

ББҚ 22.34 Қ51 УДҚ 535 (075.8)

> Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования СССР для использования в учебном процессе студентами физическия специальностей вузов

КЛЫШКО Д. Н. Физические основы квантовой электроники: Учеб. руководство/Под ред. А. А. Рухадзе.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 296 с., ил.

Изложены основы лазерной физики и спектроскопии с акцентом на современные направления квантовой электроники — нелинейную, квантовую и нестационарную оптику. Наряду с систематической теорией взаимодействия света и вещества дано описание основных **эф**ектов лазерной оптики — оптическое эхо, сверхизлучение, квантовые биения, поляритонное и параметрическое рассеяние, обращение волнового фронта, группировка фотонов и пр.

Для студентов и аспирантов радиофизических и оптических специальностей вузов, а также специалистов, работающих в области квантовой электроники и нелинейной оптики.

Ил. 73. Библиогр. 77 назв.

Рецензенты:

кафедра теоретической физики Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко;

доктор физико-математических наук О. В. Богданкевич

 $K = \frac{1704050000 - 100}{053(02) - 86}$ 126-86

С Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга принадлежит к серии учебных руководств по электронике и радиофизике, составленной преподавателями радиофизического отделения физического факультета Московского университета. Как и другие книги серии [1-3], она соответствует университетским программам для физических факультетов и ставит задачу ознакомить читателей с наиболее общими понятиями, закономерностями и теоретическими методами. При этом акцент делается на трех новых направлениях физической оптики, возникших после создания лазеров и связанных с нестационарным взаимодействием света с веществом (гл. 5), с оптическим ангармонизмом вещества (гл. 6) и с квантовыми свойствами света (гл. 7). Предварительно в первой трети книги изложены теоретические основы более традиционных разделов квантовой электроники. Книга начинается с общего очерка, включающего историю квантовой электроники и ее главные понятия, идеи и термины. Далее рассмотрены основные методы описания взаимодействия излучения оптического диапазона с веществом --- в терминах вероятностей квантовых переходов (гл. 2), с помощью матрицы плотности (гл. 3) и линейной диэлектрической восприимчивости вещества (гл. 4).

Автор стремился наряду с систематическим описанием хотя бы кратко затронуть наиболее необычные (на современном уровне) новые идеи и эффекты, такие, как, например, эффекты сверхизлучения (§ 5.3), обращения волнового фронта (§ 6.5), антигруппировки фотонов (§ 7.6).

Книга предполагает знакомство читателя с основами квантовой механики и статистической физики, но тем не менее в ней много внимания уделено разъяснению используемых понятий. Автор стремился к постепенному усложнению уровня изложения как в пределах каждого раздела, так и всей книги, давая сначала упрощенную качественную картину явления. Более сложные разделы с дополнительной информацией отмечены кружком.

В книге использована наиболее употребительная в квантовой электронике гауссова система единиц, однако при численных оценках энергия и мощность выражаются в джоулях и ваттах.

По квантовой электронике уже имеется целый ряд общих руководств [4—20, 71, 74] на всех уровнях изложения, начиная с популярных [4, 5, 10] и кончая фундаментальными монографиями [7, 11, 14], и по многим вопросам читатель будет отослан к ним. Так, в книге не рассмотрены устройство и параметры лазеров и мазеров и их многочисленные применения. Теория оптических резонаторов и волноводов изложена, в частности, в университетском курсе теории волн [2] (см. также [15, 71]), теория автоколебаний, динамика и классическая

статистика лазерных систем — в курсах теории колебаний [1] и статистической радиофизики [3] (см. также [11, 73]).

В основу книги положен курс лекций по квантовой электронике, который автор более 20 лет читает студентам старших курсов. Этот курс был создан в 1960 г. по инициативе С. Д. Гвоздовера еще до появления лазеров, и первые годы он был полностью посвящен мазерам (парамагнитным усилителям и молекулярным генераторам) и радиоспектроскопии. Но появление лазеров и «лазерная революция» в оптике, спектроскопии и других областях науки и техники, начавшаяся в шестидесятые годы и продолжающаяся по настоящее время, заставляли автора сдвигать «центр тяжести» курса из радиодиапазона в оптический и дополнять его соответствующими разделами. Однако следует помнить, что в основе действия мазеров и лазеров лежат общие принципы и что колыбелью квантовой электроники послужила радиоспектроскопия и радиофизика. Последняя снабдила квантовую электронику одним из основных понятий — понятием обратной связи, и не случайно, что основатели квантовой электроники и нелинейной оптики Басов, Бломберген, Прохоров, Таунс, Хохлов и многие другие были радиофизиками. Иногда вместо названия «квантовая электроника» применяют термин «квантовая радиофизика».

Большое влияние на содержание курса «Квантовая электроника» и настоящей книги оказал Рем Викторович Хохлов, чьи советы и дружеское расположение незабываемы. Автор признателен П. В. Елютину, А. М. Федорченко и А. С. Чиркину, прочитавшим рукопись книги и способствовавшим устранению многих ее недостатков. Автор хотел бы выразить благодарность также В. Б. Брагинскому, стимулировавшему написание этой книги.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

а — поперечный размер, см; оператор уничтожения фотонов

A — площадь, см²; вероятность спонтанного перехода, с⁻¹; вектор-потенциал, (эрг/см)^{1/2}

В — коэффициент пропорциональности между вероятностью вынужденного перехода и спектральной плотностью энергии, см³/(эрг с²)

