

## ЛЕКЦИЯ #12

### ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

### СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ

#### § 12.01 Сценарий Фейгенбаума - 2

◆ Сценарий Фейгенбаума обладает, кроме указанного в предыдущем параграфе свойства самоподобия порогов удвоения, и другими универсальными свойствами. В частности, геометрическая структура аттракторов регулярного движения при приближении к порогу хаоса обладает свойствами самоподобия.

**F2** Если одна из точек  $x^*$  цикла длины  $2^n$  есть точка суперстабильности, а  $d_n$  есть (алгебраическое) расстояние от  $x^*$  до ближайшей к ней точки цикла, то для отображений с одним квадратичным максимумом отношение расстояний  $d_n$  при последовательных бифуркациях стремится к универсальному пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha,$$

где  $\alpha = -2.5029\dots$  называется *числом Фейгенбаума*  $\alpha$ .

◆ Рассмотрим универсальные свойства последовательных бифуркаций удвоения периода простым методом, основанным на идее локальной замены квадрата логистического отображения самим логистическим отображением. Пусть  $\mu > 3$  и существует цикл длины 2:

$$x_{2+} = \hat{M}(x_{2-}), \quad x_{2-} = \hat{M}(x_{2+}). \quad (1)$$

Положение точек  $x_{2+}$  и  $x_{2-}$  дается найденным выше выражением:

$$x_{2\pm} = \frac{1 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}. \quad (2)$$

Рассмотрим поведение при последовательных отображениях точки, близкой к  $x_{2-}$ : положим  $x = x_{2-} + \xi_-$ , где  $\xi_-$  мало. Тогда при первой итерации имеем

$$x' = x_{2+} + \mu(1 - 2x_{2-})\xi_- - \mu\xi_-^2 = x_{2+} + \xi_+. \quad (3)$$

Как и должно быть, преобразованная точка близка к  $x_{2+}$ . Сделаем еще одну итерацию:

$$x'' = x_{2-} + \mu(1 - 2x_{2+})\xi_+ - \mu\xi_+^2. \quad (4)$$

Исключая с помощью предыдущего уравнения значение  $\xi_+$  и пренебрегая всеми степенями  $\xi_-$  выше второй, получаем для  $\xi_-$  закон преобразования

$$\xi'_- = -a\xi_- + b\xi_-^2, \quad (5)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  суть

$$a = \mu^2 - 2\mu - 4 > 0, \quad b = \mu(3\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} - \mu^2 + 2\mu + 3). \quad (6)$$

Таким образом, изменение малого отклонения  $\xi_-$  от точки  $x_{2-}$  цикла  $C_2$  при **двукратном** применении логистического отображения  $\hat{M}$  описывается **одно-кратным** квадратичным преобразованием  $\hat{M}'$ , которое отличается от  $\hat{M}$  лишь линейной заменой переменных.

◆ Для того, чтобы свести отображение  $\hat{M}'$  к виду  $\hat{M}$ , надо сдвинуть начало отсчета к другому корню ( $\xi_2$ ), изменить направление оси независимой переменной и изменить масштаб. Проведем эти преобразования. Точка  $\xi_2$  определяется корнем уравнения  $\xi = -a\xi + b\xi^2$ , откуда

$$\xi_2 = \frac{a+1}{b}. \quad (7)$$

Положим  $\eta = \xi_2 - \xi$  (перенос начала и изменение направления оси); тогда

$$\frac{a+1}{b} - \eta' = -a\left(\frac{a+1}{b} - \eta\right) + b\left(\frac{a+1}{b} - \eta\right)^2. \quad (8)$$

Отсюда после упрощений находим

$$\eta' = (a+2)\eta - b\eta^2. \quad (9)$$

Теперь сделаем третий шаг - изменение масштаба переменных. Положим  $y = \eta/\alpha$ , где

$$\alpha = \frac{b}{a+2}. \quad (10)$$

Тогда преобразование  $\hat{M}'$  примет вид логистического отображения  $\hat{M}$ :

$$y' = \mu'y(1-y). \quad (11)$$

Роль параметра  $\mu$  теперь играет величина

$$\mu' = a + 2 = \mu^2 - 2\mu - 2. \quad (12)$$

Это уравнение позволяет сделать ряд выводов о характере каскада бифуркаций удвоения периода.

