ЛЕКЦИЯ #09
МОДЕЛЬ ПАЛЛЕНА - ЭДМОНДСА

§ 9.01 Модель Паллена - Эдмондса: резонансный гамильтониан.

◆ В качестве представителя класса нелинейных осцилляторов выберем *модель Паллена - Эдмондса* (PE):

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_y^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}x^2y^2. \tag{1}$$

Из общих соображений при $E << 1$ хаотическое движение в модели Паллена - Эдмондса возможно только в области фазового пространства, малой вместе с возмущением $V_4 = x^2y^2/2 \sim E^2 << H$. По аналогии со стандартным отображением (§ 4.02) и возмущенным маятником (§ 7.03) эту область надо искать вблизи сепаратрисы резонанса. Необходимо выделить резонанс.

◆ Введем переменные действие - угол J_i, φ_i для невозмущенных осцилляторов:

$$p_x = \sqrt{2J_1}\cos\varphi_1, \quad x = \sqrt{2J_1}\sin\varphi_1, \tag{2}$$

$$p_y = \sqrt{2J_2}\cos\varphi_2, \quad y = \sqrt{2J_2}\sin\varphi_2. \tag{3}$$

В этих переменных гамильтониан (1) принимает вид

$$H = J_1 + J_2 + 2J_1J_2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 \tag{4}$$

Уравнение движения для фазы φ_1 имеет вид

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = 1 + 2J_2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 \tag{5}$$

(аналогично уравнение для $\dot{\varphi}_2$). Скорости набега фаз $\dot{\varphi}_1 \approx \dot{\varphi}_2 \approx 1$, а при $E << 1$ их разность меняется медленно: $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 \sim E << 1$. Медленную разность фаз удобно сделать динамической переменной (ср. § 7.02).

◆ Новый набор динамических переменных таков:

$$\theta = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \varphi = \varphi_2, \quad I = J_1, \quad J = J_1 + J_2, \tag{6}$$

где θ и φ - медленная и быстрая координаты; эти переменные являются каноническими. Гамильтониан (4) принимает вид

$$H = H_r(J, I, \theta) + V(J, I, \varphi, \theta). \tag{7}$$

Здесь H_r зависит только от медленной координаты:

$$H_r(J, I, \theta) = J + \frac{I(J - I)}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right\}. \tag{8}$$

Это выражение можно получить, усреднив исходный гамильтониан H по интервалу времени $1 << T << E^{-1}$ (ср. § 4.02). Он называется *резонансным гамильтонианом*. Возмущение

$$V(J,I,\varphi,\theta) = -\frac{I(J-I)}{2}\left\{\cos 2(\theta+\varphi) + \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 2(\theta + 2\varphi)\right\} \quad (9)$$

содержит члены, которые при $E << 1$ осциллируют с большой частотой $\omega \approx 1$.

◆ Рассмотрим движение системы H_r. Действие J есть интеграл движения, и несущественный первый член в правой части (8) можно опустить. Канонические уравнения:

$$\dot{I} = -\frac{I(J-I)}{2}\sin 2\theta, \qquad \dot{\theta} = \frac{J-2I}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right\} \qquad (10)$$

Существуют 4 неподвижные точки $\vec{o}_k$ $(0 \le k \le 3)$, лежащие на прямой $I = J/2$.

$$\vec{o}_k = \left\{\frac{J}{2}, (k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \qquad (11)$$

Точки $\vec{o}_1$ и $\vec{o}_3$ - центры, $\vec{o}_2$ и $\vec{o}_4$ - седла. Линия уровня седел $H_r(I,\theta) = J^2/16$ является сепаратрисой. Уравнение сепаратрисы имеет вид:

$$I_s(\theta) = \frac{J}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{2\cos^2\theta}{1+2\cos^2\theta}}\right] \qquad (12)$$

Внутри сепаратрисы (при $J^2/16 < H_r(I,\theta) < 3J^2/16$) угол θ изменяется периодически, $\overline{\dot{\theta}} = 0$ (колебания). Вне сепаратрисы (при $0 < H_r(I,\theta) < J^2/16$) угол θ изменяется монотонно ($\overline{\dot{\theta}} \ne 0$, вращение).

◆ *Парциальными энергиями* осцилляторов в моделях H_3, H_4 называются величины $E_i = \left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right)/2$. При $E << 1$ $E \approx E_1 + E_2$. При движении парциальные энергии изменяются, $\dot{E}_1, \dot{E}_2 \ne 0$, что можно рассматривать как процесс обмена энергией между осцилляторами. Действие $I = J_1 \approx E_1$: при движении вблизи сепаратрисы (внутри нее) медленные изменения парциальной энергии велики.

§ 9.02 Построение сепаратрисного отображения

◆ Для описания свойств слабого хаоса в модели РЕ при $E << 1$ вычислим:

- меру стохастической компоненты на сечении Пуанкаре $\mu_s(E)$;
- показатель Ляпунова $\sigma(E)$.

Эти величины могут быть определены путем построения сепаратрисного отображения (§ 8.01) и сведения задачи **к уже решенной**.

◆ Программа решения и промежуточные результаты.

① Преобразовать возмущение V к виду периодического по t возмущения.

◆ Из уравнений движения $\dot{\varphi} = 1 + O(J)$ при $E \ll 1$ и $J \ll 1$ можно положить $\dot{\varphi} \approx 1 \Rightarrow \varphi = t + \phi$, где ϕ - начальная фаза.

②. Найти закон движения на сепаратрисе.

◆ Он имеет вид

$$\theta(t) = -\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\alpha t\right), \qquad I(t) = \frac{J}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\alpha t}\right) \tag{13}$$

где $\alpha = J/\sqrt{8}$.

③. Вычислить приращение энергии за один проход по ветви сепаратрисы (интеграл Мельникова - Арнольда)

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\overline{H}}{dt} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial I}\dot{I} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\dot{\theta}\right) dt. \tag{14}$$

◆ Подставляя в эту формулу $\theta(t)$ и $I(t)$ из невозмущенного решения (п. ②), получаем

$$\Delta E = -\frac{\pi}{12} J^2 G(\omega) \sin 2\phi, \tag{15}$$

где

$$G(\omega) = \omega^2 \left(\mathrm{sh}^{-1}\frac{\pi\omega}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{ch}^{-1}\frac{\pi\omega}{2}\right) \tag{16}$$

Здесь $\omega = 2/\alpha = \sqrt{32}/J$.

④. Построить первое уравнение сепаратрисного отображения.

◆ Введем безразмерное отклонение w энергии от сепаратрисного значения:

$$E = \frac{J^2}{16}(1 + w) \tag{17}$$

Тогда из найденного выше выражения для ΔE получаем первое уравнение сепаратрисного отображения:

$$w_{n+1} = w_n - M \sin\psi_n \tag{18}$$

где $\psi = 2\phi$ и $M(J) = 4\pi G(\omega)/3$.

⑤. Вычислить асимптотику интервала движения по сепаратрисе $T(w)$ при малых отклонениях по энергии от сепаратрисы: $w \ll 1$.

◆ Интеграл, определяющий период движения для резонансного гамильтониана, сводится к эллиптическому. Его асимптотика имеет вид

$$T(J, w) = \frac{\sqrt{8}}{J} \ln \frac{32}{3|w_{n+1}|} \tag{19}$$

⑥. Построить второе уравнение сепаратрисного отображения.

◆ Это уравнение имеет вид

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \omega \ln \frac{32}{3|w_{n+1}|}. \tag{20}$$

Из результатов §8.01 следует, что относительная энергетичская полуширина w_s стохастического слоя в модели (PE) дается выражением

$$w_s = M\omega \approx \frac{8}{3}\pi\left(1+\sqrt{3}\right)\omega^3 \exp\left(-\frac{\pi\omega}{2}\right) \tag{21}$$

при $\omega = \sqrt{32}/J >> 1$.

§ 9.03 Использование сепаратрисного отображения

◆ Оценим меру стохастической компоненты μ_s на сечении Пуанкаре для модели (PE) при $E << 1$. Хаотическая компонента заполняет полосу полуширины Δx_s вблизи ветвей сепаратрисы главного резонанса. Действуя по схеме §8.03 (см. формулу (23)), запишем

$$\mu_s \approx \frac{1}{S} \cdot D \cdot 2\Delta x_s \tag{22}$$

где S - площадь сечения Пуанкаре, $S = 2\pi J$; D - длина проекции ветвей сепаратрисы на сечение Пуанкаре, $D = 13.5\sqrt{J}$; Δx_s - полуширина стохастического слоя на сечении Пуанкаре, $\Delta x_s \approx 0.30 w_s \sqrt{J}$. Используя выражение (21) и считая $J \approx E$, получаем асимптотическую оценку

$$\mu_s \approx 1.29 w_s \approx \frac{668}{E^3} \exp\left(-\frac{\sqrt{8}\pi}{E}\right). \tag{23}$$

◆ Формула (23) описывает монотонный рост меры стохастической компоненты μ_s на сечении Пуанкаре от энергии E для модели Паллена - Эдмондса (подтверждается вывод **3** из §7.01) и удовлетворительно согласуется с результатами численного эксперимента работы [M86].

⚮ [M86] - Meyer H.-D. - J. Chem. Phys, 1986, 84, 6, 3147-61.

◆ Оценим показатель Ляпунова σ для модели PE при $E << 1$. Для движения в узком стохастическом слое (см. §8.04)

$$\sigma(J) \approx \frac{\zeta}{\tilde{T}(J)}, \tag{24}$$

где $\zeta = 0.66$ - универсальный показатель Ляпунова приведенного сепаратрисного отображения, а $\tilde{T}(J)$ - интервал сепаратрисного отображения. Полагая

$$\tilde{T}(J)=\frac{\sqrt{8}}{J}\ln\frac{32}{3|w_s(J)|} \qquad (25)$$

и подставляя (12) и (25) в (24), получим аналитическую формулу для $\sigma(J\approx E)$. Ее асимптотика при $E<<1$ имеет вид

$$\sigma(E)\approx\frac{\zeta}{8\pi}E^2\approx 0.026E^2 \qquad (26)$$

При $E=1$ расчет по полной формуле (25) дает значение $\sigma(1)=0.047$, а численный эксперимент - $\sigma(1)=0.046$. Асимптотика (26) дает почти вдвое меньшее значение.

§ 9.04 Переход к сплошной стохастичности и критерий Тоды

◆ Для найденных в численном эксперименте зависимостей $\mu_s(E)$ типично наличие излома при переходе от области, где $\mu_s\approx 0$, к области, где μ_s заметно отличается от нуля. Его называют *порогом стохастичности* E_c. Можно определить порог условием $\mu(E_c)=\mu_c$, где μ_c - малая константа. Малая мера стохастической компоненты очень быстро растет при увеличении E, и значение E_c слабо зависит от выбора μ_c (ср. выше формулу (23)).

✧ Термин "порог" обманчив: стохастичность существует и **до**, и **после** порога.

◆ Положение порога стохастичности можно связать с локальной неустойчивостью движения системы в фазовом пространстве (ср. вывод **5** из §7.01: $\chi\supset(\vec{x}|\sigma(\vec{x})>0)$). Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, описывающую движение частицы в потенциале $U(x,y)$. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}+\frac{\partial U}{\partial x}=0, \qquad \ddot{y}+\frac{\partial U}{\partial y}=0. \qquad (27)$$

Рассмотрим малые отклонения от невозмущенной фазовой траектории. Полагая $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$, и линеаризуя уравнения (27), для отклонений ξ и η получим систему уравнений

$$\ddot{\xi}+a\xi+b\eta=0, \qquad \ddot{\eta}+b\xi+c\eta=0, \qquad (28)$$

где

$$a=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad b=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}, \qquad c=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \qquad (29)$$

Пренебрегая зависимостью величин a, b и c от времени, рассмотрим (LEM) как систему с **ПОСТОЯННЫМИ** коэффициентами. В точке $\{x,y\}$ эта система имеет 4 характеристических показателя:

$$\lambda(x,y)=\pm\sqrt{\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}} \tag{30}$$

В общем случае эти показатели могут быть мнимыми или действительными.

◆ *Критерий Тоды* [T74]: порогу стохастичности E_c автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы соответствует появление в доступной при данной энергии области пространства точек, в которых имеется положительный локальный характеристический показатель, $\lambda_+(x,y)>0$.

[T74] - Toda M. - Physics Lett. A, 1974, 48, 5, 335-6.

Величину $\lambda_+(x,y)$ можно отождествить с локальным показателем неустойчивости $\sigma(x,y)$.

✧ Может ли система с двумя степенями свободы, описывающая движение частицы в потенциале $U(x,y)$, в некоторой точке $\vec{r}$ иметь **два** положительных характеристических показателя?

Граница C_T области Тоды, в которой существуют точки локальной неустойчивости, дается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)^2 \tag{31}$$

и называется *кривой Тоды*.

◆ С помощью критерия Тоды найдем порог стохастичности E_c для модели Паллена - Эдмондса. Граница доступной для движения области пространства дается эквипотенциальной линией - кривой $E=U$:

$$x^2+y^2+x^2y^2=2E. \tag{32}$$

Кривая Тоды C_T определяется уравнением

$$1+x^2+y^2=3x^2y^2. \tag{33}$$

Касание этих кривых происходит в точке $\{1,1\}$ при $E=3/2$. Отсюда $E_c=1.5$. Из численного эксперимента [M86] $\mu_s(1.5)\approx 0.1$

✧ С помощью критерия Тоды найти порог стохастичности для модели Хенона - Хейлеса.

✧ С помощью критерия Тоды найти пороги стохастичности для *модели Карнеги - Персиваля* [CP84] - семействе потенциалов

$$U_4(x,y)=A\left(x^4+Vx^2y^2+y^4\right). \tag{CP}$$

Потенциал $U_4(x,y)$ является однородной функцией координат [ЛЛI, §10]. Поэтому изменение энергии эквивалентно изменению единиц измерения и не сказывается на характере движения: он зависит только от параметра V. Указать значения V, при которых модель (CP) допускает разделение переменных (и, соответственно, не обладает хаотическим движением). Сравнить результат с выводом **3** из §7.01.

[CP84] - Carnegie A., Percival I.C. - J. Phys. A, 1984, 17, 4, 801-13.

✧ Критерий Тоды прост и эффективен - часто дает пороги с погрешностью в десятки процентов. Однако им следует пользоваться с осторожностью: локальная экспоненциальная неустойчивость не составляет **ни необходимого, ни достаточного** условий экспоненциальной неустойчивости движения.

§ 9.05 Сплошная стохастичность: $\mu \approx 1$

◆ Если хаотическая компонента заполняет всю энергетическую поверхность, то функция распределения состояний системы в фазовом пространстве имеет вид:

$$W(\vec{p},\vec{q}) = \frac{1}{\nu(E)}\delta\left(E - H(\vec{p},\vec{q})\right), \tag{34}$$

где $\delta(z)$ есть дельта - функция Дирака. Нормировочный множитель $\nu(E)$ в этом выражении равен производной по энергии от фазового объема $\Omega(E)$, заключенного в области $H(\vec{p},\vec{q}) \le E$:

$$\nu(E) = \frac{d\Omega(E)}{dE}. \tag{35}$$

По определению

$$\Omega(E) = \int d\vec{p}d\vec{q}\,\Theta\left(E - H(\vec{p},\vec{q})\right) \tag{36}$$

где $\Theta(z)$ - ступенчатая функция Хевисайда ($\Theta = 0$ при $z < 0$, $\Theta = 1$ при $z > 0$). Дифференцируя (Ω) по энергии, получаем:

$$\frac{d\Omega(E)}{dE} = \int d\vec{p}d\vec{q}\,\delta\left(E - H(\vec{p},\vec{q})\right) = \nu(E), \tag{37}$$

что обеспечивает нормировку функции $W(\vec{p},\vec{q})$.

◆ Из выражения (34) может быть найдено распределение состояний системы в координатном пространстве:

$$w(\vec{q}) = \int W(\vec{p},\vec{q})\,d\vec{p} \tag{38}$$

Для системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом вида $H(\vec{p},\vec{q}) = \vec{p}^2/2m + U(x,y)$, полагая (см. §8.05) $p_x = p\cos\varphi$, $p_y = p\sin\varphi$, получаем

$$w(\vec{q}) = \frac{1}{2\nu(E)} \int \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - U(x,y) \right) dp^2 d\varphi = \frac{2\pi m}{\nu(E)} \Theta\left(E - U(x,y)\right) \tag{39}$$

где $\Theta(z)$ - функция Хевисайда. Итак, для **двумерной** системы с гамильтонианом вида $H(\vec{p},\vec{q}) = \vec{p}^2 / 2m + U(x,y)$ функция распределения в координатном пространстве **постоянна** во всей доступной для движения области.

✧ Вычислить вид функции распределения $w(\vec{r})$ в координатном пространстве для **трехмерной** системы с гамильтонианом

$$H(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(x,y,z)$$

и распределением (34) в фазовом пространстве.

EOL

☯