

ЛЕКЦИЯ # 05

СТАНДАРТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 3

§ 5.01 Характеристики стохастической компоненты: автокоррелятор $s = \sin \theta$

✧ Выбор переменной оправдан следующим. 1. Величина $s = \sin \theta$ дает информацию о статистических свойствах угловой переменной. 2. Вычислять значения автокоррелятора удобнее для s , чем для пилообразной величины $\theta \{\text{mod } 2\pi\}$; 3. Величина s пропорциональна приращению действия, $\Delta I = Ks$, и дает непосредственно информацию о статистических свойствах ΔI .

◆ Корреляционную функцию переменной a можно вычислить с помощью соотношения

$$B_a(k) = \int_{\mu} a_k a_0 d\vec{x} \quad (1)$$

где интегрирование ведется по всей области, занятой хаотической компонентой. Такое вычисление возможно при $K \gg 1$, когда $\mu \approx 1$ (см. § 4.03) и хаотической компонентой можно считать весь базовый квадрат. Расчеты $B_a(k)$ при небольших k элементарны.

$$B_s(0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dI \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}, \quad (2)$$

$$B_s(1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dI \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin(\theta + I + K \sin \theta) d\theta = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} B_s(2) &= \int_{\mu} s_{-1} s_1 d\vec{x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dI \int_0^{2\pi} \sin(\theta - I) \sin(\theta + I + K \sin \theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta + K \sin \theta) d\theta = -J_2(K) \end{aligned} \quad (4)$$

где $J_n(z)$ - функция Бесселя первого рода. Аналогично в конечном виде выражается

$$B_s(3) = J_2^2(K) + J_3^2(K) - J_1^2(K). \quad (5)$$

Значения $B_s(2)$ и $B_s(3)$ найдены в работах [RW80, RRW81].

∞ [RW80] - Rechester A.B., White R.B. Phys. Rev. Lett., 1980, 44, 1586

∞ [RRW81] - Rechester A.B., Rosenbluth M.N., White R.B. Phys. Rev. A 1981, 23, 2664.

◆ При $K \gg 1$ из асимптотик $J_n(z)$ следуют оценки для $B_s(n)$: $B_s(2) \sim K^{-1/2}$ и $B_s(3) \sim K^{-1}$. Экстраполяция по n дает:

$$B_s(n) \sim \exp(-\gamma(n-1)), \quad \gamma \approx \frac{1}{2} \ln K \quad (6)$$

В асимптотике (см. формулу (16) в § 4.04) $\gamma \approx \frac{1}{2} \sigma$ (ср. § 2.02).

📖 [1, с.79 • 2, с.325 • 4, с.125].

✧ Для стандартного отображения нарисовать график зависимости скорости перемешивания γ_s угловой переменной $s = \sin \theta$ от K в интервале $8 \leq K \leq 9$.

КОММЕНТАРИЙ. Соль этой задачи в том, что при $K = 8.417$ значение $B_s(2)$ обращается в ноль, а значение $B_s(3)$ очень близко к нулю, $B_s(3) \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, первые три значения корреляционной функции (почти) нулевые, и скорость перемешивания имеет максимум. С другой стороны, при больших K показатель Ляпунова монотонно растет с ростом K (см. § 4.04). Пример показывает, что при изменении параметров показатель Ляпунова и скорость перемешивания могут меняться в разных направлениях.

§ 5.02 Перекрывтие резонансов

◆ Для стандартного отображения при увеличении параметра K мера стохастической компоненты быстро возрастает, приводя к образованию стохастического моря. Приближенное условие возникновения стохастического моря дается следующим критерием.

Критерий перекрывтия резонансов (критерий Чирикова). Если неавтономная система с периодически зависящим от времени возмущением при малом возмущении может быть описана как обладающая резонансами с центрами, лежащими при значениях действия I_1^* и I_2^* ($|I_1^* - I_2^*| = \Delta I$), и имеющими ширины по действию δI_1 и δI_2 , то при выполнении условия

$$\frac{1}{2}(\delta I_1 + \delta I_2) = \Delta I$$

окрестности сепаратрис обоих резонансов охвачены общим стохастическим морем.

📖 [1, с.80 • 2, с.257 • 4, с.127].

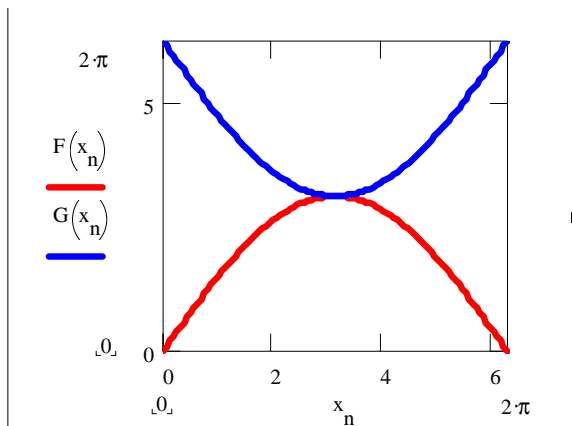
◆ Найдем простейшую оценку параметра K_c , при котором происходит перекрывтие резонансов стандартного отображения. Рассмотрим резонансы с центрами $(\pi, 0)$ и $(\pi, 2\pi)$ (числа вращения $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$). Разность действий между центрами $\Delta I = 2\pi$. Описывая границу резонанса сепаратрисой нулевого приближения (§ 4.02, ф-ла (9))

$$I_s^{(0)} = \pm 2\sqrt{K} \sin \frac{\theta}{2}, \quad I_s^{(1)} = 2\pi \pm 2\sqrt{K} \sin \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

получаем $\delta I_1 = \delta I_2 = 4\sqrt{K}$. Из критерия Чирикова $2\pi = 4\sqrt{K_c}$ находим порог:

$$K_c = \frac{\pi^2}{4} = 2.47. \tag{8}$$

В дальнейшем мы уточним это значение.



В низшем приближении перекрытие главных резонансов стандартного отображения происходит при $K_c = 2.47$

✧ Найти условие перекрытия резонансов для одномерной модели, описывающей частицу массы m в потенциальном ящике - поле с потенциалом

$$U(x) = 0 \quad (|x| < a), \quad U(x) = \infty \quad (|x| > a)$$

под действием гармонической силы $F \cos \omega t$.

§ 5.03 Диффузия по действию

◆ Для стандартного отображения одновременно перекрываются **все** резонансы с центрами в точках $I_N^* = 2\pi N$. Поэтому существует критическое значение K_c такое, что при $K \leq K_c$ движение финитно по действию (при $\forall n \ |I_n - I_0| < 4\pi$), а при $K > K_c$ движение инфинитно по действию: при $n \rightarrow \infty \ |I_n|$ может стать больше любого заданного $I^* > 0$. Значение K_c называется *порогом глобальной стохастичности*.

✧ Численные эксперименты дают для значения $K_c \approx 1$: $K_c = 0.989$ [Ch79, p.313], $K_c = 0.972(1)$ [BTZ84]. ✧ Вместе с действием растет и энергия ротатора $E \sim I^2$; поэтому переход ко глобальной стохастичности обеспечивает возможность неограниченного увеличения энергии системы. Нелинейные консервативные системы с регулярным движением **НЕ МОГУТ** неограниченно поглощать энергию внешнего поля постоянной частоты.

↪ [BTZ84] - Benettin G., Turchetti G., Zanetti G. Phys. Lett. A, 1984, 105, 9, 436-8.

◆ Для стандартного отображения на цилиндре приращение действия за n отображений есть $\Delta I_n = I_n - I_0$. Найдем зависимость $\langle \Delta I_n^2 \rangle$ от n и K при $K \gg 1$, считая начальные точки равномерно распределенными по θ :

$$\langle \Delta I_1^2 \rangle = K^2 \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{K^2}{2}, \tag{9}$$

$$\langle \Delta I_2^2 \rangle = K^2 \langle \sin^2 \theta \rangle + K^2 \langle \sin^2 \theta' \rangle + 2K \langle \sin \theta \sin \theta' \rangle \tag{10}$$

◆ Простейшее приближение. Пренебрегая корреляциями $s = \sin \theta$, что оправдано при $K \gg 1$ - (см. § 5.01), получаем

$$\langle \Delta I_n^2 \rangle \approx \frac{K^2}{2} n \quad (11)$$

Рост среднего квадрата величины, пропорциональный времени, называется *диффузионным*. По определению, коэффициентом диффузии (по действию) называется величина

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \Delta I_n^2 \rangle}{2n} \quad (12)$$

В пренебрежении корреляциями $D = K^2/4$.

✧ Диффузия возможна только при $K > K_c$ (см § 5.02).

◆ Уточненное приближение. Коэффициент диффузии по действию с учетом корреляций. Поскольку

$$I_n = \left(\sum_{j=1}^n \Delta I_j \right) + I_0 = K \left(\sum_{j=0}^{n-1} \sin \theta_j \right) + I_0, \quad (13)$$

то

$$D = \frac{K^2}{2} \left[\sum_{k \geq 0} B_s(k) \right] \quad (14)$$

где $B_s(k)$ - корреляционная функция переменной $s = \sin \theta$ (см. § 5.01).

📖 [2-с.317-332].

§ 5.04 Улучшение оценки K_c :

учет деформации сепаратрис

◆ Оценка порога глобальной стохастичности (8) недостаточно точна. Сепаратриса (S_0) получена при $K \ll 1$ для области $|I| \ll 1$, далекой от зоны перекрытия резонансов ($|I| \approx \pi$). Более точно форму стохастического слоя можно описать *скелетом* $S(\theta)$ - непрерывной кривой, касательной к устойчивому (W_s) и неустойчивому (W_u) многообразиям седловой точки \vec{o}_1 в ее окрестности. Представим форму скелета n -го приближения $S_n(\theta)$ разложением

$$S_n(\theta) = \sum_{m=1}^{2n} A_m(K) \sin \frac{m\theta}{2}. \quad (15)$$

Потребуем, чтобы при $\theta \rightarrow 0$ и при $\theta \rightarrow 2\pi$ члены степенного разложения S_n по θ и по $\varphi = 2\pi - \theta$ совпадали с соответствующими членами разложения асимптотики инвариантного множества $I_W(\theta)$ (см. § 4.02) до порядка n включительно. Это требование определяет систему $2n$ линейных уравнений для $A_m(K)$.

◆ Ограничимся первым порядком. Для верхней части ($I(\theta) > 0$) скелета резонанса с $\alpha = 0$ скелет должен иметь при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow 2\pi$ те же углы наклона, что и собственные векторы матрицы \hat{A} . Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_2 &= -K + \sqrt{4K + K^2} \\ -A_1 + 2A_2 &= -K - \sqrt{4K + K^2} \end{aligned} \quad (16)$$

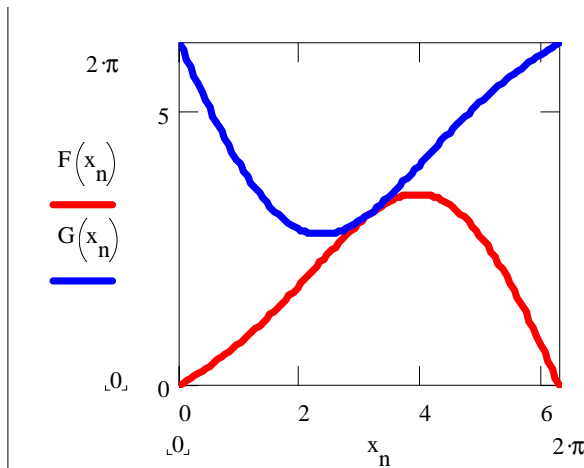
Отсюда - уравнение для скелета первого порядка:

$$S_1(\theta) = \sqrt{4K + K^2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K}{2} \sin \theta \quad (17)$$

При увеличении K скелеты резонансов с $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ касаются в точке $\theta = \pi$. Из уравнения $S_1(\pi) = \pi$ находим порог:

$$K_c = \sqrt{\pi^2 + 4} - 2 = 1.72 \quad (18)$$

что существенно лучше оценки (8).



Касание деформированных сепаратрис главных резонансов стандартного отображения происходит при $K_c = 1.72$.

§ 5.05 Стандартное отображение: циклы длины 2

◆ Продолжим уточнение критерия перекрытия, учтя промежуточный резонанс с числом вращения $\alpha = 1/2$. Описание этого резонанса начнем с исследования связанных с ним периодических точек. Периодическими точками (периода n) отображения \hat{T} называются неподвижные точки \vec{c} отображения \hat{T}^n : $\vec{c} = \hat{T}^n \vec{c}$, которые не являются неподвижными точками отображения \hat{T}^m ни при каких целых $m < k$. Совокупность периодических точек $C_n = \{\vec{c}, \hat{T}\vec{c}, \hat{T}^2\vec{c}, \dots, \hat{T}^{n-1}\vec{c}\}$ называется *циклом* C_n длины n отображения \hat{T} .

◆ Уравнения для неподвижных точек **квадрата** стандартного отображения \hat{S}^2 получаются приравниванием второй итерации отображения,

$$I'' = I + K \sin \theta + K \sin(\theta + I + K \sin \theta), \quad (19)$$

$$\theta'' = \theta + 2I + 2K \sin \theta + K \sin(\theta + I + K \sin \theta), \quad (20)$$

начальным значениям:

$$I'' = I, \quad \theta'' = \theta + 2\pi. \quad (21)$$

Уравнения (19-20) эквивалентны системе

$$\sin \theta = \sin \left(\theta + \frac{K}{2} \sin \theta \right), \quad I = \pi - \frac{K}{2} \sin \theta. \quad (22)$$

✧ При $K = 0$ циклы C_2 заполняют окружность $I = \pi$.

На интервале $0 \leq \theta < 2\pi$ первое уравнение имеет 4 корня θ_i : два - из уравнения

$$\theta = \theta + \frac{K}{2} \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0; \quad \theta_3 = \pi; \quad I_1 = I_3 = \pi \quad (23)$$

Еще два - из уравнений

$$\theta = 2\pi n + \pi - \theta - \frac{K}{2} \sin \theta \quad (n = 0, 1) \quad (24)$$

Обозначим \vec{c}_i точки циклов C_2 с координатами (θ_i, I_i) . Пусть $n = 0$. Уравнение

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{K}{4} \sin \theta \quad (25)$$

при $K < 4$ можно решать итерациями. Положим $\theta = \pi/2 - \phi(K)$, где сдвиг $\phi(K) \rightarrow 0$ при $K \rightarrow 0$. В нулевом приближении $\theta_2^{(0)} = \pi/2$. В первом приближении $\theta_2^{(1)} = \pi/2 - (K/4)$. Продолжая итерации, получаем: $\theta_2 = \pi/2 - \phi(K)$, $I_2 = \pi - 2\phi(K)$,

$$\phi(K) = \frac{K}{4} - \frac{K^3}{128} + \frac{13K^5}{6144} - \dots \quad (26)$$

Аналогично $\theta_4 = 3\pi/2 + \phi(K)$, $I_4 = \pi + 2\phi(K)$.

