ЛЕКЦИЯ #08
СЕПАРАТРИСНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 2
АВТОНОМНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

§ 8.01 Сепаратрисное отображение: неподвижные точки

◆ Динамическая система - отображение цилиндра на себя с динамическими переменными w,ψ и параметрами L,ω, заданная уравнениями движения

$$w' = w + L\sin\psi, \qquad \psi' = \psi + \omega\ln\frac{32}{|w'|}, \tag{1}$$

называется *сепаратрисным отображением*.

◆ Сепаратрисное отображение (1) имеет два семейства неподвижных точек: $\vec{o}_{1m} = \{0, \pm w_m\}$ и $\vec{o}_{2m} = \{\pi, \pm w_m\}$, где

$$w_m = 32\exp\left(-\frac{2\pi m}{\omega}\right) \tag{2}$$

а m - натуральное. При $m \to \infty$ точки сгущаются к линии $w = 0$.

◆ Рассмотрим сепаратрисное отображение вблизи неподвижных точек, линеаризованное **только по** w. Положим

$$w = w_m\left(1 - \frac{I}{\omega}\right), \qquad \psi = \pi + \theta \tag{3}$$

Тогда из первого уравнения (1а) сепаратрисного отображения

$$w_m\left(1 - \frac{I'}{\omega}\right) = w_m\left(1 - \frac{I}{\omega}\right) - L\sin\theta \tag{4}$$

и $I' = I + \frac{L\omega}{w_m}\sin\theta$: при выводе этого уравнения не сделано никаких приближений. Из второго уравнения, (1b), следует

$$\theta' = \theta + \omega\ln\frac{1}{1 - \frac{I'}{\omega}} \approx \theta + I' \tag{5}$$

В окрестностях неподвижных точек w_m линеаризованное по w сепаратрисное отображение есть **стандартное отображение** с параметром

$$K_m = \frac{L\omega}{w_m} = V\frac{\pi\omega^3}{16\,\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{2}}e^{\frac{2\pi m}{\omega}} \approx \frac{\pi}{8}V\omega^3 e^{-\frac{\pi\omega}{2}+\frac{2\pi m}{\omega}} \tag{6}$$

С ростом m K_m неограниченно растет: при $K_m \geq 4$ - достаточно близко к сепаратрисе - отображению свойствен сплошной хаос (§ 4.04).

§ 8.02 Размеры стохастического слоя стандартного отображения при $K << 1$

◆ При сохранении в гамильтониане РПТ (§ 3.03, (2)) двух низших фурье - гармоник,

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta + 2K\cos\theta\,\cos 2\pi t, \qquad (7)$$

стандартное отображение эквивалентно модели возмущенного маятника (1)

$$\frac{1}{K}H = \frac{I^2}{2} - \cos\theta - 2\cos\theta\,\cos\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\tau \qquad (8)$$

с параметрами $V = -2$ и $\omega = 2\pi/\sqrt{K}$.

◆ Определим полуширину стохастического слоя по (безразмерной) энергии w_s как значение, для которого

$$K(w_s) = \frac{L\omega}{w_s} = 1. \qquad (9)$$

Из выражения для L и значения $\omega = 2\pi/\sqrt{K}$ получается значение w_s для стандартного отображения:

$$w_s = \frac{64\pi^4}{K^{3/2}}\exp -\frac{\pi^2}{\sqrt{K}} \qquad (10)$$

Из выражения (10) находится полуширина стохастического слоя по энергии $\Delta E_s = Kw_s$. Из (10) определяется полуширина стохастического слоя по действию для исходной системы:

$$\Delta I \approx \frac{\Delta E}{I} \approx \frac{Kw}{2\sqrt{K}} \approx \frac{\sqrt{K}}{2}w \quad \Rightarrow \quad \Delta I_s = \frac{\sqrt{K}}{2}w_s \qquad (11)$$

