rev. A, 1984, 30, 2, 1149-51.

∞ [G+84] - Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. - Physica D, 1984, 13, 261-8.

◆ Фрактальная размерность аттрактора связана с показателями Ляпунова. Рассмотрим эту связь на примере диссипативного двумерного отображения \hat{T} с характеристическими показателями Ляпунова $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$. Векторы, направленные вдоль собственного вектора неустойчивого направления, растягиваются (в среднем) в $\lambda_1 = e^{\sigma_1} > 1$ раз, векторы вдоль собственного вектора устойчивого направления (в среднем) сжимаются - умножаются на фактор $\lambda_2 = e^{\sigma_2} < 1$. Накроем аттрактор квадратами со стороной ε и сделаем n итераций. Накрывая возникший при преобразовании параллелограмм квадратами со стороной $\lambda_2^n \varepsilon$, получаем:

$$N(\lambda_2^n \varepsilon) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n N(\varepsilon) \quad (21)$$

Считая, что $N(\varepsilon) = A\varepsilon^{-D}$, получаем:

$$D_F = 1 + \frac{\sigma_1}{|\sigma_2|}. \quad (22)$$

✧ Для аттрактора Хенона ($a = 1.4, b = 0.3$) $D_F = 1.264$.

◆ Обобщение приведенного выше рассуждения на случай аттрактора в K -мерном фазовом пространстве позволяет заключить следующее.

КУ Если для динамической системы K -мерным фазовым пространством движение на аттракторе обладает спектром характеристических показателей Ляпунова $\{\sigma_i\}$ ($1 \leq i \leq K$), и k - наибольшее целое число такое, что

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i > 0,$$

то фрактальная размерность аттрактора дается выражением

$$D_F = k + \frac{1}{|\sigma_{k+1}|} \sum_{i=1}^k \sigma_i \quad (23)$$

Это утверждение составляет *гипотезу Каплана - Йорке* (J. Kaplan, J.A. Yorke, 1979).

✧ Величина в правой части формулы (23) есть *ляпуновская размерность* D_L . Гипотеза **КУ** состоит в том, что $D_F = D_L$. Строго доказано, что в общем случае $D_F \geq D_L$. В типичных примерах $D_F - D_L \cong (2 \div 5) \cdot 10^{-3} \ll D_F$, и различие можно пренебречь.

◆ Следствия гипотезы Каплана - Йорке.

1. Для гамильтоновых (.) систем размерность хаотической компоненты равна размерности фазового пространства: $D_F = K$. Действительно, из теоремы о симметрии спектра ХПЛ (**Т2** в §10.06) имеем $k = K - 1$, $\sum_{i=1}^{K-1} \sigma_i = -\sigma_K$ - и по гипотезе (КУ) $D_L = K = D_F$.

2. Для потоков в системах с положительной диссипацией $D_F > 2$. По определению хаотического движения (§2.03) $\sigma_1 > 0$. По теореме о нулевом характеристическом показателе (**Т1** в §10.06) $\sigma_2 \geq 0$. Отсюда $k \geq 2$ и $D_F \geq k \geq 2$.