ЛЕКЦИЯ #10
МОДЕЛЬ ПАЛЛЕНА - ЭДМОНДСА - 2
ЭРГОДИЧНОСТЬ И БИЛЛИАРДЫ

§ 10.1 Показатель Ляпунова для модели PE

◆ С помощью известной функции распределения в координатном пространстве можно вычислить показатель Ляпунова в области сплошной стохастичности путем усреднения локального показателя неустойчивости (ср. вывод **5** в §7.01: $\mu \approx 1 \Rightarrow \sigma \approx \langle \sigma(\vec{x}) \rangle$:

$$\sigma = \int \sigma(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x} \tag{1}$$

Для модели, описывающей двумерное, стохастическое при любых начальных условиях, движение частицы в поле $U(x,y)$ формула $\langle \sigma \rangle$ принимает вид

$$\sigma = \frac{1}{A} \int \sigma(x,y) dxdy \tag{2}$$

Здесь A - площадь внутри кривой $U(x,y) = E$, а интегрирование фактически ведется по области, где $\sigma(x,y) > 0$.

◆ Вычислим зависимость показателя Ляпунова σ от энергии E для модели (PE) в области сплошной стохастичности (при $E >> 1$). Из формулы (L9/30) для показателя локальной неустойчивости находим:

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^4 + 14x^2y^2 + y^4} - 2 - x^2 - y^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

(при $|x| > 1/\sqrt{3}$, $|y| > \left(1 + x^2\right)^{1/2} \left(3x^2 - 1\right)^{-1/2}$). Интеграл в (3) может быть найден численно. Найденная таким образом зависимость $\sigma(E)$, по понятным причинам, имеет монотонно возрастающий характер (подтверждается вывод **4** из §7.01) и хорошо согласуется с результатами численных экспериментов работ [M86], [ВЗ87].

[M86] - Meyer H.-D. - J. Chem. Phys, 1986, 84, 6, 3147-61.

[ВЗ87] - Воробьев П.А., Заславский Г.М. - ЖЭТФ, 1987, 92, 5, 1564-73.

◆ Вид зависимости $\sigma(E)$ при $E \to \infty$ может быть найден с помощью следующего (рискованного) рассуждения. При энергии $E >> 1$ можно пренебречь квадратичными членами в потенциале модели (PE) и рассмотреть систему с гамильтонианом

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2}. \tag{4}$$

Для нее потенциальная энергия является однородной функцией координат, и для движения выполняется закон подобия

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{E'}{E}\right)^{-1/4} \tag{5}$$

(см. [ЛЛI, §10], формулы (10.2) и (10.3)). Показатель Ляпунова σ имеет размерность T^{-1}. Следовательно, при $E >> 1$ зависимость показателя Ляпунова от энергии имеет вид

$$\sigma \sim E^{1/4}, \tag{6}$$

в целом подтверждающийся данными численных экспериментов.

§ 10.2 Корреляционные функции и спектры

◆ Напомним определения, введенные в §1.02: *автокорреляционная функция* переменной a есть

$$B_a(\tau) = \overline{a(t)a(t+\tau)} - \left(\overline{a(t)}\right)^2, \tag{7}$$

а ее фурье-образ есть *спектр мощности* переменной a

$$S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_a(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{8}$$

Усреднение по времени в (7) можно заменить усреднением по фазовому пространству:

$$B_a(\tau) = \int b_a(\vec{p},\vec{q},\tau)W(\vec{p},\vec{q})\,d\vec{p}\,d\vec{q}, \tag{9}$$

где *локальная автокорреляционная функция* есть

$$b_a(\vec{p},\vec{q},\tau) = a(\tau)a(0) - \bar{a}^2. \tag{10}$$

Значение $a(\tau)$ берется на траектории, проходящей при $t=0$ через точку фазового пространства $\vec{z} = \{\vec{p},\vec{q}\}$. Для вычисления $B_a(\tau)$ необходимо знать вид распределения $W(\vec{p},\vec{q})$ и уметь определять $a(\tau)$ при произвольных начальных условиях на интервале порядка времени затухания корреляций $\theta = \gamma^{-1}$, где γ - скорость перемешивания.