◆ **Во-первых**, уравнение (12) позволяет определить условия второй бифуркации. Бифуркация удвоения периода для отображения  $\hat{M}$  происходит при  $\mu = 3$ . Следовательно, при  $\mu' = 3$  должна произойти бифуркация  $\hat{M}^2$ , приводящая к возникновению цикла  $C_4$ . Из уравнения

$$\mu' = 3 = \mu_2^2 - 2\mu_2 - 2 \quad (13)$$

получаем значение  $\mu_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.4495$ , совпадающее с найденным выше.

**Во-вторых**, уравнение (12) позволяет определить точку сгущения каскада удвоений периода - границу хаотического режима  $\mu_c$ . Рекуррентное соотношение

$$\mu_n = \mu_{n+1}^2 - 2\mu_{n+1} - 2 \quad (14)$$

показывает, что каскад удвоений закончится по достижении параметром  $\mu$  значения  $\mu_c$ , которое является неподвижной точкой отображения (14):

$$\mu_c^2 - 3\mu_c - 2 = 0, \quad (15)$$

откуда

$$\mu_c = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} = 3.5615. \quad (16)$$

Это приближенное значение  $\mu_c$  отличается от точного  $\mu_c = 3.5699$  только на 0.2%.

**В-третьих**, уравнение (12) позволяет определить величину константы Фейгенбаума  $\delta$ . Допустим, что

$$\mu_n = \mu_c - A\delta^{-n}. \quad (17)$$

Подставляя эту зависимость в уравнение (14) и удерживая линейные по  $A$  члены, имеем

$$\mu_n = \mu_c - A\delta^{-n} = \mu_c^2 - 2\mu_c A\delta^{-n-1} - 2\mu_c + 2A\delta^{-n-1} - 2, \quad (18)$$

откуда находим

$$\delta = 2\mu_c - 2 = 1 + \sqrt{17} = 5.1231 \quad (19)$$

Это значение  $\delta$  отличается от точного  $\delta = 4.6692$  на 9.7%.

**В-четвертых**, уравнение (12) позволяет определить величину константы Фейгенбаума  $\alpha$ . Переход от  $n$ -й к  $(n+1)$ -й бифуркации соответствует сжатию поперечного масштаба в  $\alpha = b/(a+2)$  (см. (10)) раз. Подставляя в это выражение найденное выше значение  $\mu_c$  (16), получаем

$$\alpha = \frac{\sqrt{17} + 1}{2} - 3\sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2}} = -2.2399 \quad (20)$$

Это значение  $\alpha$  отличается от точного  $\alpha = -2.5029$  на 11.7%.

Результаты оказались приближенными, так как основывались на сведениях второй бифуркации к первой - вместо  $(n+1)$ -й к  $n$ -й при  $n \rightarrow \infty$ .

◆ Утверждения **F1** и **F2** описывают универсальные характеристики в области ниже порога хаоса. Такие характеристики имеются и в области выше порога. Примером служит универсальное поведение показателя Ляпунова. Вблизи по-

рога хаоса при  $\mu \geq \mu_c$  зависимость  $\sigma(\mu)$  для отображений с одним квадратичным максимумом имеет вид [HR80]

$$\sigma \sim (\mu - \mu_c)^\eta, \quad \eta = \frac{\ln 2}{\ln \delta} = 0.4498. \quad (21)$$

Зависимость показателя Ляпунова от превышения порога является мягкой.

⇒ [HR80] - Huberman B.A., Rudnik J. - Phys. Rev. Lett., 1980, 45, 154

## **§ 12.02 Логистическое отображение: показатель Ляпунова**

◆ Для логистического отображения численный эксперимент дает зависимость показателя Ляпунова  $\sigma$  от управляющего параметра  $\mu$ , показанную в [2, с.443; 5, с.47]. В области  $\mu_c < \mu < \mu_f = 4$  (граница финитности) показатель Ляпунова в общем возрастает при увеличении  $\mu$ . Обратимся к аналитическому расчету зависимости  $\sigma(\mu)$ .