◆ Оценим меру стохастической компоненты стандартного отображения при малых K (узкий стохастический слой). Хаотическая компонента заполняет полосу ширины $2\Delta I_s$ вблизи двух ветвей сепаратрисы главного резонанса.

$$\mu \approx \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot 2\cdot 2\pi\cdot 2\Delta I_s \qquad (12)$$

Подставляя (10) и (11) в (12), находим:

$$\mu(K) \approx \frac{64\pi^3}{K}\exp -\frac{\pi^2}{\sqrt{K}} \qquad (13)$$

◆ График найденной из формулы (13) зависимости $\mu(K)$ в области $K \le 1$ схож с экспериментальной зависимостью, несмотря на рискованность экстраполяции из области $K << 1$ В области $K << 1$ мера стохастической компоненты монотонно растет с увеличением возмущения (подтверждается вывод **3** из § 6.06).

§ 8.03 Показатель Ляпунова сепаратрисного и стандартного ($K << 1$) отображений

◆ Введем величину $s = w/w_s$ и запишем (1) в приведенном виде

$$s' = s + \frac{1}{\omega}\sin\psi, \qquad \psi' = \psi - \omega \ln|s'| + G \tag{14}$$

где величина $G = \omega \ln\frac{32}{w_s}$. Она определяет положение неподвижных точек, но не их устойчивость (G не входит в $\hat{A}$).

◆ Матрица устойчивости приведенного сепаратрисного отображения:

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\cos\psi}{\omega} \\ -\dfrac{\omega}{s'} & 1 - \dfrac{\cos\psi}{s'} \end{vmatrix} \tag{15}$$

При $\omega >> 1$ $s' \approx s$, и собственные значения этой матрицы могут быть записаны в виде

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{\cos\psi}{2s} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\cos\psi}{s}\right)^2 - 1}; \tag{16}$$

они **не зависят** от ω. Показатель Ляпунова σ для приведенного сепаратрисного отображения при $\omega >> 1$ на зависит ни от G, ни от ω и есть универсальная константа ζ. Ее значение, найденное Чириковым [Ch79]) в числовых экспериментах с $3 < \omega < 9$, равно

$$\zeta = 0.666(13). \tag{17}$$

✧ Вычислить универсальный показатель Ляпунова ζ (17) приведенного сепаратрисного отображения, используя метод усреднения показателя локальной неустойчивости (см. § 4.04 и вывод **5** из § 6.06). Считать, что стохастический слой сплошь заполняет область $|s| \le 1$, $0 \le \psi < 2\pi$.

◆ Найдем показатель Ляпунова для стандартного отображения ($K << 1$). Интервал времени $\tilde{T}(w)$, на котором осуществляется проход вблизи ветви сепаратрисы и реализуется один такт сепаратрисного отображения, есть

$$\tilde{T}(w) = \frac{1}{\omega_0}\ln\frac{32}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{K}}\ln\frac{32}{|w|}, \tag{18}$$

где ω_0 - частота малых колебаний маятника ($\omega_0 = 1$ в §7.03, $\omega_0 = \sqrt{K}$ для (18)). Оценим характерное время $\langle \tilde{T} \rangle$ для стохастического слоя как $\tilde{T}(w_s)$ Тогда для зависимости $\sigma(K)$ находим

$$\sigma(K) = \frac{\zeta}{\langle \tilde{T} \rangle} = \zeta \frac{K}{\pi^2 + \frac{3}{2}\sqrt{K}\ln K - \eta K}, \tag{19}$$

где $\eta = \ln(2\pi^4) = 5.27$. Асимптотика показателя Ляпунова стандартного отображения при **очень** малых K имеет вид

$$\sigma(K) \approx \frac{\zeta}{\pi^2} K \approx 0.067K. \qquad (20)$$

Формула (19) при $K \le 1$ подтверждает вывод **4** из § 6.06 о монотонном возрастании σ вместе с возмущением: $d\sigma/dK > 0$. Сравнение оценки (19) с данными численного эксперимента [Ch79, p.345] проведено в таблице.