с — амплитуда состояния

d — дипольный момент, (эрг · см³)^{1/2}

D — электрическая индукция, (эрг/см³)^{1/2}

е — единичный вектор поляризации

E — напряженность электрического поля, (эрг/см³)^{1/2}

🔗 — энергия, эрг

f — частота, c^{-1} ; сила осциллятора

F — плотность потока фотонов, см⁻²·с⁻¹; свободная энергия, эрг

g — кратность вырождения; форм-фактор, с

G — коэффициент передачи; функция Грина; функция корреляции поля, эрг/см³

H — напряженность магнитного поля, (эрг/см³)^{1/2}

H — гамильтониан, эрг

I — интенсивность излучения, эрг/(см² с); единичный оператор

j — плотность тока, [эрг/(см³ · с²) ^{1/2}

k — волновой вектор, см⁻¹

l — длина, см

n — показатель преломления

N — плотность молекул или фотонов, см⁻³; число фотонов на моду

N_i — населенность уровня, см⁻³

П — среднее число фотонов на моду в равновесном излучении

p — импульс, г см/с; давление, эрг/см³

P — поляризация, (эрг/см³)^{1/2}; вероятность

9 — мощность, эрг/с

q — обобщенная координата;

Q — добротность; производящая функция

r — радиус-вектор, см

R — вектор Блоха; коэффициент отражения

s --- момент импульса, эрг ·с

S — вектор Пойнтинга, эрг/ (см² · с)

T — интервал времени, с; температура, К

и — групповая скорость, см/с

U — внутренняя энергия, эрг; оператор эволюции

v — фазовая скорость, см/с

V — объем, см³

🎷 — энергия взаимодействия, эрг

ш — вероятность релаксационного перехода в единицу времени, с⁻¹

W — вероятность перехода в единицу времени, с-1

Z — статистическая сумма

α — линейная поляризуемость, см³; коэффициент поглощения или усиления, см⁻¹

β — квадратичная поляризуемость, (см⁹/эрг)^{1/2}

у — кубическая поляризуемость, см⁸/эрг; константа затухания, с-1

е — диэлектрическая проницаемость

η - квантовая эффективность

Ф — угол места или угол прецессии, рад

0 — ступенчатая функция Хевисайда

и — постоянная Больцмана, эрг/К

 λ — длина волны, см; $\lambda = \lambda/2\pi$

 μ — магнитный дипольный момент, (эрг·см³)^{1/2}; уровень Ферми, эрг ν — индекс поляризации; волновое число, см⁻¹

П - оператор проектирования или суммирования по перестановкам

ρ — матрица или оператор плотности; плотность массы, г/см³; плотность заряда, (эрг/см⁵)^{1/2}

σ — сечение взаимодействия, см²; матрица Паули

т — время релаксации или корреляции, с

ф — фаза или азимут, рад; собственные функции оператора энергии

 $\chi^{(n)}$ — восприимчивость среды порядка *n*, (эрг/см³)^{(1-n)/2}=(Гс)¹⁻ⁿ

ψ̃, Ψ — волновая функция

ω — круговая частота, рад/с

Ω — частота Раби, рад/с; телесный угол, ср

ВКР — вынужденное комбинационное рассеяние

ВПР — вынужденное параметрическое рассеяние

ВТР — вынужденное температурное рассеяние

ГВГ — генерация второй гармоники

ИК — инфракрасный

КАРС — когерентное антистоксово рассеяние света

КФ — корреляционная функция

ММА — медленно меняющаяся амплитуда

ОВФ — обращение волнового фронта

ПГС — параметрический генератор света

ПР — параметрическое рассеяние

РМБ — рассеяние Мандельштама — Бриллюэна

СВЧ — сверхвысокая частота

СИП — самоиндуцированная прозрачность

СКР — спонтанное комбинационное рассеяние

СПР — спонтанное параметрическое рассеяние

УФ — ультрафиолетовый

ФДТ — флуктуационно-диссипативная теорема

ФЭУ — фотоэлектронный умножитель

ЭПР — электронный парамагнитный резонанс

ЯМР — ядерный магнитный резонанс

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электроника изучает взаимодействие электромагнитного поля с веществом в различных диапазонах — от радиоволн до рентгеновского и у-излучений. Познание основных закономерностей этого взаимодействия привело около 25 лет тому назад к созданию лазеров источников когерентного (т. е. монохроматического и направленного) света с большой интенсивностью. Задача оптимизации существующих света с обльшой интенсивностью. Задача оптимизации существующих лазеров и создание новых типов лазеров, а также успехи эксперимен-тальной техники в свою очередь стимулировали дальнейшее развитие квантовой электроники. Этот характерный для современной науки лавинный процесс привел к появлению новых направлений в оптике (нелинейная и квантовая оптика, голография, оптоэлектроника) и спектроскопии (нелинейная и когерентная спектроскопия), к многочисленным применениям лазеров в технологии, связи, медицине. Близки, по-видимому, к разрешению проблемы лазерного термоядер-ного синтеза и лазерного разделения изотопов в промышленном масштабе.

Не столь разнообразные, но важные применения нашли также «старшие братья» лазеров — мазеры, работающие в радиодиапазоне на длинах волн порядка 0,1—10 см и используемые в качестве сверхстабильных эталонов частоты и сверхчувствительных парамагнитных усилителей.

Термин «квантовая электроника» возник из противопоставления классической электронике, имеющей дело в основном со свободными ялассической электронике, имеющей дело в основном со своюодными электронами, которые обладают непрерывным энергетическим спект-ром и, как правило, достаточно хорошо описываются классической механикой. Однако некоторые существенно квантовые приборы (на-пример, основанные на эффекте Джозефсона) по сложившейся традиции не относят к сфере влияния квантовой электроники. Другое назва-ние — «квантовая радиофизика» — также не совсем адекватно, так как не охватывает оптический диапазон.

