

ЛЕКЦИЯ #06

СТАНДАРТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 3

§ 6.01 Стандартное отображение: циклы длины 2 - устойчивость

◆ Стандартное отображение имеет два цикла C_2 : один из них ($C_2^{(1)}$) образован точками

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_3 = \pi; \quad I_1 = I_3 = \pi \quad (1)$$

а второй ($C_2^{(2)}$) - точками $\theta_2 = \pi/2 - \phi(K)$, $I_2 = \pi - 2\phi(K)$ и $\theta_4 = 3\pi/2 + \phi(K)$, $I_4 = \pi + 2\phi(K)$, где

$$\phi(K) = \frac{K}{4} - \frac{K^3}{128} + \frac{13K^5}{6144} - \dots \quad (2)$$

◆ Устойчивость цикла определяется спектром матрицы

$$\hat{B} = \prod_{k=0}^{n-1} \hat{A}(\hat{T}^k \vec{c}). \quad (3)$$

представляющей произведение матриц устойчивости всех точек цикла.

- ✧ Доказать, что устойчивость цикла не зависит от того, какую его точку считать начальной.
- ✧ Может ли цикл быть неустойчив, если **все** его точки устойчивы?
- ✧ Может ли цикл быть устойчив, если **одна** из его точек неустойчива?

Выше найдены координаты точек циклов C_2 стандартного отображения. Их устойчивость определяется следом матрицы \hat{B} ,

$$\hat{B} = \hat{A}(\vec{c}_{i+2})\hat{A}(\vec{c}_i), \quad \hat{A} = \begin{vmatrix} 1 & K \cos \theta \\ 1 & 1 + K \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (4)$$

$\text{Sp} \hat{B} = 2 + 2K(\cos \theta_i + \cos \theta_{i+2}) + K^2 \cos \theta_i \cos \theta_{i+2}$. Для $C_2^{(1)}$: $\text{Sp} \hat{B} = 2 - K^2$ - цикл **устойчив** при $K < 2$. Для $C_2^{(2)}$: $\text{Sp} \hat{B} = 2 + 4K \sin \phi + K^2 \sin^2 \phi > 2$: цикл **неустойчив** при $K > 0$.

§ 6.02 Резонанс с числом вращения $\alpha = 1/2$

◆ При $K < 2$ вблизи точек устойчивого цикла \vec{c}_1, \vec{c}_3 есть множество точек с числом вращения $\alpha = 1/2$: *полуцелый резонанс* (ПР). Его форму можно найти тем же способом континуализации, который был использован в §4.02 для определения сепаратрисы главного ($\alpha = 0, 1$) резонанса (и не только им: см. [2, с. 259-261]).

◆ Положение точки после двух отображений дается формулами

$$I'' = I + K \sin \theta + K \sin(\theta + I + K \sin \theta), \quad (5)$$

$$\theta'' = \theta + 2I + 2K \sin \theta + K \sin(\theta + I + K \sin \theta), \quad (6)$$

Если $I \approx \pi$ и $K \ll 1$, то изменения положений точек за два цикла отображения малы. Переходя к непрерывному времени n ,

$$I'' = I + \frac{dI}{dn}, \quad \theta'' = \theta + \frac{d\theta}{dn}, \quad (7)$$

вводя переменную $J = I - \pi \sim K \ll 1$ и сохраняя в правых частях уравнений (5) и (6) члены первого неисчезающего порядка по K , получаем

$$\frac{dJ}{dn} = -KJ \cos \theta - \frac{K^2}{2} \sin 2\theta, \quad \frac{d\theta}{dn} = 2J + K \sin \theta. \quad (8)$$

Это - канонические уравнения движения для системы с гамильтонианом

$$H_r(J, \theta) = J^2 + KJ \sin \theta - \frac{K^2}{4} \cos 2\theta. \quad (9)$$

Полагая $E = \varepsilon K^2/4$, из (9) находим уравнения для фазовых траекторий

$$J(\theta) = -\frac{K}{2} \left[\sin \theta \pm \sqrt{1 + \varepsilon - \sin^2 \theta} \right]. \quad (10)$$

Уравнение сепаратрисы полуцелого резонанса - линии уровня $H_r = 0$:

$$S_0^{(1/2)}(\theta) = \pi - \frac{K}{2} \sin \theta \pm \frac{K}{2} \cos \theta \quad (11)$$

При малых K резонанс с $\alpha = 1/2$ имеет ширину по действию $\delta I = K$.

