ЛЕКЦИЯ # 03
ДИНАМИКА: КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ
СТАНДАРТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ - 1

§ 3.01 Классификация динамических систем

◆ Основными разделениями динамических систем являются

- разделение их на автономные и неавтономные - по отсутствию или наличию явной зависимости от времени в правых частях уравнений движения - и
- разделение их на консервативные и диссипативные - по отсутствию или наличию изменения величины элемента фазового объема в ходе эволюции.

Повторим основные определения, лежащие в основе классификации, расширив их для включения наряду с потоками и отображений.

◆ Если динамическая система задана уравнениями движения для потоков

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(\{x_i\},\{a_j\}\right), \quad (1 \le i \le K). \tag{1}$$

и если все параметры a_j не зависят от t, то ДС называется *автономной*. Если параметры a_j зависят от t заданным образом, $a_j \equiv a_j(t)$, то ДС называется *неавтономной*.

Это определение непосредственно применимо и к отображениям с уравнениями движения

$$x_i(n+1) = M_i\left(\{x_i(n)\},\{a_j\}\right), \quad (1 \le i \le K). \tag{2}$$

только место зависимости от t занимает зависимость от n.

✧ Автономизация. Каждой неавтономной ДС с K-мерным фазовым пространством может быть сопоставлена эквивалентная автономная ДС с $(K+1)$-мерным фазовым пространством. К системам уравнений движения (1) и (2) добавляются уравнения

$$(1_+): \quad \frac{dx_{K+1}}{dt} = 1; \qquad (2_+): \quad x_{K+1}(n+1) = x_{K+1}(n) + 1. \tag{3}$$

Время t (для потоков) или дискретное время n (для отображений) в аргументах $a_j(t)$ и $a_j(n)$ заменяется на x_{K+1}.

✧ Автономизация - не более чем формальный прием, так как движение полученных при его применении систем всегда инфинитно по последней динамической переменной. Практически он нужен для упорядочения классификации динамических систем: говоря о системах с данным значением K, мы будем подразумевать как автономные системы с K переменными, так и неавтономные с $K-1$ переменной.

◆ Для динамической системы - потока *локальной диссипацией* $\Lambda(\vec{x})$ в данной точке $\vec{x}$ фазового пространства называется дивергенция поля фазовых скоростей в этой точке, взятая с обратным знаком:

$$\Lambda(\vec{x}) = -\operatorname{div}\dot{\vec{x}} = -\sum_{i=1}^{K}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{K}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}. \qquad (4)$$

✧ Может ли обратимая замена переменных в уравнениях движения перевести консервативную систему в диссипативную?

◆ Эволюция фазового объема. **Теорема.** Для систем - потоков относительная скорость изменения величины элементарного фазового объема равна диссипации с обратным знаком. ✧ Рассмотрим элементарный объем

$$V = \prod_{i=1}^{K}\Delta x_i \qquad (5)$$

вблизи точки $\vec{x}$ фазового пространства.

$$\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\Delta x_i}\frac{d}{dt}(\Delta x_i) = \sum_{i=1}^{K}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -\Lambda(\vec{x}), \qquad (6)$$

QED

◆ Системы, для которых диссипация равна нулю во всех точках фазового пространства, $\Lambda(\vec{x}) \equiv 0$, называются в нелинейной динамике *консервативными*.

✧ По этому определению консервативность означает сохранение фазового объема, а не энергии.

🕮 [5, с.157].

◆ Консервативными являются **любые** (в том числе *неавтономные*, для которых $E \neq \text{const}$) гамильтоновы системы. Из канонических уравнений движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (7)$$

следует

$$\Lambda(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}\right) = 0 \qquad (8)$$

Вывод о сохранении величины фазового объема для гамильтоновых систем называется *теоремой Лиувилля*.

🕮 [2, с.27; • 4, с.10; • 5, с.157; • 7, с.113].

✧ Гамильтоновость системы есть достаточное, но не необходимое условие ее консервативности. Пример негамильтоновой консервативной динамической системы:

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = xy \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\vec{x}) \equiv 0. \qquad (9)$$

◆ Системы, для которых $\Lambda(\vec{x}) \neq 0$, называются *диссипативными*.

◆ Данные выше определения годны для систем - потоков. Определим локальную диссипацию для отображений. Для моделей - отображений с уравнениями движения

$$\vec{x}\,' = \hat{M}(\vec{x}) \tag{10}$$

изменение элементарного фазового объема V вблизи точки $\vec{x}$ за одно отображение дается формулой

$$V' = J(\vec{x})V\,, \tag{11}$$

где

$$J(\vec{x}) = \mathrm{Det}\left|\frac{\partial M_i}{\partial x_j}\right| \tag{12}$$

есть якобиан преобразования (10). По аналогии с теоремой об эволюции фазового объема, локальная диссипация для отображений **определяется** как взятый с обратным знаком логарифм абсолютной величины якобиана преобразования,

$$\Lambda(\vec{x}) = -\ln\left|J(\vec{x})\right| \tag{13}$$

Для сохраняющих фазовый объем отображений диссипация равна нулю.

✧ Может ли система, диссипация которой всюду отрицательна (фазовый объем всюду расширяется), совершать финитное движение?

Ответ: **ДА**. Примером является рассмотренный в предыдущем параграфе линейный датчик случайных чисел, для которого $\Lambda = -\ln K < 0$.

§ 3.02 Исследовательская программа

◆ Хаотическая динамика консервативных и диссипативных систем существенно различна. Например, для консервативных систем - потоков общего вида с $K \geq 3$ хаотическое движение существует почти при любых значениях параметров - но, быть может, только для начальных условий $\vec{x}_0$ из очень малых областей фазового пространства.

Напротив, для диссипативных систем - потоков общего вида с $K \geq 3$ хаотическое движение существует только в ограниченных областях пространства параметров. При этом хаотическим движение является для начальных условий $\vec{x}_0$ из крупных областей фазового пространства.

В дальнейшем мы будем сначала рассматривать консервативные системы (*L03 ~ L09*), а затем - диссипативные (*~L10 - L16*).

Мы ограничимся простейшими типами моделей. Последовательность рассмотрения консервативных систем такова: сначала будет рассмотрен пример консервативного (сохраняющего площадь) отображения с $K = 2$, а затем - модели - потоки с $K = 3$ (неавтономные с двумя динамическими переменными и автономные с тремя).

Последовательность рассмотрения моделей диссипативных систем будет рассмотрена в начале соответствующего раздела

ДИНАМИКА КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

§ 3.03 Стандартное отображение: Определение и модель-прототип

◆ Для гамильтоновой системы $H(p,q,t)$ с периодически зависящим от времени гамильтонианом $H(p,q,t)=H(p,q,t+T)$ отображение фазовой плоскости $\{p,q\}$ в момент t_0 на фазовую плоскость $\{p,q\}$ в момент t_0+T называется *отображением Пуанкаре* (**Poincare map**) или *стробоскопическим отображением* (**stroboscopic map**)

📖 [2, с.215 • 4, с.33 • 5, с.22 • 6, с.34 • 7, с.96].

◆ *Стандартным отображением* (**standard mapping**) называется динамическая система - отображение с динамическими переменными I,θ, параметром $K\ge 0$ и уравнениями движения

$$\begin{aligned} I' &= I + K\sin\theta, \\ \theta' &= \theta + I'. \end{aligned} \qquad \text{(S)}$$

📖 [1, с.74 • 2, с.249 • 4, с.118 • 5, с.27 • 8, с.88(*)]

✧ Топология пространства $\{I,\theta\}$ может выбираться по-разному: как плоскость $R^1\times R^1$ $(-\infty<I,\theta<\infty)$, цилиндр $R^1\times S^1$ $(-\infty<I<\infty,\ 0\le\theta<2\pi)$ и тор $S^1\times S^1$ $(0\le I,\theta<2\pi)$ - т.к. (S) инвариантно при сдвигах $I\to I+2\pi$ и $\theta\to\theta+2\pi$. Развертка тора на плоскость образует *базовый квадрат*.

✧ Найти явный вид отображения $\hat{S}^{-1}$, обратного стандартному отображению.

◆ Матрица устойчивости стандартного отображения есть

$$\hat{A}=\begin{vmatrix} 1 & K\cos\theta \\ 1 & 1+K\cos\theta \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Якобиан $\mathrm{Det}\,\hat{A}=1$: стандартное отображение сохраняет площадь

◆ Модель - прототип: *ротатор с периодическими толчками* (РПТ) (periodically kicked rotator, PKR) - неавтономная гамильтонова система с одной степенью свободы и гамильтонианом вида

$$H(I,\theta,t)=\frac{I^2}{2}+K\cos\theta\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k) \qquad (2)$$

Отображение Пуанкаре для системы (2) в моменты времени $t_k = k - 0$, непосредственно предшествующие k-м толчкам,

$$I_{k+1} = I_k + K\sin\theta_k, \quad \theta_{k+1} = \theta_k + I_{k+1}, \tag{3}$$

имеет вид, совпадающий с (S).

◆ В тривиальном случае $K = 0$ задача Коши может быть решена точно: если $\vec{x}_0 = \{I_0, \theta_0\}$, то

$$\vec{x}_n = \{I_0, \theta_0 + nI_0\}. \tag{4}$$

Величина действия не изменяется, и все точки фазовой траектории лежат на (охватывающей цилиндр) *инвариантной* окружности $I = I_0$, обладающей тем свойством, что то если $\vec{x} \in I(\theta)$, то и $\vec{x}' \in I(\theta)$.

◆ Неподвижные точки стандартного отображения при определяются уравнениями

$$I = I + K\sin\theta, \quad \theta = \theta + I. \tag{5}$$

Стандартное отображение имеет две неподвижные точки:

$$\vec{o}_1 = (0,0), \qquad \vec{o}_2 = (0,\pi). \tag{6}$$

◆ Устойчивость **произвольной** точки фазового пространства определяется собственными значениями линеаризованной в этой точке матрицы $\hat{A}$ оператора отображения - *матрицы устойчивости* с элементами

$$A_{ij}(\vec{x}) = \left.\frac{\partial M_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}} \tag{7}$$

◆ Точка $\vec{x}$ называется *неустойчивой*, если максимальный модуль собственного значения $\hat{A}$ превосходит единицу, $\max_i|\lambda_i| = |\lambda_+| > 1$, и *устойчивой* в противном случае. Величина $\sigma(\vec{x}) = \ln(\max|\lambda_i(\vec{x})|)$ называется *локальным показателем неустойчивости*.

◆ Для двумерных отображений секулярное уравнение для собственных значений λ_i имеет вид

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0 \tag{8}$$

где $S = A_{11} + A_{22}$ - *след* матрицы устойчивости $\hat{A}$, а $J = \mathrm{Det}\,\hat{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ - ее *якобиан*.

◆ В первом квадранте плоскости $\{S, J\}$ собственные значения матрицы $\hat{A}$ действительны выше параболы $S = 2\sqrt{J}$. Точка неустойчива при $J > 1$ или при $S > 1 + J$.

✧ Для двумерного отображения, заданного формулами

$$x' = 1 + y - ax^2, \qquad y' = bx$$

при $a = 1.4$ и $b = 0.3$ найти области локальной неустойчивости на плоскости $\{x, y\}$.

◆ Для стандартного отображения $J = 1$; след матрицы устойчивости

$$\mathrm{Sp}\,\hat{A} = S = 2 + K\cos\theta\ . \qquad (9)$$

В точке $\vec{o}_1 = (0,0)$ $S = 2 + K$: она является неустойчивой (гиперболической) при любых K. В точке $\vec{o}_2 = (0,\pi)$ $S = 2 - K$: она является устойчивой (эллиптической) при $K < 4$ и неустойчивой (гиперболической) при $K > 4$.

☯