§ 1.1. Основные понятия квантовой электроники

Принцип действия лазера или мазера основан на трех «китах» — главных понятиях квантовой электроники, а именно на понятиях вынужденного излучения, инверсии населенностей и обратной связи. Вынужденное излучение. При вынужденном излучении происходит «размножение» фотонов: падающий на возбужденный атом или молекулу фотон вызывает с вероятностью W_{12} переход атома на один из

нижних энергетических уровней (рис. 1.1). При этом освободившаяся энергия $\mathscr{C}_2 - \mathscr{C}_1$ передается электромагнитному полю в виде второго фотона, имеющего точно такие же параметры: энергию $\hbar\omega = \mathscr{C}_2 - \mathscr{C}_1$, импульс $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ и тот же тип поляризации, что и падающий фотон. Теперь имеется два неотличимых фотона, которые при взаимодействии с другими возбужденными атомами могут превратиться в четыре фотона и т. д. На классическом языке эта картина соответствует экспоненциальному усилению амплитуды плоской электромагнитной волны с частотой ω и волновым вектором \boldsymbol{k} .

Рис. 1.1. Усиление света при вынужденных переходах. На возбужденный атом падает резонансный фотон, под его действием атом отдает запасенную энергию полю, и в результате в поле имеются уже два неотличимых фотона

Инверсия населенностей. При взаимодействии с атомами, находящимися на нижнем уровне с энергией \mathscr{E}_1 , происходит поглощение фотонов, т. е. ослабление электромагнитной волны. Существенно, что



Рис. 1.2. Получение инверсии населенностей методом оптической накачки: а) исходное больцмановское распределение населенностей; б) под действием мощного резонансного излучения населенности уровней 1 и 3 выравниваются, так что $N_2 > N_1$ вероятность этого процесса W_{21} (в расчете на один атом) точно такая же, как и вероятность вынужденного излучения, $W_{21} = W_{12}$, и поэтому общий эффект зависит от разности чисел атомов $\Delta N \equiv N_1 - N_2$ на уровнях 1 и 2 (обычно населенности уровней N_m относят к единице объема вещества).

Если вещество находится в состоянии термодинамического равновесия

при температуре T, то согласно распределению Больцмана $N_m \sim \exp(-\mathfrak{E}_m/\kappa T)$ (κ — постоянная Больцмана), и поэтому если $\mathfrak{E}_2 > \mathfrak{E}_1$, то $N_2 < N_1$ (рис. 1.2, *a*). В результате вынужденные переходы вниз происходят реже, чем вверх, и поэтому внешнее электромагнитное поле в равновесном веществе ослабляется, затухает. Итак, вещество усиливает поле, если оно находится в неравновесном состоянии с $N_2 > N_1$. Такое состояние называется состоянием с инверсией населенностей или с отрицательной температурой.

Для получения инверсии населенностей разработан целый ряд методов воздействия на вещество. Важнейшими из них являются метод накачки (рис. 1.2, б) с помощью вспомогательного излучения (он применяется в случае твердых и жидких диэлектриков с примесями), метод электрического разряда в газах и метод инжекции в полупроводниках.

Обратная связь и условие самовозбуждения лазера. Чтобы превратить усилитель в генератор, необходимо обеспечить положительную обратную связь, что можно осуществить с помощью пары плоских или сферических зеркал (в мазерах рабочее вещество помещают в СВЧ-резонатор).

Количественно процесс усиления (или ослабления) можно описать следующим образом. Пусть $F [c^{-1} \cdot cm^{-2}]$ — плотность потока фотонов, распространяющихся вдоль оси *z*. Приращение *F* пропорционально вероятности вынужденного перехода в единицу времени *W* и числу активных частиц ΔN :

$$dF/dz = -W \Delta N. \tag{1.1.1}$$

Вероятность вынужденного перехода в свою очередь пропорциональна *F*:

$$W = \sigma F, \tag{1.1.2}$$

где параметр σ [см²] имеет смысл вероятности перехода в единицу времени в случае единичной плотности потока фотонов и называется сечением взаимодействия. В результате

$$dF/dz = -\sigma \Delta N F \equiv -\alpha F, \qquad (1.1.3)$$

откуда следует экспоненциальный закон изменения интенсивности плоской волны в веществе (при α>0 это закон Бугера):

$$F(z) = F(0) e^{-\alpha z}, \quad \alpha \equiv \sigma \Delta N.$$
 (1.1.4)

Параметр а называется коэффициентом поглощения (при $\alpha > 0$) или усиления (при $\alpha < 0$). Обратная величина α^{-1} имеет смысл средней длины пробега фотонов. Сечение взаимодействия о в принципе может достигать величины порядка $3\lambda^2/2\pi$ ($\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны), так что в оптическом диапазоне (где $\lambda \sim 10^{-4}$ см) иногда достаточно иметь $\Delta N \sim 10^{9}$ см⁻³ для получения заметного усиления на расстоянии 1 см.

Пусть рабочее вещество, имеющее длину l, находится между двумя зеркалами (интерферометр Фабри — Перо) с коэффициентами отражения R_1 , R_2 ; тогда из (4) следует пороговое условие для работы лазера:

$$R_1 R_2 e^{-2\alpha l} = 1. \tag{1.1.5}$$

Многослойные покрытия зеркал практически позволяют получить $R \leq 0.99$, так что при l=10 см для возбуждения лазера достаточен коэффициент усиления $\alpha = (\ln R)/l = -0.001$ см⁻¹ (обычно для вывода излучения наружу одно из зеркал имеет меньший коэффициент отражения).

Насыщение и релаксация. Рассмотрим еще несколько важнейших понятий квантовой электроники. Эффект насыщения заключается в выравнивании населенностей ($N_1 = N_2$) какой-либо пары уровней.