K	σ по формуле (29)	σ из числ. экспер.	δ, %
0.2	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$2.00 \cdot 10^{-2}$	3
0.5	$6.15 \cdot 10^{-2}$	$6.86 \cdot 10^{-2}$	16
1	0.145	0.132	10

§ 8.04 Сечение и отображение Пуанкаре

◆ Рассмотрим автономные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы $\mathcal{H}_2$ с гамильтонианом $H(p_1, p_2, q_1, q_2)$. В силу сохранения энергии фазовая траектория лежит на *энергетической поверхности* (energy surface) - трехмерной области четырехмерного фазового пространства, заданной уравнением $H(\vec{p}, \vec{q}) = E$. Поэтому движение может быть описано как фазовый поток в **трехмерном** пространстве.

✧ Пример 1. Для $H = \vec{p}^2/2m + U(x,y)$ величина импульса, $p(x,y) = \sqrt{2m[E - U(x,y)]}$, при данном E определяется координатами (x, y). Введем переменную φ соотношениями

$$p_x = p\cos\varphi, \quad p_y = p\sin\varphi. \qquad (21)$$

Уравнения движения для переменных x, y, φ суть

$$\dot{x} = \frac{p}{m}\cos\varphi, \quad \dot{y} = \frac{p}{m}\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial U}{\partial y}\cos\varphi\right). \qquad (22)$$

Энергетическая поверхность в пространстве $\{x, y, \varphi\}$ заполняет **прямой цилиндр** высоты 2π, граница которого в плоскости OXY задана уравнением *эквипотенциальной линии* $U(x,y) = E$.

✧ Доказать, что система (22) является консервативной.

◆ Для упрощения описания $\mathcal{H}_2$ рассмотрим представление фазовых точек на *сечении Пуанкаре* (Poincare section) S_P - двумерной поверхности, которую траектория пересекает неограниченное число раз. Обычно выбирают в качестве S_P плоскость $q_1 = 0$, а положение точки определяют координатами $\{p_2, q_2\}$. Значение p_1 определяется из уравнения $H = E$. Пусть фазовая траектория пересекает S_P, имея заданный знак $\dot{q}_1$ последовательно в моменты t_1 и t_2. Оператор эволюции $\hat{S}(t_1,t_2)$ определяет отображение $\hat{T}_P$ поверхности S_P на себя, которое называется *отображением Пуанкаре*.

📖 [1, с.25 • 2, с.31-33, • 4, с.33 • 5, с.23 • 6, с.34 • 7, с.97 • 8, с.34 • 9, с.76 • 10, с.20].

◆ Инвариантные множества отображения $\hat{T}_P$ наглядно представляют информацию о характере движения исходной системы. Если существует независимый от H интеграл движения $F(p_1,p_2,q_1,q_2)$, то инвариантные множества - линии пересечения поверхностей $H=E$, $F=F_0$ и $q_1=0$ - одномерны. В общем случае инвариантные множества могут быть и двумерны, как сечения трехмерной стохастической компоненты. Периодическому движению соответствуют нульмерные инвариантные множества - точки (или системы точек - циклы).

✧ В теории автономных консервативных систем с двумя степенями свободы величину хаотической компоненты характеризуют мерой μ_s - долей **площади** сечения Пуанкаре, занятой стохастической компонентой, а не долей μ соответствующего ей **объема** энергетической поверхности (μ невозможно увидеть и трудно рассчитать). Очевидно, что μ_s и μ одновременно стремятся к нулю или к единице.

§ 8.05 Модели умеренных колебаний.