◆ В качестве примера найдем автокоррелятор $B_x(\tau)$ и спектр мощности $S_x(\omega)$. для координаты x в модели Паллена - Эдмондса. Будем считать, что хаотическая компонента заполняет всю энергетическую поверхность, что оправдано при $E >> 1$. Уравнения движения системы

$$\ddot{x} + \left(1+y^2\right)x = 0, \qquad \ddot{y} + \left(1+x^2\right)y = 0 \tag{11}$$

решим приближенно. В первом уравнении положим $y(t)=y(0)$; тогда x совершает гармонические колебания с постоянной частотой $\omega=\sqrt{1+y^2(0)}$ и

$$x(\tau)=x(0)\cos\omega\tau+\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega\tau. \qquad (12)$$

Локальная корреляционная функция есть

$$b_x(\vec{r},\varphi,\tau)=x^2(0)\cos\omega\tau+\frac{x(0)}{\omega}p\sin\varphi\sin\omega\tau, \qquad (13)$$

где φ - угол, определяющий направление скорости (см. § 8.06, пример 1). Усредняя по φ, получаем

$$\widetilde{b}_x(\vec{r},\tau)=x^2\cos\left(\sqrt{1+y^2}\,\tau\right). \qquad (14)$$

Усредняя по $\vec{r}$ и учитывая, что $W(\vec{r})=\text{const}=A^{-1}$, где A - площадь лежащей внутри кривой $U(x,y)=E$ доступной для движения (см. § 9.05) области, получаем

$$\begin{aligned} B_x(\tau)&=\frac{4}{A}\int\limits_0^{\sqrt{2E}}dy\int\limits_0^{x_+(E,y)}dx\,x^2\cos\left(\sqrt{1+y^2}\,\tau\right)= \\ &=\frac{4}{3A}\int\limits_0^{\sqrt{2E}}dy\left(\frac{2E-y^2}{1+y^2}\right)^{3/2}\cos\left(\sqrt{1+y^2}\,\tau\right) \end{aligned} \qquad (15)$$

Замена переменной $\omega=\sqrt{1+y^2}$ дает автокоррелятору форму

$$B_x(\tau)=2\int\limits_1^{\sqrt{2E+1}}S_x(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \qquad (16)$$

где спектр $S_x(\omega)$ дается выражением

$$S_x(\omega)=\frac{2}{3A}\left(2E+1-\omega^2\right)^{3/2}\omega^{-2}\left(\omega^2-1\right)^{-1/2}. \qquad (17)$$

Характерные особенности найденного спектра:

- отсутствуют низкочастотные компоненты: при $\omega<1$ $S_x\equiv 0$;
- в основной области $1\ll\omega\ll\sqrt{E}$ спектр описывается промежуточной асимптотикой вида $S_x\sim\omega^{-3}$;
- существует верхняя граница спектра: при $\omega\ge\sqrt{2E+1}$ $S_x\equiv 0$. За этой границей высокочастотные компоненты отсутствуют.

Полученная форма спектра удовлетворительно согласуется с результатами непосредственного численного расчета.

§ 10.3 *Эргодическая гипотеза*

◆ Распределение

$$W(\vec{p},\vec{q}) = \frac{1}{\nu(E)} \delta(E - H(\vec{p},\vec{q})), \tag{18}$$

в статистической физике называется *микроканоническим* (microcanonical) [ЛЛV, §4]. Его принимают для описания распределения состояний замкнутой системы. Предположение о том, что для систем, рассматриваемых в кинетической теории газов распределение имеет вид (18), называется *эргодической гипотезой* (ergodic hypothesis). Оно было выдвинуто Больцманом (L. Boltzmann, 1868) в следующей форме:

> **Физическая система, независимо от начального состояния, обязательно пройдет через все состояния, характеризующиеся одним и тем же значением полной энергии.**

Если для автономной гамильтоновой системы (при определенных значениях параметров и начальных условий) имеет место микроканоническое распределение состояний в фазовом пространстве, то система обладает *эргодичностью* (ergodicity) *по Больцману*.

◆ Эргодичность по Больцману связана с хаотичностью: оба свойства зависят от наличия отличных от энергии интегралов движения. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы.

- Если есть отличный от энергии интеграл движения $F(\vec{p},\vec{q})$, то движение по поверхности $H(\vec{p},\vec{q}) = E, F(\vec{p},\vec{q}) = F_1$ никогда не приведет систему в точку $H(\vec{p},\vec{q}) = E, F(\vec{p},\vec{q}) = F_2$: эргодичности по Больцману нет.

- Если есть отличный от энергии интеграл движения $F(\vec{p},\vec{q})$, то система интегрируема, движение квазипериодично, траектории лежат на двумерных торах, хаоса нет.

◆ Максвелл (J.C. Maxwell, 1879) доказал, что **если** верна эргодическая гипотеза, **то** среднее по времени значение динамической величины равно ее среднему значению "по совокупности состояний". В современных обозначениях:

$$\overline{A(\vec{p},\vec{q})} = \langle A(\vec{p},\vec{q}) \rangle. \tag{19}$$

Следствие теоремы: в областях равного объема фазовая точка проводит в среднем равные времена. Если для автономной гамильтоновой системы (при определенных значениях параметров и начальных условий) имеет место равенство средних по времени значений любых динамических переменных (и ограниченных функций от них) соответствующим средним по фазовому пространству, то система обладает *эргодичностью по Максвеллу*.

◆ В связи с данными определениями возникают два вопроса.
- Обладают ли модели кинетической теории газов эргодичностью по Больцману?
- Какие системы обладают эргодичностью по Максвеллу?
Остановимся на первом.

§ 10.4 *Газ твердых сфер и биллиарды*

◆ Простейшая модель статистической физики - *одноатомный газ* - представляет систему N материальных точек (молекул), взаимодействующих парным потенциалом $U(r_{ij})$ и помещенных в сосуд объема V с жесткими стенками. Простейшая модель взаимодействия - модель твердых сфер (rigid spheres) (A. Kronig, 1856), для которой $U(r_{ij}) = \infty$ при $r_{ij} < d$ и $U(r_{ij}) = 0$ при $r_{ij} > d$. Величина d есть диаметр молекулы. Эта модель не имеет масштаба энергии. Ее свойства при $N \to \infty$ определяются одним безразмерным параметром

$$\eta = \frac{\pi}{6} n d^3, \tag{20}$$

где $n = N/V$ - концентрация молекул. Возможные значения η не превосходят $\eta = 0.742$ (плотная упаковка); при $\eta \geq 0.47$ система находится в твердой (solid) фазе [Б₁78, с.309,311].

🕮 [$Б_1$78] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - т. 1. М.: Мир, 1978. - 406 с.

◆ Экспоненциальная неустойчивость (хаотичность) движения газа твердых сфер доказана Н.С. Крыловым в 1942 г. [К50]. Следуя ему, найдем оценку показателя Ляпунова для этой модели. Столкновение твердых сфер эквивалентно рассеянию точки на твердой сфере удвоенного радиуса $r = d$. Если точка падает под (малым) углом φ к прямой, соединяющей ее начальное положение с центром сферы, и находится в начальный момент на расстоянии R от поверхности сферы, то изменение разности углов между близкими по φ траекториями

$$|\delta\varphi'| \approx \left(2\frac{R}{r} + 1\right)|\delta\varphi| \tag{21}$$

За одно столкновение разность углов возрастет в $K \approx 2R/r$ раз. Для газа в качестве R можно взять длину свободного пробега λ_0. За время свободного пробега τ_0 произойдет одно столкновение. По определению показателя Ляпунова σ (см. L02) $e^{\sigma\tau_0} \approx 2(\lambda_0/r)$ и

$$\sigma \approx \frac{1}{\tau_0} \ln \frac{\lambda_0}{r} \tag{22}$$

🕮 [К50] Крылов Н.С. - Работы по обоснованию статистической физики. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1950. - 207 с.

✧ Оценить величину показателя Ляпунова для одноатомного газа при нормальных условиях ($T = 288\,\mathrm{K}, p = 1.013 \cdot 10^5$ Па).

◆ Исследования газа твердых сфер привели к изучению важного класса моделей хаотической динамики - биллиардов. *Областью биллиарда Q* называется лежащая внутри замкнутой кривой - внешней границы Γ_e - часть плоскости, из которой (быть может) вырезаны непересекающиеся части, ограниченные внутренними границами Γ_i. *Биллиардом* в Q называется модель, описывающая двумерное движение материальной точки - свободное внутри области Q и подчиняющееся закону "угол падения равен углу отражения" на ее границах Γ_e, Γ_i.

◆ Биллиард Синая имеет внешней границей квадрат со стороной a, а внутренней границей - окружность диаметра d, концентричную квадрату. Для этой системы Синай [С63] **доказал** экспоненциальную неустойчивость движения и его эргодичность по Больцману.

[С63] - Синай Я.Г. - ДАН СССР, 1963, 153, 6, 1261-4

[С70] - Синай Я.Г. - УМН, 1970, XXV, 2(152), 141-92

✧ Непреходящее значение работы Синая в том, что до нее было принято считать, что эргодичностью по Больцману могут обладать только системы с большим числом степеней свободы [Б₁78, с.383].

◆ Экспоненциальная неустойчивость движения в биллиарде Синая может быть связана с наличием выпуклых внутрь области Q - *рассеивающих* - участков границы. Хаотическое движение и эргодичность по Больцману возможны и в биллиардах без рассеивающих участков границ. Примером является биллиард "стадион", внешняя граница которого образована двумя полуокружностями одинакового радиуса r, сопряженными двумя равными отрезками длины a, параллельными линии, соединяющей центры полуокружностей. Для этой системы Бунимович [Б74] **доказал** экспоненциальную неустойчивость движения и его эргодичность по Больцману.

[Б74] - Бунимович Л.А. - Функц. анализ и прил., 1974, 8, 3, 73-74.

[1, с.56-60, 244 • 4, с.109-110 • 5, с.180 • 7, с.111].

Таким образом, есть веские основания считать ответ на первый из вопросов, поставленных в конце предыдущего параграфа, положительным.

◆ Обратимся ко второму вопросу. Он важен потому, что замена временных средних на фазовые избавляет от интегрирования уравнений движения на больших временах и связанных с этим трудностей - и, по сути, нами неоднократно использовалась выше (например, в § 2.02 при вычислении σ и $B_x(n)$ для отображения $x' = \{Kx\}$;. в § 4.04 при оценке σ и в § 5.01 при вычислении $B_s(n)$ для стандартного отображения, в § 10.1 при оценке σ модели Паллена - Эдмондса при $E >> 1$.)

Ответ на второй вопрос дает эргодическая теорема.

§ 10.5 Эргодическая теорема

◆ Инвариантное множество Γ является *метрически неразложимым*, если его нельзя разделить на два подмножества ненулевой меры Γ_1 и Γ_2 такие, что почти при всех начальных условиях $\vec{x}(0)$, принадлежащих одному из подмножеств Γ_i, фазовая траектория будет оставаться в нем во все последующие моменты времени: $(\vec{x}(0)\in\Gamma_i)\Rightarrow(\vec{x}(t)\in\Gamma_i|\forall t)$.

✧ Пример. Для гармонического осциллятора эллипс на фазовой плоскости с уравнением $p^2/2m+m\omega^2x^2/2=E_1$ есть инвариантное и метрически неразложимое множество, а объединение двух эллипсов с энергиями E_1 и E_2 инвариантно, но метрически разложимо.

◆ Для консервативных систем справедлива следующая *эргодическая теорема* Биркгофа - Хинчина.

Теорема. Если Γ - метрически неразложимое инвариантное множество, $\vec{x}(t,\vec{x}_0)$ - закон движения при начальных условиях $\vec{x}_0$ и $A(\vec{x})$ - ограниченная ($|A(\vec{x})|<\alpha$ при $\vec{x}\in\Gamma$) функция динамических переменных, то почти при всех $\vec{x}_0\in\Gamma$

- среднее по времени значение величины A не зависит от выбора начальных условий в Γ,

$$\overline{A}(\vec{x}_0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(\vec{x}(t,\vec{x}_0))dt=\overline{A};$$

- оно равно среднему по объему Γ значению A,

$$\overline{A}=\langle A\rangle=\int_\Gamma A(\vec{x})d\vec{x}.$$

◆ Выводы эргодической теоремы приложимы, когда удается описать форму инвариантной метрически неразложимой компоненты фазового пространства. Практически это возможно в двух предельных случаях:

- для полностью интегрируемых систем: множества Γ представляют собой инвариантные торы;

- для систем, у которых хаотическая компонента заполняет все фазовое пространство.

🕮 [1, с.27 • 2, с.70, 291 • 4, с.98 • 5, с.175 • 7, с.109]

✎ [ЗЧ71] - Заславский Г.М., Чириков Б.В. - УФН, 1971, 105, 1, 3-39.

🕮 [Б₂78] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - т.2. М.: Мир, 1978. - с. 354-390.

§ 10.6 Показатели Ляпунова

◆ Пусть динамическая система - поток в K-мерном фазовом пространстве задана уравнениями движения

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},t), \tag{23}$$

и пусть $\vec{x}(t)$ - закон движения при начальном условии $\vec{x}_0$. Подстановка $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}$ в (1) и линеаризация по $\vec{\xi}$ дают линейную систему

$$\dot{\vec{\xi}} = \hat{A}(t)\vec{\xi}, \tag{24}$$

где зависящие от времени элементы матрицы $\hat{A}(t)$ суть $a_{ij}(t) = \partial F_i / \partial x_j$ (ср. систему (28) в § 9.04).

◆ Оператор эволюции $\hat{S}_L$ для системы (2) линеен:

$$\vec{\xi}(t) = \hat{S}_L(t)\vec{\xi}(0) \tag{25}$$

где $\hat{S}_L(t)$ - матрица $K \times K$. Пусть $\lambda_i(t)$ - собственные значения $\hat{S}_L(t)$. Принята следующая нумерация: при $i > k$ $|\lambda_i| \le |\lambda_k|$. Величины

$$\sigma_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|\lambda_i(t)| \tag{26}$$

называются *характеристическими показателями Ляпунова* (ХПЛ), а их совокупность $\{\sigma_i\}$ называется *спектром ХПЛ*. В общем случае ХПЛ зависят от $\vec{x}_0$, но **одинаковы** для всех точек, $\in$ данной инвариантной компоненте ФП.

◆ У системы (3) $\exists$ фундаментальная система решений, заданная (при $t = 0$) векторами $\vec{e}_i$, такая, что $\vec{\varepsilon}_i(t) \sim \lambda_i(t)$, $\vec{\varepsilon}_i(0) = \vec{e}_i$. По способу нумерации $\sigma_1 = \max\{\sigma_i\}$. Почти при всех начальных условиях асимптотика решения (25) при $\sigma_1 > 0$ будет иметь вид $|\vec{\xi}(t)| \sim \lambda_1(t)$. Показатель Ляпунова σ, определенный в § 2.03 и использовавшийся нами до сих пор, совпадает с максимальным ХПЛ σ_1: $\sigma \equiv \sigma_1$.

◆ Основные свойства спектра ХПЛ определяются следующими тремя теоремами.

> **T1.** Для потока с ограниченной скоростью один из ХПЛ равен нулю: $\sigma_i = 0$. Соответствующий вектор $\vec{e}_i$ касателен к фазовой траектории в точке $\vec{x}_0$.

Элементарный сдвиг вдоль фазовой траектории эквивалентен сдвигу по времени: $\vec{\varepsilon}_i(t) \sim \dot{\vec{x}}(t)$. Если скорость в фазовом пространстве конечна, $|F_i| < \infty$, то величина $|\vec{\varepsilon}_i(t)| = |v(t)/v(0)||\vec{e}_i|$ ограничена и $\sigma_i = 0$. ■

> **T2.** Для автономной гамильтоновой системы с N степенями свободы спектр ХПЛ обладает симметрией:
> $$\sigma_i = -\sigma_{2N-i+1}.$$

Обращая время t, каждой экспоненицально растущей функции $\vec{\varepsilon}_i(t)$ сопоставим экспоненциально убывающую с той же абсолютной величиной показателя $|\sigma_i|$. ■

✧ Следствие 1. Для автономной гамильтоновой системы по крайней мере два ХПЛ равны нулю: $\sigma_N = \sigma_{N+1} = 0$. Вектор $\vec{e}_N$ направлен вдоль фазовой траектории (**T1**). Вектор $\vec{e}_{N+1}$ ортогонален энергетической поверхности (для $H = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r})$ при неизменных $\vec{r}$ он коллинеарен импульсу: $\vec{e}_{N+1} = \vec{p}/p$)

✧ Следствие 2. Для автономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы ($N = 1$) хаос невозможен:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0. \tag{26}$$

✧ Следствие 3. Для автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы ($N = 2$) только наибольший показатель Ляпунова σ_1 может быть положителен:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 + \sigma_4 = 0, \tag{27}$$

и либо $\sigma_1 = \sigma = -\sigma_4 > 0$, либо $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$.

> **T3.** Теорема Оселедца [<u>O</u>68]. Сумма всех ХПЛ равна среднему по времени значению диссипации на данной фазовой траектории, взятому с обратным знаком:
> $$\sum_{i=1}^{K} \sigma_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial F_i(t)}{\partial x_i} dt = -\overline{\Lambda}.$$

(см. определение диссипации в § 3.02).

⚩ [<u>O</u>68] - Оселедец В.И. - Тр. Моск. матем. о-ва, 1968, <u>19</u>, 171-210.

✧ Следствие 1. Для **любых** консервативных систем $\Sigma\sigma_i = 0$; для автономных гамильтоновых систем это следует уже из теоремы **T2**.

✧ Следствие 2. Для неавтономных гамильтоновых систем с одной степенью свободы только наибольший показатель Ляпунова σ_1 может быть положителен.

◆ Приведенные теоремы могут быть применены к отображениям. Уравнения движения

$$\vec{x}' = \vec{F}(\vec{x}) \tag{28}$$

подстановкой $\vec{y} = \vec{x} + \vec{\xi}$ и линеаризацией по $\vec{\xi}$ сводятся к линейному закону движения для отклонений

$$\vec{\xi}' = \hat{A}\vec{\xi}. \tag{29}$$

Свойства матрицы устойчивости $\hat{A}$ рассмотрены в § 3.02. Линеаризованный оператор эволюции есть произведение матриц устойчивости:

$$\hat{S}_L(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \hat{A}(\vec{x}_i). \qquad (30)$$

◆ Для отображений теорема **T1** неприложима (нет касательной к фазовой траектории), теорема **T2** верна для отображений, сохраняющих объем. Теорема **T3** верна при введенном в § 3.02 определении диссипации для отображений. Повторим его.

◆ *Локальной диссипацией* Λ отображения $\hat{T}$ в точке $\vec{x}$ называется взятый с обратным знаком логарифм абсолютной величины якобиана - определителя матрицы устойчивости в этой точке:

$$\Lambda(\vec{x}) = -\ln\left|\mathrm{Det}\ \hat{A}(\vec{x})\right| = -\ln\left|J(\vec{x})\right|. \qquad (31)$$

Для сохраняющих площадь отображений $\Lambda \equiv 0$; для сжимающих (уменьшающих площадь) $\Lambda > 0$.

✧ Пример, иллюстрирующий теорему Оселедца **T3**. Для одномерного отображения $x' = F(x)$ линеаризованное отображение есть $\xi' = A\xi$, где $A = (dF/dx)_{x=x_i}$. Линеаризованный оператор эволюции

$$\hat{S}_L(n) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{dF}{dx}\right)_i \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\hat{S}_L(n)\right| \qquad (32)$$

Для "матрицы" 1×1 $A = \mathrm{Det}A$, и

$$\sigma_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|\left(\frac{dF}{dx}\right)_i\right| = -\overline{\Lambda} \qquad (33)$$

в согласии с теоремой Оселедца **T3**.

📖 [2, с.294 • 4, с.101 • 5, с.116 • 6, с.26 • 7, с.130].

☯