в результате вынужденных переходов под действием достаточно интенсивного внешнего излучения. Этот эффект ограничивает и стабилизирует интенсивность излучения квантовых генераторов и коэффициент усиления квантовых усилителей. Процессы *релаксации* противодействуют эффекту насыщения и стремятся восстановить равновесное больцмановское распределение населенностей, определяемое температурой термостата. Процессы релаксации определяют время жизни частиц на уровнях и ширину спектральных линий.

Возбужденная молекула даже в отсутствие падающего излучения или каких-либо других воздействий может совершить переход в одно из нижних энергетических состояний, излучив фотон. Такое излучение называется спонтанным. Спонтанное излучение играет роль «затравки» в процессе возникновения автоколебаний в квантовых генераторах, ограничивает их стабильность и является источником шума в квантовых усилителях. Спонтанные и вынужденные переходы в равновесном веществе приводят к тепловому излучению, описываемому формулой Планка и законом Кирхгофа.

Существенно, что в то время как вынужденные эффекты можно достаточно полно рассчитывать в рамках классической электродинамики с детерминированными амплитудами полей *E*, *H*, спонтанные эффекты последовательно описываются лишь законами квантовой статистической оптики, в которой *E* и *H* являются случайными величинами или операторами.

Упомянутые выше термины и понятия относятся к различным разделам теоретической физики — к квантовой механике (энергетические уровни, вероятности переходов), статистической физике (релаксация, населенности, флуктуации), классической и квантовой электродинамике (поле, фотоны), теории колебаний (обратная связь, автоколебания). Своеобразие и привлекательность квантовой электроники как научного направления заключается в использовании теоретического и экспериментального аппаратов самых различных областей физики и одновременно в постановке новых задач в этих областях, в снабжении их новыми экспериментальными методами.

§ 1.2. История квантовой электроники

Квантовую электронику можно считать новой главой теории света и вообще теории взаимодействия электромагнитного поля с веществом. Первые (в хронологическом порядке) главы этой теории содержат эмпирическое описание нормальной дисперсии света в окнах прозрачности вещества, изучавшейся около 300 лет назад Ньютоном и его современниками. Следующие шаги, сделанные в прошлом веке, изучение аномальной дисперсии в полосах поглощения и классическая теория дисперсии Лоренца. Квантовая эпоха в оптике и вообще в физике началась в первые годы XX века с теории равновесного излучения Планка, приведшей Эйнштейна к понятию фотона, и с постулатов Бора. Квантовая теория дисперсии была сформулирована в двадцатые годы Крамерсом и Гейзенбергом. В это же время Дирак, Гейзенберг и Паули основали квантовую электродинамику. Весьма интересна и поучительна история самой квантовой электроники [21]. В принципе, еще в начале этого века уровень лабораторной техники был достаточно высок для создания, например, газоразрядного лазера, однако эта потенциальная возможность не могла быть реализована до установления ряда понятий и закономерностей, лежащих в основе идеи квантового генератора.

Первые шаги. Первый шаг на этом пути, занявшем несколько десятилетий, сделал в 1916 г. А. Эйнштейн, введя понятия вынужденного излучения и поглощения. Количественная теория этих процессов была создана примерно через 10 лет П. Дираком. Из теории следовало, что возникающие при вынужденном излучении фотоны по всем своим параметрам (энергии, направлению распространения и поляризации) совпадают с исходными фотонами. Это свойство называется когерентностью вынужденного излучения.

Первые эксперименты, обнаружившие влияние вынужденного излучения, были описаны в 1928 г. Ладенбургом и Копферманом. В этих экспериментах исследовалась дисперсия показателя преломления неона, возбуждаемого электрическим разрядом (отметим, что и в первом газоразрядном лазере, созданном лишь через 33 года, также использовался неон). В работе Ладенбурга и Копфермана четко сформулированы условие инверсии населенностей и необходимость избирательного возбуждения уровней для ее получения. В 1940 г. В. А. Фабрикант впервые отметил, что интенсивность света в среде с инверсией населенностей должна возрастать (этот эффект рассматривался им лишь как доказательство существования вынужденного излучения, а не как явление, имеющее прикладное значение). К сожалению, эта работа, как и поданная в 1951 г. В. А. Фабрикантом с сотрудниками авторская заявка на изобретение, не была своевременно опубликована в распространенных научных изданиях и поэтому не повлияла на дальнейшее развитие квантовой электроники.

Радиоспектроскопия. Первые приборы квантовой электроники — мазеры, получившие в дальнейшем важные практические применения для генерации и усиления сантиметровых волн, — были созданы лишь в середине пятидесятых годов. Характерно, что сперва квантовой электроникой был освоен радиодиапазон, лазеры же появились в начале шестидесятых годов. Это отчасти связано, по-видимому, с тем, что в обычных оптических экспериментах $N_1 \gg N_2$ и поэтому вынужденное излучение, как правило, не играет роли. В то же время в радиос спектроскопии $N_1 \approx N_2 \gg |N_1 - N_2|$ и наблюдаемое поглощение радиоволн связано с очень небольшим относительным превышением вынужденного поглощения над излучением.

Большую роль сыграло также то обстоятельство, что в сороковые годы радиоспектроскопия достигла высокого уровня развития как в теоретическом, так и в экспериментальном плане (экспериментальная база радиоспектроскопии СВЧ-диапазона была обеспечена успехами радиолокационной техники). К тому времени была хорошо разработана теория взаимодействия радиоволн с молекулами в газах, детально рассчитана структура вращательных спектров, понята роль процессов релаксации и эффекта насыщения. Важное значение имели исследова-

ния с пучковыми радиоспектроскопами, начавшиеся еще в тридцатые годы. Существенно было, вероятно, и то, что радиоспектроскописты, в отличие от оптиков, хорошо понимали принципы действия СВЧ-генераторов и усилителей на пучках свободных электронов (клистронов, магнетронов, ламп бегущей и обратной волны), они были знакомы с понятиями отрицательного сопротивления и положительной обратной связи и имели практический опыт работы с высокодобротными СВЧ-резонаторами.

Среди работ, непосредственно предшествовавших появлению мазеров, надо отметить работы Кастлера во Франции, разработавшего в 1950 г. метод оптической накачки газов для увеличения разности населенностей близко расположенных подуровней. Кроме газовой и пучковой радиоспектроскопии большую роль сыграла также магнитная радиоспектроскопия, возникшая в сороковых годах, изучающая взаимодействие радиоволн с ферромагнетиками и с ядерными или электронными парамагнетиками (Е. К. Завойский, 1944 г.). Именно достижения теории и техники магнитного резонанса привели к созданию парамагнитных усилителей, имеющих рекордно низкий уровень собственного шума. Впервые инверсия населенностей была получена в системе ядерных спинов, помещенных в магнитное поле (Парселл и Паунд, 1951 г.).

Мазеры. Идея использования вынужденного излучения в среде с инверсией населенностей для усиления и генерации электромагнитных волн СВЧ-диапазона была высказана на нескольких различных конференциях в начале пятидесятых годов Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым (Физический институт АН СССР), Таунсом (Колумбийский университет, США) и Вебером (Мэрилендский университет, США). Первая количественная теория квантового генератора была опубликована Басовым и Прохоровым в 1954 г. В этой работе была определена пороговая разность населенностей, необходимая для самовозбуждения генератора, и был предложен метод получения инверсии в молекулярном пучке с помощью неоднородного электростатического поля. Впоследствии заслуги Басова, Прохорова и Таунса в развитии квантовой электроники были отмечены Нобелевской премией.

В 1954 г. появилось описание первого действующего мазера, созданного Гордоном, Цайгером и Таунсом. Рабочим веществом был аммиак в виде молекулярного пучка, сфокусированного с помощью электрического поля. В настоящее время пучковые мазеры служат государственными стандартами частоты и времени.

Второй основной тип мазера — парамагнитный усилитель — был создан в 1957 г. Сковилом, Феером и Зайделем по предложению Бломбергена. В парамагнитных усилителях для инверсии используется вспомогательное излучение — накачка, насыщающая населенности уровней 1 и 3 (рис. 1.2). При этом на уровнях 1 и 2 (или 2 и 3) образуется инверсное распределение населенностей. Идея метода накачки в трехуровневой системе, получившего впоследствии широкое применение в твердотельных и жидкостных лазерах, принадлежит Басову и Прохорову (1955 г.). Рабочее вещество парамагнитных усилителей диамагнитный кристалл с небольшой (порядка 10⁻³) примесью парамагнитных атомов (т. е. атомов с нечетным числом электронов) охлаждают до температур жидкого гелия. Охлаждение необходимо для уменьшения собственных шумов и ослабления процессов релаксации, препятствующих инверсии населенностей (в парамагнетиках релаксация населенностей обусловлена взаимодействием между колебаниями кристаллической решетки и магнитными моментами нескомпенсированных электронов).

Лазеры. Переход от радиодиапазона к оптическому потребовал около пяти лет — первый действующий лазер, излучающий когерентный красный свет, был описан Мейманом в 1960 г. Рабочим веществом в нем служил кристалл розового рубина (окись алюминия с примесью хрома), инверсия осуществлялась с помощью синего и зеленого света импульсной лампы-вспышки. Важным промежуточным шагом было осознание того, что интерферометр Фабри — Перо два плоскопараллельных зеркала — является высокодобротным резонатором, т. е. колебательной системой для световых волн (Прохоров, Дике, 1958 г.).

Началась лазерная эпоха физики. Вскоре после создания твердотельных лазеров с оптической накачкой был разработан целый ряд других типов лазеров: газоразрядные (1961 г.), полупроводниковые на p—n-переходах. (1962 г.), жидкостные на растворах органических красителей (1966 г.). Довольно быстро был перекрыт диапазон длин волн от далекого инфракрасного (ИК) до далекого ультрафиолетового (УФ). Непрерывно улучшались параметры лазеров (мощность, монохроматичность, направленность, стабильность, перестраиваемость) и расширялась область их применения. Большую роль сыграло изобретение методов укорочения длительности световых импульсов лазеров (методы модуляции добротности и синхронизации мод).

После первых экспериментов по удвоению частоты света (Франкен и др., 1961 г.) начала бурно развиваться нелинейная оптика, изучающая и использующая нелинейность вещества на оптических частотах. Второе рождение пережили голография и оптическая спектроскопия, возникли оптоэлектроника, когерентная спектроскопия и квантовая оптика. На очереди разработка лазеров рентгеновского и у-диапазонов.

Следует еще раз подчеркнуть, что бурное развитие квантовой электроники было обеспечено большим запасом идей и конкретной информации, накопленной к пятидесятым годам в радиочастотной и оптической спектроскопии. Такие, казалось бы, далекие от непосредственных практических применений направления физики, как магнитный резонанс или молекулярно-пучковая спектроскопия, привели к «лазерной революции» во многих областях науки и техники.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Важнейшее понятие квантовой электроники — вероятность перехода электрона в атоме или молекуле с одного уровня на другой. В настоящей главе сначала определена общая формула для вероятности квантового перехода в первом порядке теории возмущения (§ 2.1), затем вычислена вероятность перехода под действием монохроматического излучения (§ 2.2) и определены сечение взаимодействия и коэффициент поглощения (§ 2.3). Далее рассмотрены вынужденные переходы под действием флуктуирующего, шумового излучения с широким спектром (§ 2.4). Шумовое излучение, окружающее атом, может играть роль термостата и вызывать релаксацию (§ 2.5).

Последовательная теория электромагнитных процессов должна и вещество, и поле описывать, исходя из принципов квантовой механики. Однако большая часть эффектов квантовой электроники достаточно точно описывается так называемой полуклассической теорией излучения, в которой квантуется лишь движение частиц, а электромагнитное поле рассматривается с помощью классических уравнений Максвелла. Отказ от квантовой электродинамики существенно упрощает теорию, но при этом теряется возможность последовательного описания флуктуаций электромагнитного поля и, в частности, спонтанного излучения и собственных шумов квантовых усилителей. В настоящей книге в основном рассмотрены лишь вынужденные процессы под действием классическая теория излучения. Квантованию поля и спонтанным процессам посвящена гл. 7.

§ 2.1. Амплитуда и вероятность перехода

В простейшей модели квантовой электроники полагают, что вещество состоит из отдельных невзаимодействующих и неподвижных атомов или молекул, находящихся во внешнем электромагнитном поле. Наша первая задача заключается в определении того, что происходит с данным атомом под действием заданного переменного поля E(t) (обычно действие магнитного поля много слабее электрического). На втором этапе мы определим обратное действие атомов на поле. Самосогласованное решение двух систем уравнений, описывающих отклик вещества на заданное поле и отклик поля на заданное движение зарядов при различных упрощающих предположениях, является основной задачей теории взаимодействия излучения с веществом.

Поведение частиц вещества в заданных внешних полях определяется уравнением Шредингера

$$(i\hbar \partial/\partial t - \mathcal{H}) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \qquad (2.1.1)$$

Здесь Ψ — волновая функция, аргументами которой являются совокупность координат частиц $r = \{r_1, r_2, ...\}$ и время; \mathcal{H} — оператор энергии, состоящий из невозмущенной части \mathcal{H}_0 и переменной энергии частиц во внешнем поле $\mathcal{P}(t)$:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}(t). \tag{2.1.2}$$

Невозмущенная энергия в свою очередь включает в себя кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия \mathcal{V}_0 (сюда же можно отнести и энергию частиц во внешних статических полях).

Невозмущенный атом. При выключенном переменном поле волновую функцию можно представить в виде

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n} c_{n}^{(0)} \Phi_{n}(\mathbf{r}, t), \qquad (2.1.3)$$

$$\Phi_n(\mathbf{r}, t) = \varphi_n(\mathbf{r}) \exp\left(-i\mathscr{E}_n t/\hbar\right), \qquad (2.1.4)$$

где \mathscr{E}_n и $\varphi_n(r)$ — собственные значения и собственные функции оператора \mathscr{H}_0 , удовлетворяющие стационарному уравнению Шредингера:

$$(\mathcal{H}_0 - \mathcal{E}_n) \varphi_n = 0. \tag{2.1.5}$$

Индекс *n* нумерует энергетические уровни (мы предполагаем, что движение частиц происходит в ограниченной области пространства и поэтому уровни дискретны и что нет вырождения уровней). Система функций $\{\phi_n\}$ предполагается ортонормированной:

$$\int d\boldsymbol{r} \, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}^* \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{m}}, \qquad (2.1.6)$$

так что

$$\int d\mathbf{r} \, |\Psi|^2 = \sum_n |c_n|^2 = 1. \tag{2.1.7}$$

Коэффициенты c_n в разложении (3) определяют относительную населенность уровней $|c_n|^2$, т. е. вероятность измерить энергию \mathscr{E}_n или, как говорят, вероятность обнаружить систему «на уровне» n. Действительно, согласно правилу вычисления средних величин в квантовой механике средняя энергия системы при учете (3)—(6) равна

$$\mathscr{E} = \langle \mathscr{H}_0 \rangle \equiv \int d\mathbf{r} \ \Psi^* \mathscr{H}_0 \Psi = \sum_n |c_n|^2 \mathscr{E}_n. \tag{2.1.8}$$

Заметим, что согласно (3) в общем случае атом не обязательно находится в стационарном состоянии с определенной энергией \mathscr{O}_n (даже в отсутствие переменной силы, когда $\mathscr{V}(t)=0$). Например, пусть отличны от нуля два коэффициента c_n суперпозиции (3): $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$; тогда средняя по ансамблю энергия атома будет равна ($\mathscr{O}_1 + \mathscr{O}_2$)/2, но отдельные измерения энергии будут давать

значения или \mathscr{E}_1 , или \mathscr{E}_2 . При этом электронное «облако» (т. е. плотность вероятности найти электрон в точке (\mathbf{r}, t)) будет осциллировать с боровской частотой $\omega_{21} \equiv \omega_2 - \omega_1 \equiv (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar$ (рис. 2.1): $P(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{21}t)|^2/2 =$ $= \varphi_1^2/2 + \varphi_2^2/2 + \varphi_1\varphi_2 \cos(\omega_{21}t)$ (2.1.9)

(полагаем $\varphi_n = \varphi_n^*$). Такие нестационарные состояния называются когерентными. Часто этот термин применяют в случае, когда много идентичных атомов находится в нестационарном состоянии с одинаковой



Рис. 2.1. Электронное облако атома, находящегося в когерентном (нестационарном) состоянии — суперпозиции двух стационарных состояний с различной симметрией φ_1 и φ_2 , осциллирует с частотой перехода ω_{21} : а) зависимости волновых функций от одной из пространственных координат; б) соответствующие конфигурации электронного облака

фазой. При этом электроны осциллируют синхронно и система атомов обладает макроскопическим дипольным моментом, излучающим интенсивный свет с частотой ω_{21} (этот эффект *сверхизлучения* будет рассмотрен в § 5.3).

При наличии внешнего переменного поля E(t) к собственным колебаниям электронного облака с частотами ω_{mn} добавляются вынужденные с частотой поля ω .

Атом в переменном поле. Рассмотрим теперь действие переменного поля на волновую функцию атома или молекулы $\Psi(\mathbf{r}, t)$. При $\mathscr{V}(t) \neq 0$ функция (3) уже не удовлетворяет уравнению Шредингера (1), однако разложение вида (3) можно сохранить, если считать коэффициенты c_n зависящими от времени (эта возможность следует из свойства полноты системы собственных функций $\varphi_n(\mathbf{r})$):

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n} c_n(t) \Phi_n(\mathbf{r}, t). \qquad (2.1.10)$$

Таким образом, под действием падающего света относительные населенности уровней $|c_n(t)|^2$ перераспределяются (условие нормировки (7) при этом, конечно, сохраняется), т. е. атом совершает вынужденные *переходы* с одних уровней на другие. Найдем вероятность таких переходов.

Перейдем от уравнения Шредингера (1) для волновой функции к уравнениям для коэффициентов $c_n(t)$. Для этого подставим разложение (10) в (1) и учтем, что согласно (5) *i* $\hbar \dot{\Phi}_n = \mathcal{H}_0 \Phi_n$:

$$\sum_{n} (i\hbar c_n - c_n \mathscr{V}) \Phi_n = 0. \qquad (2.1.11)$$

Умножим это равенство слева на одну из функций Φ_m^* и проинтегрируем по r:

$$\sum_{n} \left(i\hbar \dot{c}_{n} \int d\boldsymbol{r} \, \Phi_{m}^{*} \Phi_{n} - c_{n} \int d\boldsymbol{r} \, \Phi_{m}^{*} \mathcal{P} \Phi_{n} \right) = 0. \qquad (2.1.12)$$

Учтем свойство ортогональности (6) собственных функций и введем следующее обозначение для матричных элементов оператора возмущения:

$$\mathcal{V}_{mn} = \int d\boldsymbol{r} \, \Phi_m^* \mathcal{V} \Phi_n = \mathcal{V}_{mn} \exp\left(i\omega_{mn}t\right), \quad \mathcal{V}_{mn} = \int d\boldsymbol{r} \, \varphi_m^* \mathcal{V} \varphi_n. \quad (2.1.13)$$

В результате находим систему уравнений для коэффициентов $c_n(t)$ (эквивалентную исходному уравнению Шредингера):

$$i\hbar dc_m/dt = \sum_n \mathcal{V}_{mn}' c_n. \qquad (2.1.14)$$

Заметим, что коэффициенты c_n образуют функцию дискретного аргумента (энергии) $c_n \equiv \tilde{\Psi}(\mathfrak{S}_n)$, которую можно считать волновой функцией системы в энергетическом представлении (в то время как $\Psi(\mathbf{r})$ является волновой функцией в координатном представлении). Соответственно (14) является уравнением Шредингера в энергетическом представлении. Функции $\tilde{\Psi}$ и Ψ связаны друг с другом линейным преобразованием и несут одинаковую информацию. Обратное преобразование к (10) легко получить, умножив (10) слева на интегральный оператор $\int d\mathbf{r} \, \Phi_m^*$:

$$c_m = \int d\mathbf{r} \, \Phi_m^* \Psi. \tag{2.1.15}$$

Процедура смены представления $\Psi \to \tilde{\Psi}$ аналогична замене базисной системы координат в векторной алгебре, при которой компоненты вектора также испытывают линейное преобразование.

Связь между различными представлениями наиболее наглядно проявляется в обозначениях Дирака (§ 7.5). При этом уравнение Шредингера (1) в инвариантном виде (без конкретизации представления) запишется следующим образом:

$$i\hbar \ d \mid t \rangle / dt = \mathcal{H} \mid t \rangle. \tag{2.1.16}$$

Чтобы перейти к энергетическому представлению, умножим (16 слева на *m*-й собственный вектор оператора \mathcal{H}_0 :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle m \mid t \rangle = \langle m \mid \mathcal{H} \mid t \rangle = \sum_{n} \langle m \mid \mathcal{H} \mid n \rangle \langle n \mid t \rangle. \quad (2.1.17)$$

В последнем равенстве использовано разложение единицы: $I = \sum_{n \in \mathbb{N}} |n\rangle \langle n|$. Введем обозначение $\langle m|\mathcal{V}|n\rangle \equiv \mathcal{V}_{mn}$ и используем (2) и (5):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle m \mid t \rangle = \mathscr{E}_m \langle m \mid t \rangle + \sum_n \mathscr{V}_{mn} \langle n \mid t \rangle.$$

Если выделить, наконец, медленно меняющуюся часть коэффици ента $\langle m | t \rangle$:

$$\langle m \mid t \rangle \equiv c_m(t) \exp\left(-i\mathscr{E}_m t/\hbar\right),$$

то снова получим (14).

Теория возмущения. В общем случае решение системы уравнений (14) можно найти лишь с помощью теории возмущения в виде степенного ряда по внешней силе. Можно, кроме того, решить систему, не прибегая к теории возмущений, с помощью так называемого двухуровневого приближения, которое будет рассмотрено ниже в § 4.3.

Итак, ищем решение (14) в виде суммы

$$c_n = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + \dots = \sum_{s} c_n^{(s)}, \qquad (2.1.18)$$

в которой s-е слагаемое пропорционально s-й степени внешней силы: $c_n^{(s)} \sim \mathcal{V}^{s}$. Подставив (18) в (14) и приравняв слагаемые одного порядка по \mathcal{V} , находим

$$m_m^{(0)} = 0,$$
 (2.1.19 a)

$$i\hbar c_m^{(1)} = \sum_{n} \mathcal{V}_{mn}^{\prime} c_n^{(0)},$$
 (2.1.196)

$$i\hbar \dot{c}_{m}^{(s)} = \sum_{n} \mathcal{V}_{mn}^{\prime} c_{n}^{(s-1)}.$$
 (2.1.19 B)

Набор коэффициентов нулевого порядка малости $c_m^{(0)}$ задает начальные условия уравнений (14).

Линейное приближение. Обычно полагается, что лишь один из этих коэффициентов, например $c_1^{(0)}$, отличен от нуля, т. е. что в момент t_0 система находилась в состоянии с определенной энергией:

$$c_n(t_0) = c_n^{(0)} = \delta_{ni}. \tag{2.1.20}$$

В этом случае система уравнений (19б) для коэффициентов первого порядка малости «расцепляется»:

$$c_m^{(1)} = \mathcal{V}_{m1}^{\prime} / i\hbar.$$
 (2.1.21)

Отсюда следует, что в линейном приближении отклик квантовой системы, находившейся на уровне 1, на внешнее возмущение определяется формулой

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \, \mathcal{V}_{m1}(t') \exp(i\omega_{m1}t').$$
(2.1.22)

Таким образом, на больших интервалах времени после включения возмущения $(t-t_0 \rightarrow \infty)$ коэффициент c_2 (определяющий возмущенную населенность уровня с энергией \mathscr{E}_2) пропорционален фурье-образу внешней силы на боровской частоте $\omega_{21} = (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/\hbar$. Иначе говоря, квантовая система в первом порядке теории возмущения ведет себя как набор линейных осцилляторов и откликается лишь на резонансные гармоники внешней силы. Если в спектре возмущения гармоника с частотой ω_{21} отсутствует (или ее амплитуда мала), то уровень 2 заселяться не будет.

Вероятность одноквантового перехода. Безразмерное комплексное число c_m при начальном условин $c_m^{(0)} = \delta_{mn}$ называют амплитудой перехода с уровня *n* на уровень *m* (часто для указания начального условия добавляют второй индекс: $c_m \equiv c_{mn}$ ¹)). Квадрат модуля амплитуды перехода $|c_{mn}(t)|^2$ равен условной вероятности найти систему в момент времени *t* на уровне *m* при условии, что в момент t_0 она находилась на уровне *n*. В линейном (однофотонном) приближении эта вероятность согласно (22) равна

$$P_{mn}^{(1)} = P^{(1)}(m, t \mid n, t_0) = \hbar^{-2} \left| \int_{t_0}^t dt' \, \mathcal{V}_{mn}(t') \exp(i\omega_{mn}t') \right|^2. \quad (2.1.23)$$

Из (23) следует важное свойство квантовых систем — вероятности прямых и обратных переходов одинаковы:

$$P_{mn}^{(1)} = P_{nm}^{(1)}. \tag{2.1.24}$$

Действительно, оператор \mathcal{V}° соответствует реально наблюдаємой величине—энергин—и поэтому имеет вещественные средние значения $\langle \mathcal{V}^{\circ} \rangle = \langle \mathcal{V}^{\circ} \rangle^{*}$ и, следовательно, является эрмитовым (самосопряженным) оператором: $\mathcal{V}^{\circ} \doteq \mathcal{V}^{\circ+}$. Матричные элементы эрмитовых операторов обладают свойством $\mathcal{V}_{mn} = \mathcal{V}_{nm}^{*}$, так что из (23) следует (24).

Заметим, что для возможности перехода $n \rightarrow m$ кроме условия резонанса необходимо еще наличие отличного от нуля матричного элемента

$$\mathcal{V}_{mn} = \int d\boldsymbol{r} \, \varphi_m^* \mathcal{V} \varphi_n \neq 0.$$

Напомним, что в квантовой механике индексы часто читают справа налево, поэтому с_{mn} — амплитуда перехода n → m.

Это требование, определяющее *правила отбора*, «запрещает» неко торые переходы для систем с высокой симметрией. Например, если $\varphi_n(-r) = \pm \varphi_n(r)$ (центральная симметрия) и $\mathscr{V} \sim r$ (дипольное приближение), то переходы между состояниями с одинаковой четностью запрещены (так как подынтегральная функция при этом нечетна). Если $\mathscr{V}_{mn} \neq 0$, то говорят, что возмущение «связывает» или «перемешивает» состояния *m* и *n*.

§ 2.2. Переходы в монохроматическом поле

Дипольное приближение. Применим общую формулу (2.1.23) к случаю гармонического возмущения. В большинстве задач кван товой электроники применимо дипольное приближение для энергии взаимодействия зарядов с полем (§ 7.3):

$$\mathcal{V} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{E}_0 \, \mathbf{e}^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* \, e^{i\omega t})/2. \tag{2.2.1}$$

Здесь амплитуда E_0 электромагнитной волны предполагается постоянной в пределах рассматриваемой системы—атома или молекулы (так как в оптическом диапазоне $\lambda \sim 10^{-4}$ см $\gg a_0 \sim 10^{-8}$ см. где a_0 —боровский радиус).

В случае одноэлектронного атома оператор дипольного момента *d* равен произведению заряда электрона на его радиус-вектор *d* = - *er*, так что матричные элементы равны

$$\mathscr{V}_{mn} = - d_{mn} \cdot (E_0 e^{-i\omega t} + \kappa. c.)/2, \qquad (2.2.2)$$

$$\boldsymbol{d}_{mn} = -e \int d^3 \boldsymbol{r} \, \boldsymbol{r} \, \boldsymbol{\varphi}_m^* \boldsymbol{\varphi}_n, \qquad (2.2.3)$$

где к. с. означает комплексно сопряженное выражение. