ЛЕКЦИЯ # 04
СТАНДАРТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 2

§ 4.01 Стандартное отображение при малых K: резонанс и сепаратриса

◆ Пусть $\hat{T}$ - отображение. Множество Q точек $\{\vec{x}\}$ фазового пространства, таких, что $(\vec{x} \in Q) \Rightarrow (\hat{T}\vec{x} \in Q)$, называется *инвариантным множеством* (**invariant set**) отображения $\hat{T}$. Инвариантное множество есть или фазовая траектория, или объединение (быть может, бесконечного числа) фазовых траекторий.

◆ Инвариантные кривые динамической системы на цилиндре или торе удобно характеризовать *числом вращения* α (**winding number**), которое определяется как среднее значение приращения циклической координаты за одно отображение, измеренного в долях полного угла:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{2\pi n}. \tag{1}$$

При подсчете α угол θ не приводится к интервалу $(0,2\pi)$.

✧ Для стандартного отображения при $K=0$ число вращения инвариантных кривых пропорционально действию: $\alpha = I_0/2\pi$.

◆ При $K \ll 1$ в области $|I| \ll 1$ изменения I и θ за одну итерацию малы: из (S) приближенно следуют ДУ

$$\frac{dI}{dn} = K\sin\theta, \quad \frac{d\theta}{dn} = I + \frac{dI}{dn}. \tag{2}$$

✧ Исследовать фазовый портрет динамической системы (11).

Пренебрегая последним членом в ПЧ второго уравнения:

$$\frac{dI}{dn} = K\sin\theta, \quad \frac{d\theta}{dn} = I. \tag{3}$$

Это - канонические уравнения для автономной системы с гамильтонианом

$$H(I,\theta) = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta \tag{4}$$

Система (4) называется *маятником* (**pendulum**).

✧ Гамильтониан (4) может быть получен усреднением по времени гамильтониана ротатора с периодическими толчками (2) (§ 3.3).

◆ В этом приближении инвариантные множества стандартного отображения (S) есть линии уровня гамильтониана маятника $H(I,\theta)$. Устойчивой неподвижной точке соответствует $H(\vec{o}_2) = -K$. Неустойчивой (седловой) неподвижной точке соответствует $H(\vec{o}_1) = K$.

◆ Проходящая через седло линия уровня $H(I,\theta)=K$ есть *сепаратриса* (separatrix). Она определяется уравнением

$$I_S(\theta)=\pm 2\sqrt{K}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (S_0)$$

Внутри сепаратрисы для $\forall$ кривой $\alpha=0$. Это - область нелинейного резонанса (*резонанс*) с $\alpha=0$.

✧ Проверить выполнение использованного при переходе от (2) к (3) допущения $|dI/dn|<<|I|$ на сепаратрисе (S_0).

§ 4.02 Устойчивое и неустойчивое многообразия Расщепление сепаратрисы

◆ Пусть в фазовом пространстве $\{\vec{x}\}$ задано отображение $\hat{T}$. Совокупность точек $\vec{x}$, которые при эволюции системы стремятся к данной (неподвижной) точке $\vec{o}$, совпадая с ней в пределе, образует *устойчивое многообразие* W_s (**stable manifold**) точки $\vec{o}$.

$$\lim_{n\to\infty}\hat{T}^n(\vec{x})=\vec{o} \quad\Rightarrow\quad \vec{x}\in W_s \qquad (5)$$

Неустойчивое многообразие W_u (**unstable manifold**) точки $\vec{o}$ для отображения $\hat{T}$ есть устойчивое многообразие обратного ему отображения $\hat{T}^{-1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\hat{T}^{-n}(\vec{x})=\vec{o} \quad\Rightarrow\quad \vec{x}\in W_u \qquad (6)$$

✧ По определениям, W_s и W_u суть инвариантные множества. ✧ Пример. Сепаратриса (S_0) есть W_s и W_u для точки $\vec{o}_1$ в гамильтоновой системе (4), если за $\hat{T}$ взять оператор эволюции с любым интервалом времени Δt.

◆ Для отображения (S) сепаратриса маятника (S_0) дает нулевое приближение. Уточним его. Если $W_{s,u}$ есть кривая $I_W(\theta)$, то по определению инвариантного множества вместе с точкой (I_W,θ) на той же кривой должно лежать ее изображение - точка (I'_W,θ'). Отсюда следует функциональное уравнение

$$I_W(\theta+I_W(\theta)+K\sin\theta)=I_W(\theta)+K\sin\theta. \qquad (7)$$

Пусть $I_W(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\theta^n$ $(a_{2k}=0)$. Подстановка этого ряда в разложение (7) и приравнивание коэффициентов при θ дают:

$$a_1^2+a_1K=K \quad\Rightarrow\quad a_1=-\frac{K}{2}\pm\sqrt{K+\frac{K^2}{4}} \qquad (8)$$

В первом приближении W_s и W_u - прямые с **неравными** углами наклона.

◆ Приравнивая коэффициенты при θ^3 в разложении (7) в степенной ряд, находим:

$$a_3 = \frac{K}{6} \cdot \frac{a_1 - 1}{(1 + a_1 + K)^3 + a_1 - 1} \tag{9}$$

и аналогично высшие a_n: при $\theta << 1$ разложение $I_W(\theta)$ быстро сходится.

✧ Найти асимптотический вид коэффициентов a_{2n+1} степенного разложения функции $I_w(\theta)$ при $K \to 0$.

◆ Итерациями участка кривой $I_W(\theta)$ получается форма W_u - петлистая кривая, не входящая в точку $\vec{o}_1$. Множества W_s и W_u не совпадают - это есть *расщепление сепаратрисы*.

📖 [1-с.101 • 2-с.198 • 4-с.135 • 5-с.168].

◆ Устойчивое (W_s) и неустойчивое (W_u) многообразия неподвижной точки типа "седло" могут иметь общие точки; они называются *гомоклинными* (**homoclinic**). Если есть одна гомоклинная точка $\vec{\eta}_1$, то их есть ∞ много: $\vec{\eta}_2 = \hat{T}\vec{\eta}_1 \in W_s$ как образ $\vec{\eta}_1$ и $\in W_u$ как прообраз $\vec{\eta}_1$ при отображении $\hat{T}^{-1}$: $\vec{\eta}_2 = \left(\hat{T}^{-1}\right)^{-1}\vec{\eta}_1$

◆ Общие точки устойчивого многообразия W_s точки $\vec{o}_1$ и неустойчивого многообразия W_u другой точки $\vec{o}_2$ называются *гетероклинными* (**heteroclinic**).

📖 [1-с.99 • 2-с.199 • 3-с.86 • 4-с.135 • 5-с.168 • 6-с.79].

◆ Объединение несовпадающих множеств W_s и W_u неустойчивой точки типа "седло" называется *стохастическим слоем* (**stochastic layer**), *стохастической компонентой* (**stochastic component**) фазового пространства или *хаотической компонентой* (**chaotic component**).

§ 4.03 Характеристики стохастической компоненты: мера

◆ *Мера стохастической компоненты* μ есть доля объема (компактного) фазового пространства, занятая точками стохастической компоненты

◆ Простой способ подсчета меры (на примере стандартного отображения). Базовый квадрат разбивается на N^2 квадратных ячеек. Выбирается $\vec{x}_0 \in W_u$ (например, точка на кривой $I_W(\theta)$). Для последовательности $\{\vec{x}_n\} = \left\{\hat{T}^n \vec{x}_0\right\}$ $(1 \le n \le \mathcal{N})$ подсчитывается число M ячеек, в которые попали точки из последовательности $\{\vec{x}_n\}$. Мера μ определяется формулой

$$\mu = \frac{M}{N^2} \tag{10}$$

При таком подсчете точность определения меры $\delta \geq \max\left(N^{-1}, \exp(-\mathcal{N}/M)\right)$. В работе [Ch79]: найдены значения μ для девяти значений K; в частности, $\mu(1) = 0.44$. Использовались параметры $N = 10^2, \mathcal{N} \approx 10^4$, что дает $\delta \approx 0.1$.

[Ch79] - Chirikov B.V. Phys. Rep., 1979, 52, 5, 263-379.

◆ Зависимость меры μ стохастической компоненты стандартного отображения от параметра K по данным [Ch79] (см. также [2, с. 312]) представляет монотонно растущую функцию:

K	0.5	1	2	3	4	5
μ	0.04	0.44	0.79	0.89	0.92	0.98

◆ Более точный способ: вычисляется $\mu(N)$ для разных N и проводится экстраполяция к $N \to \infty$. В работе [UF85] для стандартного отображения при $K \approx 1$ найдено, что

$$\mu(N) = \mu_\infty + AN^{-\beta}, \tag{11}$$

где $\beta \approx 0.5 \div 0.7$.

[UF85] - Umberger D.K., Farmer J.D. Phys. Rev. Lett., 1985, 55, 7, 661-4.

✧ В работе [UF85] использовались значения $N \leq 4096$ и $\mathcal{N} \sim 10^7 \div 10^8$. Абсолютная погрешность δ значений μ_∞ составляла $2 \cdot 10^{-3}$. Экстраполированное из данных этой работы значение $\mu(1) = 0.514$.

✧ Отличие показателя степени β от 1 служит указанием на бесконечную длину границы стохастической компоненты.

◆ Для описания стохастической компоненты в зависимости от значений μ используют специфические термины. При $\mu \geq 0.1$ говорят о *заметной стохастичности*. Значение управляющего параметра, при котором достигается значение $\mu \geq 0.1$, называют *порогом стохастичности* (**threshold of stochasticity / chaos**). В области $\mu > 0.5$ стохастическую компоненту называют *стохастическим морем* (**stochastic / chaotic sea**), а не принадлежащие "морю" области фазового пространства, большей частью заполненные инвариантными кривыми, описывающими регулярное движение, называют *островками устойчивости* (**islands of stability**). При $\mu \approx 1$, когда существованием островков устойчивости можно пренебречь, говорят о *сплошной стохастичности*. Эти термины не имеют формальных определений.

§ 4.04 Характеристики стохастической компоненты: показатель Ляпунова

◆ Вычисление показателя Ляпунова для отображений. Пусть $\hat{A}(\vec{x}_i)$ - матрица устойчивости (см. § 3.3) в точке $\vec{x}_i \vec{\Delta}_n K\theta_0 = 0\vec{x}_i$, а $\vec{\Delta}_0$ - заданный в этой точке вектор начального отклонения траектории. Вектор отклонения $\vec{\Delta}_n$ после n отображений дается выражением

$$\vec{\Delta}_n = \prod_{i=n-1}^{0} \hat{A}(\vec{x}_i) \cdot \vec{\Delta}_0. \tag{12}$$

Показатель Ляпунова для отображения, по определению (см. § 2.1) равный

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta_n}{\Delta_0}, \tag{13}$$

может быть оценен численно, если вместо перехода к пределу взять число n конечным, но большим.

◆ Найдем аналитическую оценку зависимости $\sigma(K)$, пригодную при $K >> 1$. По определению (см. § 3.3) локальным показателем неустойчивости в точке $\vec{x}$ называется логарифм максимального модуля собственного значения матрицы устойчивости в этой точке: $\sigma(\vec{x}) = \ln(\max|\lambda_i(\vec{x})|)$. Для стандартного отображения собственные значения $\hat{A}$

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{K\cos\theta}{2} \pm \sqrt{K\cos\theta + \frac{K^2\cos^2\theta}{4}} \tag{14}$$

зависят только от угла θ. Усредняя $\sigma(\vec{x})$ по θ, получаем

$$\sigma(K) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\lambda_1(\theta)d\theta + \Theta(K-4)\frac{1}{\pi}\int_{\theta_0}^{\pi} \ln|\lambda_2(\theta)|d\theta \tag{15}$$

где $\Theta(x)$ - функция Хевисайда, а $\theta_0 = \arccos(-4K^{-1})$.

◆ При $K >> 1$ можно пренебречь ограничиться главным членом в асимптотике СЗ по K и положить $\theta_0 = 0$. Тогда интеграл в (15) может быть вычислен аналитически:

$$\sigma(K) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|K\cos\theta|\, d\theta = \ln\frac{K}{2}. \tag{16}$$

Численное интегрирование (15) и даже асимптотическая оценка (16) удовлетворительно согласуются с результатами численных расчетов [GK85].

[GK85] - Grassberger K., Kantz H. Phys. Lett. A, 1985, <u>113</u>, 4, 167-71.