ЛЕКЦИЯ #07
СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИОНИЗАЦИЯ
ВОЗМУЩЕННЫЙ МАЯТНИК

§ 7.01 Стохастическая ионизация

◆ [Развитие выводов **7** и **8**] В качестве примера применения критерия Чирикова к модели, допускающей сравнение с экспериментом, рассмотрим классическую динамику атома водорода в переменном однородном электрическом поле. 🕮 [4, с.347]

◆ Для упрощения ограничимся одномерной моделью с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{x} + e\mathcal{E}x\cos\omega t \tag{1}$$

Такая модель может быть использована для описания системы, в которой электрон совершает движение по орбите, сильно вытянутой в направлении поля.

◆ Следуя традиции, будем использовать атомную систему единиц $(e, m, \hbar = 1)$. При этом переменная действия I (см. [ЛЛI, §50]) будет равна главному квантовому числу n. В классической модели n изменяется непрерывно, что оправдано при $n >> 1$. Используя известное разложение закона движения модели Кеплера в ряд Фурье [ЛЛII, §70], запишем гамильтониан (1) в переменных действие - угол:

$$H(I, \theta; t) = -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{E}n^2\cos\omega t\left(\frac{3}{2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos k\theta\right), \tag{2}$$

где коэффициенты x_k даются выражениями

$$x_k = \frac{1}{k} J_k'(k) = \frac{1}{k}\left[J_k(k) - J_{k+1}(k)\right], \tag{3}$$

а $J_n(z)$ есть функция Бесселя первого рода. Значения первых коэффициентов таковы: $x_1 = 0.325$, $x_2 = 0.112$, $x_3 = 0.059$. При больших k $x_k \approx 0.4k^{-5/3}$.

◆ Частота невозмущенного движения системы

$$\Omega(n) = \frac{\partial H_0}{\partial n} = \frac{1}{n^3}. \tag{4}$$

Резонансное условие $k\Omega_k = k\Omega(n_k) = \omega$ определяет значение действия n_k в k-м резонансе при пренебрежимо малом возмущении:

$$n_k = \left(\frac{k}{\omega}\right)^{1/3}. \tag{5}$$

◆ Рассмотрим движение системы в k-м резонансе. Будем считать, что отклонение действия от резонансного значения $J = n - n_k$ мало $(J << n_k)$, а разность фаз $\varphi = \theta - \Omega_k t$ - медленно меняющаяся функция:

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} - \Omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial n} - \frac{1}{n_k^3} = \frac{1}{(n_k + J)^3} - \frac{1}{n_k^3} \approx -\frac{3J}{n_k^4}. \tag{6}$$

Уравнение для отклонения от резонанса по действию имеет вид:

$$\dot{J} = 2\mathcal{E} n_k^2 \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty} m x_m \sin m\theta. \tag{7}$$

Сохраняя в правой части одно только медленно меняющееся слагаемое,

$$\dot{J} \approx -\mathcal{E} n_k^2 k x_k \sin(k\theta - \omega t), \tag{8}$$

и учитывая, что

$$\theta = \frac{\omega}{k} t + \varphi \tag{9}$$

получаем уравнение для отклонения по действию в форме

$$\dot{J} = \mathcal{E} n_k^2\, k x_k \sin k\varphi. \tag{10}$$

Уравнения (7) и (11) суть канонические для резонансного гамильтониана

$$H_r(J,\varphi) = -\frac{3J^2}{2n_k^4} - \mathcal{E} n_k^2\, x_k \cos k\varphi, \tag{11}$$

с точностью до обозначений совпадающего с гамильтонианом маятника. Отсюда находится полуширина резонанса по действию:

$$\frac{1}{2}\delta I_k = n_k^3 \sqrt{\frac{4}{3}\mathcal{E} x_k}\,. \tag{12}$$

Условие перекрытия резонансов (§ 5.02) имеет вид

$$\frac{1}{2}(\delta I_k + \delta I_{k+1}) = \Delta I = n_{k+1} - n_k \tag{13}$$

◆ Подстановка в (13) выражений (5) и (12) приводит к пороговому для перекрытия резонансов значению амплитуды напряженности электрического поля:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{\gamma_k} n_k^{-4}, \tag{14}$$