✧ Для стандартного отображения оценить ширину по действию резонанса с числом вращения $\alpha = 1/3$ в низшем порядке по K .

◆ Найдем соответствующее перекрытию целого и полуцелого резонансов значение порога глобальной стохастичности K_c . Учитывая деформацию сепаратрис, возьмем для сепаратрисы главного резонанса скелет первого порядка (см. §5.04)

$$S_1(\theta) = \sqrt{4K + K^2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K}{2} \sin \theta, \quad (12)$$

а для сепаратрисы полуцелого порядка - выражение (11). Тогда из критерия Чирикова получим уравнение

$$\sqrt{4K_c + K_c^2} + \frac{K_c}{2} = \pi, \quad (13)$$

откуда

$$K_c = \frac{2}{3} \left[\sqrt{16 + 8\pi + 4\pi^2} - \pi - 4 \right] = 1.225 \quad (14)$$

Это значение имеет относительную ошибку $\delta = 0.26$.

§ 6.03 Иррациональные числа вращения

◆ Кроме траекторий, захваченных в резонансы, и стохастических слоев, возникающих при расщеплении сепаратрис резонансов, в фазовом пространстве есть инвариантные кривые, обладающие иррациональными числами вращения. Их анализ требует описания арифметической структуры иррациональных чисел, которая связана со свойствами разложений этих чисел в цепные дроби (см. **VIB§1.02**).

◆ Рассмотрим разложение числа α ($0 < \alpha < 1$) в *цепную* (непрерывную) *дробь* (**continued fraction**)

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (15)$$

где a_i - целые числа. Для погрешности n -й подходящей дроби $\bar{\alpha}_n = p_n/q_n$ элементарно доказывается неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}. \quad (16)$$

Дробь $\bar{\alpha}_n$ является наилучшим приближением для иррационального числа α среди всех дробей с равными или меньшими знаменателями.

◆ Теорема (J. Liouville, 1851). Если α есть корень полинома степени N с целыми коэффициентами, то существует константа $0 < \delta < 1$ такая, что для всех целых p и q имеет место неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\delta}{q^N}. \quad (17)$$

Из теоремы следует, что хуже всего аппроксимируются рациональными числами *квадратичные иррациональности* - корни уравнений

$$c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 = 0 \quad (18)$$

с целыми коэффициентами c_i . Для них константа δ дается формулой

$$\delta = \frac{2}{3}(c_1^2 - 4c_0c_2)^{-1/2}. \quad (19)$$

◇ Доказать, что при целых c_i минимальным иррациональным значением выражения $(c_1^2 - 4c_0c_2)^{1/2}$ является $\sqrt{5}$.

§ 6.04 Теорема Колмогорова - Арнольда - Мозера (КАМ)

◆ Эта теорема утверждает существование нерезонансных торов (орбит квази-периодического движения - в нашем примере стандартного отображения одномерными торами являются инвариантные кривые с иррациональными числами вращения) в слабо возмущенной системе. Приведем ее формулировку, принадлежащую И.В. Арнольду [А89, с.372]

Теорема. Если невозмущенная гамильтонова система не вырождена, то при достаточно малом консервативном гамильтоновом возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы.

Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.

↔ [А89] - Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. - М.: Наука, 1989. - 472 с.

✧ Теорема имеет варианты, охватывающие как случай неавтономных гамильтоновых систем с периодическим возмущением, так и случай отображений, сохраняющих площадь [А89, с.376].

◆ Для отображений невырожденность означает зависимость числа вращения невозмущенного тора от действия I . Для стандартного отображения это так. Величина возмущения в КАМ-теории пропорциональна управляющему параметру ε . В нашем примере эту роль играет параметр K .

◆ Нерезонансными являются те инвариантные кривые (торы), для которых число вращения α удовлетворяет соотношению

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \delta q^{-5/2}, \quad (20)$$

где δ - величина, не зависящая от q и малая вместе с ε . Мера части интервала чисел вращения $0 < \alpha < 1$, занятой числами, не удовлетворяющими условию (20), конечна, $\mu_\alpha < \delta \sum q^{-3/2} = \text{const} \cdot \delta$, и мала вместе с δ (и, соответственно, с $\varepsilon = K$).

📖 [1, с.22; • 2, с.185 • 3, с.21 • 4, с.77; • 5, с.164; • 7, с.101 • 10, с.26]

§ 6.05 Разрушение золотого тора.

◆ По современным представлениям, переход ко глобальной стохастичности связан с разрушением всех нерезонансных торов.

✧ Теорема КАМ **не утверждает**, что при достаточно большом возмущении все нерезонансные торы будут разрушены.

◆ Теорема Лиувилля (§6.04) позволяет указать число вращения \mathfrak{g} , наиболее далекое от рациональных, и выделить наиболее устойчивый тор. Из формулы (17) следует, что N должно быть взято минимальным и равным двум: число \mathfrak{g} должно быть квадратичной иррациональностью. Из формулы (17) следует также, что δ должно быть взято максимальным. Наконец, знаменатели q_n подходящих дробей $\bar{\mathfrak{g}}_n$ должны быть минимальными. Этим условиям удовлетворяет **золотое число \mathfrak{g} (golden number)**, называемое также **золотым средним (golden mean)** или золотым сечением:

$$\mathfrak{g} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\dots, \quad (21)$$

удовлетворяющее уравнению

$$\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{g} - 1 = 0. \quad (22)$$

В разложении \mathfrak{g} в цепную дробь все коэффициенты равны единице: $\mathfrak{g} = [1, 1, 1, 1, \dots]$. Рекуррентные соотношения для p_n и q_n в этом случае совпадают с уравнениями движения модели Фибоначчи (см. § 1.04, пункт 4). Соответственно, n -я подходящая дробь для \mathfrak{g} дается отношением двух последовательных чисел Фибоначчи,

$$\bar{\mathfrak{g}}_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}. \quad (23)$$

Гипотеза о максимальной устойчивости **золотого тора** с числом вращения \mathfrak{g} была высказана Грином в 1979 г. [G79].

⇒ [G79] - Greene J. - J. Math. Phys., 1979, 20, 1183.

✧ Из-за инвариантности стандартного отображения при преобразовании $I \rightarrow 2\pi - I$, $\theta = 2\pi - \theta$ теми же свойствами обладает тор с числом вращения $\alpha = 1 - \mathfrak{g} = [2, 1, 1, 1, \dots] = 0.38196\dots$

◆ Критическое значение K_c , при котором золотой тор теряет устойчивость, можно найти, рассматривая границы устойчивости $K_c(n)$ аппроксимирующих его циклов с числами вращения $\alpha = \bar{\mathfrak{g}}_n$. Шмидт и Бялек [SchB82] рассчитали условия устойчивости таких циклов до $n = 12$ и обнаружили, что отношения разностей последовательных пороговых значений,

$$R_n = \frac{K_c(n) - K_c(n+1)}{K_c(n-1) - K_c(n)}, \quad (24)$$

с ростом n стремятся к постоянному значению $R \approx 0.61$. Экстраполируя найденные значения $K_c(n)$ к $n \rightarrow \infty$ по формуле

$$K_c(n) = K_c + AR^n, \quad (25)$$

они получили значение

$$K_c = 0.9716, \quad (26)$$

хорошо согласующееся с результатами численных экспериментов.

∞ [SchB82] - Schmidt G., Bialek J. Physica D, 1982, 5, 397.

📖 [2, с.195,269,278; • 4, с.154(?) • 5, с.164 • 10, с.53]

§ 6.06 Предварительные выводы

◆ Стандартное отображение есть стробоскопическое отображение (§ 3.03) для неавтономной гамильтоновой системы $H_T(p, q, t)$ с одной степенью свободы и периодическим возмущением, $H_T(I, \theta, t) = H_0(I, \theta) + V(\theta, t)$,

$$H_0(I, \theta) = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta, \quad V(\theta, t) = K \cos \theta \left(-1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \right). \quad (27)$$

Возмущение выбрано так, что $\bar{V}(\theta, t) = 0$. Параметр K далее считаем "силой возмущения" и обозначаем V .

◆ Считая рассмотренную систему достаточно общей, можно сделать следующие предварительные выводы.

1. $V \neq 0 \Rightarrow \exists \chi$

В гамильтоновой системе $H_T(I, \theta, t)$ с $K = 3$ хаотическое движение существует при любой отличной от нуля величине возмущения $V \neq 0$.

2. $\chi = (W_u + W_s)$

Под действием возмущения сепаратрисы резонансов расщепляются, порождая локализованные в их окрестности стохастические слои - объединения несовпадающих устойчивого и неустойчивого многообразий седловых точек (§ 4.02).

3. $\mu \neq 0; \frac{d\mu}{dV} > 0; V \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow 1$

Мера хаотической компоненты μ отлична от нуля при любой конечной величине возмущения V . С ростом возмущения мера стохастической компоненты монотонно увеличивается. При неограниченном росте возмущения стохастическая компонента заполняет все фазовое пространство (§ 4.03).

$$4. \frac{d\sigma}{dV} > 0$$

Величина показателя Ляпунова σ монотонно возрастает с увеличением возмущения (см. данные эксперимента в работе [GK85] из § 4.04).

$$5. \chi \supset (\bar{x} | \sigma(\bar{x}) > 0); \quad \mu \approx 1 \Rightarrow \sigma \approx \langle \sigma(\bar{x}) \rangle$$

Хаотическая компонента всегда включает неустойчивые точки. В области, где хаос является почти сплошным, показатель Ляпунова можно оценить как среднее значение показателя локальной неустойчивости $\sigma(\bar{x})$ по фазовому пространству (см. расчет в § 4.04).

$$6. \frac{d\gamma}{dV} > 0; \quad \gamma \cong \sigma$$

Скорость перемешивания γ , в общем, увеличивается с ростом возмущения. Величина скорости перемешивания близка к показателю Ляпунова (§ 5.01).

$$7. \exists V_c: V > V_c \Rightarrow I_n \rightarrow \infty$$

Существует порог глобальной стохастичности - значение V_c величины возмущения, при переходе через которое качественно меняется характер движения: из финитного по действию оно становится инфинитным (§ 5.03, 04).

$$8. V > V_c \Rightarrow \langle I^2(t) \rangle \propto t$$

В области глобальной стохастичности V_c движение переменной действия имеет диффузионный характер: средний квадрат действия растет пропорционально времени (§ 5.04).

◆ С точки зрения эксперимента наиболее примечательны выводы **7** и **8**: они позволяют допустить существование в нелинейных системах перехода к неограниченному поглощению энергии внешнего поля, имеющего пороговый характер по величине поля. Такое поглощение может привести систему к распаду (диссоциации, ионизации), который может быть зарегистрирован.

◆ С точки зрения теории наиболее уязвимы выводы **1**, **3**, **4** и **6** в области малых $V \equiv K$: фактически нам удалось провести расчеты характеристик стохастического движения только в области $K \geq 1$. При $K \ll 1$ численные методы мало эффективны: нужны специальные аналитические методы.

EOL