◆ Часто возникает задача о движении точки m в потенциале $U(x,y)$, имеющем минимум, $U(x_m,y_m)=\min U(x,y)=U_m$. Принято выбирать $\{x_m,y_m\}$ за начало координат OXY, а величину U_m - за начало отсчета потенциальной энергии. Простейшая модель движения вблизи минимума потенциала - модель *малых колебаний* [ЛЛI, гл.V], которая описывается гамильтонианом

$$H_2=\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{m\omega_1^2}{2}x^2\right)+\left(\frac{p_y^2}{2m}+\frac{m\omega_2^2}{2}y^2\right). \qquad (23)$$

Система H_2 называется *линейным осциллятором* (с двумя степенями свободы).

◆ *Нелинейным осциллятором* (с двумя степенями свободы) называется система с гамильтонианом $H(\vec{p},\vec{q})$, который для описания движения при $E\to 0$ может быть приближен выражением H_2, но не совпадает с ним тождественно. Гамильтониан H_2 учитывает квадратичные члены разложения $U(x,y)$ в двойной ряд Тейлора. Кубичную часть разложения $V_3(x,y)$ можно представить в виде

$$V_3(x,y)=\sum_{k=0}^{3}a_k x^k y^{3-k} \qquad (24)$$

Коэффициенты разложения имеют размерность $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$. Модель с гамильтонианом $H_3=H_2+V_3$ называется осциллятором с кубичной нелинейностью - *кубичным осциллятором* (cubic oscillator). H_3 содержит 7 параметров $(m,\omega_1,\omega_2,a_0,\ldots a_3)$: три фиксируют выбором единиц. Принят выбор: $m=1$,

$\omega_1 = 1$, $a_2 = 1$. Остальные 4 параметра - безразмерные; H_3 - четырехпараметрическое семейство.

◆ В семействе H_3 наиболее подробно исследована *модель Хенона - Хейлеса* (HH), упоминавшаяся в § 2.03:

$$H_3 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_y^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \qquad (25)$$

[HH64] - Henon M., Heiles C. - Astron. J., 1964, 69, 1, 73-9.

В этой модели движение финитно при значениях энергии $E < E_D = 1/6$. Потенциал обладает симметрией C_{3v}. Найденные в [HH64] проекции фазовых траекторий на сечение Пуанкаре часто воспроизводятся в книгах.

[1, с.97 • 2, с.67, • 5, с.171 • 7, с.98].

◆ Если по соображениям симметрии $V_3 \equiv 0$, то следующими существенными членами разложения потенциала будут квартичные:

$$V_4(x,y) = \sum_{k=0}^{3} b_k x^k y^{4-k}. \qquad (26)$$

Коэффициенты разложения b_k имеют размерность $\mathrm{ML^{-2}T^{-2}}$. Модель с гамильтонианом $H_4 = H_2 + V_4$ называется осциллятором с квартичной нелинейностью - *квартичным осциллятором* (quartic oscillator). Принято фиксировать параметры H_4 выбором $m = 1$, $\omega_1 = 1$, $b_2 = 1/2$: H_4 - пятипараметрическое семейство.

◆ В семействе H_4 наиболее подробно исследована *модель Паллена - Эдмондса* (PE):

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(p_y^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}x^2 y^2. \qquad (27)$$

[PE81] - Pullen R.A., Edmonds A.R. - J. Phys. A, 1981, 14, 12, L477-84.

В этой модели движение финитно при любых значениях энергии E. Потенциал обладает симметрией C_{4v}. Модели H_3 и H_4 образуют класс моделей умеренных колебаний. Они имеют универсальное значение при $E << 1$, когда члены V_n с $n \geq 5$ можно отбросить.

◆ Модель Паллена - Эдмондса (27) мы выберем в качестве представителя класса нелинейных осцилляторов. Именно ее целесообразно выбрать для детального исследования по двум причинам. Во-первых, в модели PE изучение свойств слабой стохастичности значительно проще, чем, например, в модели Хенона - Хейлеса (HH). Во-вторых, финитность движения при любой энергии в модели PE позволяет исследовать зависимость характеристик стохастического движения от энергии в **широкой области** сплошной стохастичности. В модели (HH) такая область сводится к малой окрестности порога диссоциации E_D.

EOL