ЛЕКЦИЯ # 02
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ПРОГРАММА
ДИНАМИКА: КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

§ 2.01 Основные задачи теории динамических систем

◆ Основные типы задач нелинейной динамики выделяются по аналогии с задачами теории колебаний - теории регулярного движения. Такими являются:

1. *Задача Коши:* по заданному начальному состоянию $\vec{x}(t_0)$ при заданных параметрах $\vec{a}$ найти закон движения $\vec{x}(t)$ для $t > t_0$. Обычно принимают $t_0 = 0$, а начальное состояние $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(0)$ называют ***начальными условиями***.

2. *Исследование устойчивости движения.* Фундаментальной характеристикой данного движения $\vec{x}(t)$ является его ***устойчивость***, определяющая качественный характер взаимного поведения движений с близкими начальными условиями. В частности, решение задачи Коши для данной динамической системы практически ценно, только если известно, что малые вариации начальных условий мало изменят закон движения или отдельные его характеристики. В теории колебаний основную роль играют следующие два определения устойчивости.

◆ Движение $\vec{x}(t)$ ***устойчиво по Ляпунову***, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)$ такое, что из $|\vec{x}(0) - \vec{x}'(0)| < \delta$ при $\forall t$ следует $|\vec{x}(t) - \vec{x}'(t)| < \varepsilon$. При устойчивом по Ляпунову движении фазовые точки, близкие в начальный момент времени, останутся близкими во все моменты.

◆ Движение $\vec{x}(t)$ ***орбитально устойчиво***, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)$ такое, что из $|\vec{x}(0) - \vec{x}'(0)| < \delta$ при $\forall t$ для некоторого t' следует $|\vec{x}(t') - \vec{x}'(t')| < \varepsilon$. При орбитально устойчивом движении фазовые точки, близкие в одном месте фазового пространства, останутся близкими и во всех других местах.

3. *Исследование структуры фазового пространства*. Для автономных систем с фиксированными значениями параметров определение структуры фазового пространства сводится, в первую очередь, к выделению особых (исключительных) фазовых траекторий.

◆ **3.1.** Состояние динамической системы в общем случае изменяется со временем. Поэтому исключительными фазовыми траекториями являются ***неподвижные точки*** (fixed points), представляющие ***состояния равновесия*** системы. Неподвижные точки $\vec{x}_f$ определяются уравнениями $\vec{F}(\vec{x}_f, \vec{a}) = 0$.

◆ **3.2.** Движение динамической системы в общем случае непериодично. Поэтому исключительными являются фазовые траектории, соответствующие ***перио-***

дическому движению. Для автономных динамических систем такие траектории являются замкнутыми кривыми в фазовом пространстве.

◆ **3.3.** Третьим типом исключительных фазовых траекторий являются **сепаратрисы** седловых точек.

◆ **3.4.** Если при движении системы значения динамических переменных остаются ограниченными - существуют такие положительные числа X_i, что $|x_i(t)| < X_i$ при всех t - то движение системы называется ***финитным***. Если хотя бы для одной переменной это условие не выполняется, то движение системы называется ***инфинитным***. Выделение границ областей финитного движения входит в задачу исследования структуры фазового пространства.

4. Исследование динамической системы. При изменении параметров $\vec{a}$ динамической системы в общем случае изменяются и свойства ее исключительных решений. Особый интерес представляет определение граничных значений параметров, при переходе через которые меняется **число** и/или **тип** таких решений. Такое изменение называется ***бифуркацией***, а соответствующие значения $\vec{a}_b$ - ***точками бифуркации***.

◆ Соответственно, в центре исследовательской программы нелинейной динамики, дополняющей теорию колебаний изучением хаотического движения, стоит задача изучения экспоненциально неустойчивых (хаотических) движений - выявление областей их существования в пространстве параметров и определение зависимостей характеристик таких движений (в первую очередь - показателей Ляпунова и корреляционных функций) от параметров динамической системы.

◆ Для регулярного движения в исследовании устойчивости важнейшей является качественная сторона - констатация наличия устойчивости того или иного типа или ее отсутствия. Для хаотического движения ***исследование неустойчивости*** - вычисление показателя Ляпунова - является составной частью определения и потому особенно важно.

Метод численного отыскания σ, основанный на определении этой величины, был предложен в работе

✎ [BGS76] - Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. Phys. Rev. A, 1976, **14**, 6, 2338-42.

Он состоит в следующем.

❶. На интервале времени $(0,\tau)$ решаются численно задачи Коши для опорного движения $\vec{x}_0(t)$ и сопутствующего движения $\vec{x}_1(t)$ с близкими начальными условиями: $|\vec{x}_0(0)-\vec{x}_1(0)| = \Delta(0) << 1$.

❷. В моменты времени $n\tau$ вводятся новые сопутствующие движения с начальными условиями

$$\vec{x}_{n+1}(n\tau) = \vec{x}_0(n\tau) + \frac{\Delta(0)}{\Delta(n)}\left[\vec{x}_n(n\tau) - \vec{x}_0(n\tau)\right], \tag{1}$$

где $\Delta(n) = |\vec{x}_n(n\tau) - \vec{x}_0(n\tau)|$ - и решение задач Коши продолжается. Показатель Ляпунова σ к моменту $t = N\tau$ определяется формулой

$$\sigma = \frac{1}{N\tau}\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{\Delta(n)}{\Delta(0)}. \qquad (2)$$

✧ Значение $\Delta(0)$ следует брать малым в сравнении с характерным масштабом динамических переменных, но большим в сравнении с компьютерной погрешностью Δ_c. Интервал τ должен быть сравним с σ^{-1}. Число N берется достаточно большим, чтобы значение σ установилось с нужной точностью.

✧ В работе [BGS76] вычислялся показатель Ляпунова для движения модели Хенона - Хейлеса (1.6) при $E = 1/6$. Использовались значения $\Delta(0) = 3\cdot 10^{-4}$, $\tau = 0.2$ и $N = 10^5$. Найденное значение $\sigma = 0.14(2)$.

◆ ***Исследование структуры фазового пространства.*** В дополнение к традиционным для теории колебаний исследованиям специальных траекторий - неподвижных точек, траекторий периодического движения и сепаратрис - в нелинейной динамике ставится задача определения областей фазового пространства (в частности, областей начальных значений $\vec{x}_0$), в которых движение системы хаотично. Эти области называются *хаотическими компонентами* фазового пространства.

◆ ***Исследование динамической системы*** включает определение зависимости границ хаотических компонент фазового пространства от параметров динамической системы.

✧ Изменение характеристик регулярного движения при приближении к границам хаотической компоненты в пространстве параметров называется сценарием перехода к хаосу (~L12). Число распространенных сценариев невелико, и они обладают универсальными свойствами.

◆ ***Описание хаотического движения моделью случайного процесса.*** Описание хаотического движения требует вычисления основных характеристик модели случайного процесса - средних значений динамических переменных, функций их распределения и корреляционных функций (см. § 1.02).

Численное определение корреляционных функций $B_{ik}(\tau)$ возможно непосредственно, на основе численного решения задачи Коши для системы уравнений движения для динамических переменных. На практике удобно выбирать значения временного сдвига τ кратными шагу интегрирования h разностной схемы. Как и при вычислении показателя Ляпунова, точность вычислений можно оценить, сравнивая значения $B_{ik}(\tau)$, найденные при усреднении по N и $2N$ точкам.

◆ Если для любой динамической переменной при заданном законе движения $\vec{x}(t,\vec{x}_0)$ корреляционные функции с ростом временного сдвига стремятся к нулю, $\lim_{\tau\to\infty} B_{ik}(\tau) = 0$, то движение системы называется *перемешивающим* (обладающим *перемешиванием*) (**mixing**). Хаотическое движение автономных систем является перемешивающим.

✧ Статус этого утверждения несколько слабее, чем у доказанной теоремы - лучше относиться к нему как к распространенному сочетанию свойств.

◆ Для количественного описания перемешивания используется *скорость перемешивания* γ. Для потоков (τ - действительное) определим γ формулой

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{B(0)} \int_0^\infty |B(\tau)| d\tau, \tag{3}$$

а для отображений (τ - целое) - формулой

$$\gamma = \ln\frac{S}{S-1}, \qquad S = \frac{1}{B(0)} \sum_{n=0}^{\infty} |B(n)|. \tag{4}$$

Для экспоненциальных корреляционных функций эти определения совпадают с обычными. В более сложных случаях они согласуются с интуитивным представлением о скорости затухания корреляций (см. следующую задачу). Величина, обратная γ, называется *временем корреляции* τ_c: $\tau_c \equiv \gamma^{-1}$.

✧ Вычислить скорость перемешивания γ для процесса с корреляционной функцией

$$B(\tau) = B(0) e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega\tau$$

при $\alpha \ll \omega$ и $\alpha \gg \omega$.

✧ Может ли регулярное движение быть перемешивающим?

Определения γ, данные выше, не всегда пригодны. В нелинейной динамике встречаются процессы хаотического движения, для которых корреляционные функции убывают так медленно, что интеграл в (3) и сумма в (4) расходятся - типичны случаи $B \sim \tau^{-1/2}$.

◆ *Спектром мощности* $S_i(\omega)$, или *спектральной плотностью* динамической переменной $x_i(t)$ называется фурье-образ ее автокорреляционной функции:

$$S_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_i(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{5}$$

Если движение перемешивающее, то спектр мощности $S_i(\omega)$ сплошной (*).

§ 2.02 Простейшая модель

◆ Численное определение показателя Ляпунова, функций распределения и корреляционных функций является основным и незаменимым элементом исследования хаотического движения. Наряду с ним в некоторых случаях удается получить для этих величин аналитические выражения - несмотря на то, что закон хаотического движения не доступен аналитическому выражению.

Иллюстрируем это примером. Простейшей моделью нелинейной динамики, обладающей хаотическим движением, является *линейный конгруэнтный датчик случайных чисел* (D.H. Lemer, 1949). Он задается формулой

$$x' = \{Kx + \alpha\}, \tag{6}$$

где K и α - вещественные числа, $\{\ \}$ - знак дробной части. Рассмотрим наиболее простой частный случай, в котором $\alpha = 0$, а K - целое: формула $x' = \{Kx\}$ задает отображение отрезка $[0,1]$ на себя - *пилообразное отображение* (**saw map**).

❶ Функция распределения значений x постоянна: $W(x) \equiv 1$. Для доказательства этого достаточно заметить, что при этом функция распределения преобразованной величины также постоянна, $W(x') \equiv 1$.

❷ Вычислим показатель Ляпунова. За одно отображение малое расстояние Δ увеличивается в K раз, за n отображений - в K^n раз.

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\Delta(n)}{\Delta(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln K^n = \ln K. \tag{7}$$

✧ Вычислить показатель Ляпунова для отображения интервала $(0,1)$ на себя, заданного формулами

$$x' = Kx \quad \left(0 \le x < K^{-1}\right), \qquad x' = \frac{K}{K-1}x - \frac{1}{K-1} \quad \left(K^{-1} < x \le 1\right).$$

❸. Вычислим автокорреляционную функцию динамической переменной. Значения x_n равномерно распределены на отрезке $[0,1]$: функция распределения $W(x) = 1$. Отсюда

$$\bar{x} = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \qquad B_x(0) = \int_0^1 x^2\,dx - \bar{x}^2 = \frac{1}{12}. \tag{8}$$

Для вычисления $B_x(1)$ разобьем $[0,1]$ на интервалы

$$\frac{k-1}{K} < x < \frac{k}{K}, \quad 1 \le k \le K. \tag{9}$$

Тогда в k-м интервале $x' = Kx - (k-1)$, и

$$B_x(1) = \sum_{k=1}^{K} \int_{(k-1)/K}^{k/K} x\big(Kx - (k-1)\big)\,dx - \frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{K} T_k - \frac{1}{4}, \tag{10}$$

$$T_k = K\frac{x^3}{3} - (k-1)\frac{x^2}{2}\Bigg|_L^H = \frac{3k-1}{6K^2}, \tag{11}$$

$$B_x(1) = \frac{1}{6K^2}\sum_{k=1}^{K}(3k-1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{12K} = \frac{1}{K}B_x(0). \qquad (12)$$

◆ В силу соотношения $\{M\{Nx\}\} = \{MNx\}$, справедливого при любых целых M и N, для значений $B_x(n)$ получаем выражение

$$B_x(n) = K^{-n}B_x(0). \qquad (13)$$

Формулу для автокорреляционной функции линейного датчика случайных чисел можно представить в виде

$$B_x(n) = e^{-\gamma n}B_x(0). \qquad (14)$$

где скорость перемешивания (см. § 2.01) $\gamma = \ln K$. Таким образом, для пилообразного отображения скорость затухания корреляций равна показателю Ляпунова,

$$\gamma = \sigma. \qquad (15)$$

Предположение о том, что в **любых** хаотических системах имеет место связь $\gamma \cong \sigma$, является общим поверьем.

🕮 [1, с.24 • 4, с. 103].

✧ Соотношением $\gamma \cong \sigma$ можно пользоваться для оценок - и не более того. В дальнейшем встретятся примеры систем, у которых $\gamma << \sigma$ или $\gamma >> \sigma$.

✧ При каком значении α для датчика случайных чисел $x' = \{2x + \alpha\}$ корреляция x и x' минимальна?

(★) Нарисовать график зависимости скорости затухания корреляций $\gamma(\alpha)$ для этого датчика.

✧ Для идеального датчика случайных чисел по определению какие-либо корреляции отсутствуют: $B_x(n) = 0$ для всех n. Какой длины N должна быть серия случайных чисел, чтобы неидеальность датчика $x' = \{Kx\}$ при $K >> 1$ стала заметной? (Традиционно считается, что отличие флуктуирующей величины от нуля установлено, если ее среднее значение втрое превосходит среднеквадратичную ошибку.)

☯