◆ Для отображения  $x' = \hat{T}(x)$  функция  $W(x)$  называется *инвариантной плотностью* (invariant density), если интеграл от нее по любой области  $A$  и по ее **прообразу**  $\hat{T}^{-1}A$  равны:

$$\int_A W(x) dx = \int_{\hat{T}^{-1}A} W(x) dx. \quad (22)$$

Если отображение задано гладкой функцией,  $x' = F(x)$ , то из определения (22) следует *уравнение Фробениуса - Перрона* для функции  $W(x)$ :

$$W(x) = \sum_i \frac{W(y_i)}{|F'(y_i)|}, \quad (23)$$

где суммирование идет по всем точкам  $y_i$  таким, что  $F(y_i) = x$ . Существование инвариантной плотности позволяет обобщить на диссипативные системы эргодическую теорему Биркгофа - Хинчина.

**ЕТ-D** Среднее по времени значение динамической величины  $a(x_n)$  равно ее среднему значению по фазовому пространству, вычисленному с весом - инвариантной плотностью:

$$\overline{a(x)} = \int a(x) W(x) dx.$$

◆ Используем это соотношение для вычисления показателя Ляпунова логистического отображения усреднением показателя локальной неустойчивости  $\sigma(x)$ . Для одномерных отображений такая процедура **точна**:

$$\sigma = \int \sigma(x) W(x) dx, \quad (24)$$

где показатель локальной неустойчивости логистического отображения

$$\sigma(x) = \ln|A(x)| = \ln(\mu|1-2x|). \quad (25)$$

◆ Решение уравнения (23) для логистического отображения при  $\mu = 4$  было найдено Уламом и Нейманом [UN47]. Оно имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad (26)$$

откуда получается значение  $\sigma(4) = \ln 2 = 0.6931$ .

⇒ [UN47] - Ulam S.M., von Neumann J. - Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 1120.

При других значениях  $\mu$  вид функции  $W(x)$  с нужной точностью может быть найден решением уравнения (23) методом итераций.

◆ Примем простейшее предположение: будем считать, что инвариантная плотность  $W_0(x)$  **постоянна** в области  $x_- \leq x \leq x_+$ , где

$$x_+ = \max F = \frac{\mu}{4}, \quad x_- = F(x_+) = \frac{4\mu^2 - \mu^3}{16} \quad (27)$$

Тогда

$$W_0(x) = \frac{16}{\mu^3 - 4\mu^2 + 4\mu} \quad (28)$$

Интеграл в (12) вычисляется элементарно:

$$\sigma^{(0)}(\mu) = -1 + \ln \mu + \frac{8}{\mu^3 - 4\mu^2 + 4\mu} \ln \frac{\mu^4 - 6\mu^3 + 8\mu^2 + 8\mu - 16}{16}. \quad (29)$$

Из найденного выражения следует, что  $\sigma^{(0)}(\mu) > 0$  при  $\mu > 3.81$ : порог хаоса определен с относительной ошибкой  $\delta = 7\%$ .

### § 12.03 Окна периодичности

◆ На экспериментальном графике зависимости  $\sigma(\mu)$  видно много узких полос, в которых  $\sigma < 0$ . Лежащие между областями хаотического движения интервалы значений управляющего параметра, в которых аттракторами являются устойчивые циклы, называются *окнами периодичности* ([periodicity windows](#)).

✧ Самым большим окном периодичности логистического отображения является окно  $W_3$  цикла периода 3 и возникающих из него циклов  $3 \cdot 2^n$ . Область регулярного движения ограничена интервалом  $\mu_{W_3} = 3.8284 < \mu < \mu_{W_{3F}} = 3.8495$ .

◆ Связь между хаотическим движением и циклами отображения устанавливается следующей *теоремой Шарковского* [Ш64].

**Sh** Пусть  $\hat{T}$  - отображение отрезка  $I$  в себя ( $x \in I \Rightarrow \hat{T}x \in I$ ), заданное непрерывной функцией,  $x' = F(x)$ . Если отображение  $\hat{T}$  имеет периодическую точку периода 3, то оно имеет периодические точки всех периодов.

⇒ [Ш64] - Шарковский А.Н. - Укр. матем. ж-л., 1964, 16, 1, 61-7.

◆ Теорема Шарковского была переоткрыта Ли и Йорке в 1975 г. [LY75]. Вместе с ней было доказано следующее утверждение.

**LY** Пусть  $\hat{T}$  - отображение отрезка  $I$  в себя ( $x \in I \Rightarrow \hat{T}x \in I$ ), заданное непрерывной функцией,  $x' = F(x)$ . Точка отрезка  $x$  называется *асимптотически периодической*, если существует такая периодическая точка  $p$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) - F^n(p) = 0.$$

Если отображение  $\hat{T}$  имеет периодическую точку периода 3, то на отрезке  $I$  существует несчетное множество точек, не являющихся асимптотически периодическими.

✧ Название работы Ли и Йорке - "Period Three Implies Chaos" - стало первым случаем применения термина "хаос" в его современном значении и, превратившись в модный slogan, закрепило его употребление.

✧ Для логистического отображения оценка порога хаоса условием появления цикла периода 3 дает  $\mu_{3C} = 3.8284 = 1.072\mu_c$ . Формально такой критерий необоснован: только неустойчивость **всех** циклов **достаточна** для существования хаоса.

⇒ [LY75] - Li T.Y., Yorke J.A. - Amer. Math. Monthly, 1975, 82, 10, 985-92.

📖 [2, с.440 • 3, с.173 • 7, с.156]

◆ Внутри окон периодичности циклы могут претерпевать удвоения периода, приводящие к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Последовательность таких бифуркаций обладает универсальными свойствами, отличающимися от указанных в **F1** и **F2** значениями констант. Так, для окна  $W_3$   $\delta_{W_3} = 55.247$ ,  $\alpha_{W_3} = -9.277$ .

## § 12.04 Сценарий Помо - Манневиля:

### *Переход к хаосу через перемежаемость*

📖 [3, с.246-261 • 5, с.83-106 • 6, с.99-103 • 7, с.168-171 • 8, с.68 • 9, с.250-297]

◆ Бифуркация удвоения периода (§ 12.02) соответствует появлению корней уравнения  $x = \hat{T}^2(x)$  через **трехкратный** корень. Возможно появление корней уравнения  $x = \hat{T}^n(x)$  (неподвижных точек при  $n=1$ , циклов при  $n \geq 2$ ) через **двукратный** корень. Если при изменении управляющего параметра в области

$\lambda > \lambda_c$  появляется пара неподвижных точек (совпадающих при  $\lambda = \lambda_c$ ), одна из которых устойчива, а другая неустойчива, то в точке  $\lambda = \lambda_c$  происходит *тангенциальная бифуркация* (*tangent bifurcation; saddle-node bifurcation*).

◆ Тангенциальная бифуркация может соседствовать с хаосом (в области  $\lambda < \lambda_c$ ). При уменьшении  $\lambda$  происходит слияние корней (*обратная тангенциальная бифуркация*). Появление хаоса в результате **исчезновения** устойчивого цикла, произошедшего за счет обратной тангенциальной бифуркации, называется переходом к хаосу через *перемежаемость* (**intermittency**)- сценарием *Помо - Манневилля* (РМ-сценарием).

⇒ [MP79] - Manneville P., Pomeau Y. - Phys. Lett. A, 1979, 75, 1-2, 1-2.

◆ Сценарий РМ обладает универсальными свойствами, которые удобно изучать на следующей *I* - модели одномерного отображения. Пусть  $x' = \hat{T}(x)$  - отображение отрезка в себя, которое при малых  $x$  описывается зависимостью

$$x' = x + x^2 + \varepsilon \quad (30)$$

не имеет устойчивых неподвижных точек или циклов при  $\varepsilon > 0$ , а в остальном произвольно. При  $\varepsilon < 0$  отображение имеет устойчивую неподвижную точку. При  $\varepsilon = 0$  происходит тангенциальная бифуркация. Рассмотрим случай  $\varepsilon > 0$ . Разделим область движения на *ламинарную зону*  $L$  - область  $|x| < \lambda \ll 1$ , в которой применимо выражение (30) - и дополнение к ней - *турбулентную зону*  $T$ . В турбулентной зоне фазовая точка совершает нерегулярное движение, в ходе которого может попасть в точку  $x_0$ , лежащую в зоне ламинарности.