где

$$\gamma_k = \frac{4}{3}\left[|x_k|^{1/2} + |x_{k+1}|^{1/2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1/3}\right]^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1/3} - 1\right]^{-2}. \tag{15}$$

Значения параметров γ_k увеличиваются с ростом k: $\gamma_1 = 13.8$, $\gamma_2 = 19.0$; при $k >> 1$ $\gamma_k \approx 19k^{1/3}$. Поэтому если условие перекрытия выполнено для k-го и $k+1$-го резонансов, то оно выполнено и для всех более высоких резонансов.

◆ Среднее значение напряженности статического электрического поля, действующего на электрон в состоянии с величиной действия n_k, есть

$$\bar{\mathcal{E}}_a = 2n_k^{-4}. \tag{16}$$

Таким образом, при амплитуде переменного поля, **в десятки раз** меньшей средней напряженности статического поля, в рассматриваемой системе возникает перекрытие резонансов, открывающее путь диффузионному росту действия (и, соответственно, энергии) электрона. Этот процесс приводит к удалению электрона на неограниченно большое расстояние от ядра - *стохастической* (*диффузионной*) *ионизации* атома.

◆ В экспериментах Бэйфилда и Коха [BK74] при воздействии на атомы водорода в состоянии с $n_0 = 66 \pm 3$ электромагнитного поля с частотой $\omega = 6.2 \cdot 10^{10}\ \text{с}^{-1}$ была обнаружена ионизация, имевшая пороговый по амплитуде поля характер с порогом $\mathcal{E}_c \approx 10$ В см$^{-1}$. Оценка (14) дает при $k=1$ значение $\mathcal{E}_c \approx 14$ В см$^{-1}$.

⇴ [BK74] - Bayfield J., Koch P. - Phys. Rev. Lett., 1974, 33, 5, 258-61.

✧ Степень количественного согласия надо оценивать осторожно: изложенная теория стохастической ионизации построена в предположении $\omega > \Omega(n_0)$, тогда как в эксперименте частота поля была **меньше** частоты движения электрона: $\omega = 0.43\Omega(n_0)$.

✧ Компьютерный эксперимент, основанный на (трехмерной) классической модели [LP78], дал результаты в согласии с измерениями [BK74].

⇴ [LP78] - Leopold J.G., Percival I.C. - Phys. Rev. Lett., 1978, 41, 14, 944-7.

✧ Модель классической диффузионной ионизации была предложена в работе [ДЗК78] (см. также [ДКШ83]).

⇴ [ДЗК78] - Делоне Н.Б., Зон Б.А., Крайнов В.П. - ЖЭТФ, 1978, 75, 445.
⇴ [ДКШ83] - Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. - УФН, 1983, 140, 3, 355-92.

✧ Для классической модели атома водорода найти пороговое значение $\mathcal{E}_s$ для ионизации в **постоянном** однородном электрическом поле.

✧ Для условий опыта [BK74] рассчитать пороговую частоту **однофотонной** ионизации.

✧ В **квантовой** теории систем с дискретным спектром, взаимодействующих с переменным гармоническим полем частоты ω, основную роль играет параметр

$$\beta = \frac{V_{mn}}{\hbar(\omega_{mn} - \omega)}, \tag{17}$$

где V_{mn} - матричный элемент возмущения, ω_{mn} - частота перехода, $\hbar$ - постоянная Планка; при $\beta << 1$ применима нестационарная теория возмущений. Для условий опыта [BK74] вычислить значение β для $n = 66$ и $m = 67$ при значении напряженности поля $\mathcal{E}_c$.

Указание. Для вычисления матричного элемента V_{mn} вместо расчета по точным формулам удобнее использовать оценку, основанную на принципе соответствия.

✧ Описанная в данном параграфе последовательность преобразований является универсальной при подготовке к использованию критерия Чирикова. Резюмируем ее основные ступени (см. также лекцию **VIB11**).

① Определяется переменная действия I для невозмущенной системы $H_0(p,q)$.

② Невозмущенный гамильтониан преобразовывается к виду $H_0(I)$. (см. (2))

③ С помощью условия $k\Omega(I_k) = \omega$ отыскиваются центры резонансов по действию I_k. (см. уравнение (5))

④ Оператор возмущения преобразовывается к виду фурье-разложения по угловой невозмущенной переменной, $V(p,q)\cos\omega t \to \cos\omega t \sum V_k(I)\cos k\theta$. (см. (2))

⑤ В окрестности k-го резонанса в разложении сохраняется одно резонансное слагаемое. (см. переход от (7) к (8)).

⑥ Вводятся малое отклонение по действию $J = I - I_k$ и медленная фаза $\varphi = \theta - \Omega_k t$. Строятся канонические уравнения для них (см. (6) и (10)).

⑦ В окрестности k-го резонанса строится эффективный гамильтониан маятника (см. (11))

⑧ Из гамильтониана маятника находятся полуширины резонансов по действию $\frac{1}{2}\delta I_k$ (см. уравнение (12)).

⑨ К результатам пп. (③) и (⑧) применяется критерий Чирикова.

§ 7.02 Возмущенный маятник

◆ С целью исследования свойств хаотической компоненты при **малом** возмущении [развитие и проверка выводов **1 - 6** при малых V] рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos\theta + V\cos\theta\cos\omega t, \tag{18}$$

которая называется *возмущенным маятником* (perturbed pendulum). Гамильтониан (18) определяет двухпараметрическое семейство моделей, в котором V задает величину возмущения, а ω - отношение частоты возмущений к частоте малых колебаний.

◆ Стандартное отображение может быть построено как стробоскопическое отображение Пуанкаре для модели РПТ (L03). Сохраним в гамильтониане РПТ **две** низшие фурье - гармоники:

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta + 2K\cos\theta\cos 2\pi t. \tag{19}$$

Заменой переменных $I = p\sqrt{K}$, $\tau = t\sqrt{K}$, $\theta = \theta + \pi$ выражение (19) сводится к гамильтониану (18) возмущенного маятника

$$\frac{1}{K}H = \frac{I^2}{2} - \cos\theta - 2\cos\theta\,\cos\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\tau \qquad (20)$$

с параметрами $V = -2$ и $\omega = 2\pi/\sqrt{K}$.

◆ Нашей основной задачей в теории возмущенного маятника будет исследование стохастического слоя вблизи сепаратрисы (невозмущенного маятника) при **умеренном** $(V \sim 1)$ **высокочастотном** $(\omega = 2\pi/\sqrt{K} >> 1)$ возмущении. Для ее решения можно использовать подход, основанный на критерии перекрытия резонансов и использующий теорию движения невозмущенного маятника.

🕮 [1, с.13 • 2, с.39 • 4-с.16-20 • 10-с.14-16].

Мы будем использовать альтернативный (но эквивалентный) подход, основанный на вторичной редукции уравнений движения, совершив переход от отображения Пуанкаре с **минимальным** масштабом времени последования $T_{-} \sim \omega^{-1} << 1$ к отображению с **максимальным** масштабом $T_{+} \sim \omega >> 1$, равным характерному времени прохождения системой одной ветви сепаратрисы.

§ 7.03 *Сепаратрисное отображение*

◆ Рассмотрим движение возмущенного маятника

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos\theta + V\cos\theta\cos\omega t \qquad (21)$$

с энергией, близкой к сепаратрисному значению $E \approx 1$ в условиях, когда возмущение можно считать малым ($V << 1$ или $\omega >> 1$). Обозначение: $w = E - 1$ - *отклонение энергии* от сепаратрисного значения; $|w| << 1$.

◆ Вычислим приращение Δw на интервале времени между двумя последовательными прохождениями фазовой точки вблизи седла. Мощность обобщенной силы

$$P = -\frac{\partial V}{\partial\theta}\cdot\dot{\theta} = V\dot{\theta}\,\sin\theta\,\cos\omega t. \qquad (22)$$

Приращение энергии за данный интервал времени (t_1, t_2) определяется интегралом

$$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} V\dot{\theta}\,\sin\theta\,\cos\omega t dt. \qquad (23)$$

Интеграл, определяющий приращение энергии системы, движущейся вблизи сепаратрисы, называется *интегралом Мельникова - Арнольда*. Скорость маятника $\dot{\theta}$ велика только в моменты прохождения вблизи точки равновесия $\theta = 0$.

Именно эта область даст основной вклад в величину Δw. Поскольку при $|w| << 1$ движение вблизи точки $\theta = 0$ мало отличается от движения на сепаратрисе, можно оценить Δw, подставив в интеграл в качестве $\theta(t)$ закон движения на сепаратрисе

$$\theta(t) = 4\,\mathrm{arctg}\left(e^t\right) - \pi \tag{24}$$

и распространив интегрирование на всю ось времени. Поскольку решение (24) соответствует начальным условиям $\theta(0) = 0$, фиксирующим начало отсчета времени, зависимость от времени возмущения следует взять в виде $\cos(\omega t + \psi)$, где ψ - начальная фаза возмущения. После подстановки

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2}{\mathrm{ch}\,t}, \quad \sin\theta = 2\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^2\,t} \tag{25}$$

интеграл (3) вычисляется элементарно:

$$\Delta w = 4V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^3\,t}\cos(\omega t + \psi)dt = -2\pi\omega^2\left(\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{2}\right)^{-1} V\sin\psi \tag{26}$$

Изменение энергии маятника на интервале времени между двумя последовательными прохождениями фазовой точки вблизи седла под действием высокочастотного возмущения экспоненциально мало:

$$\Delta w \approx -V\sin\psi 4\pi\omega^2\exp(-\pi\omega/2). \tag{27}$$

Поэтому можно считать, что такое новое значение отклонения энергии от сепаратрисного значения

$$w' = w + L\sin\psi \tag{28}$$

где

$$L(\omega, V) = -2\pi\omega^2\left(\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{2}\right)^{-1} V \tag{29}$$

останется малым: $|w'| << 1$.

◆ Вычислим приращение $\Delta\psi$ фазы возмущения за интервал времени между двумя последовательными прохождениями маятника через точку равновесия $\theta = 0$. Величина этого интервала $\widetilde{T}$ в основном определяется условиями движения фазовой точки вблизи седла. Поскольку скорость движения $\dot{\theta}$, а вместе с ней и мощность возмущения P (2) в этой области пренебрежимо малы, то $\widetilde{T}$ можно оценить как соответствующий интервал времени в модели невозмущенного маятника с заданной величиной w. Он равен периоду вращения маятника при $w > 0$ или половине периода колебаний маятника при $w < 0$. При $|w| << 1$ обе величины имеют одинаковую асимптотику

$$\tilde{T}(w) = \ln\frac{32}{|w|}. \tag{30}$$

Приращение $\Delta\psi$ фазы возмущения на указанном интервале времени равно отношению $\widetilde{T}(w')$ (с **новым** значением отклонения по энергии!) к частоте возмущения ω:

$$\Delta\psi = \frac{1}{\omega}\ln\frac{32}{|w'|}. \tag{31}$$

◆ Динамическая система - отображение цилиндра на себя с динамическими переменными w,ψ и параметрами L,ω, заданная уравнениями движения

$$w' = w + L\sin\psi, \qquad \psi' = \psi + \omega\ln\frac{32}{|w'|}, \tag{32}$$

называется *сепаратрисным отображением* (whisker mapping).

✧ Сепаратрисное отображение **не является** отображением Пуанкаре: входящие в него величины ψ и w определяются в **разные** моменты времени - ψ при $\max|\dot\theta|$, w при $\min|\dot\theta|$ на периоде. Тем не менее, оно во многом подобно по свойствам отображениям Пуанкаре (в частности, является сохраняющим площадь - проверить!).

📖 [1, с.87-90 • 2, с.241-243,250 • 4, с.130-133• 10, с.33-39].

Исследование свойств сепаратрисного отображения позволяет определить параметры стохастического движения в стохастическом слое вблизи сепаратрисы невозмущенной системы.

EOL

☯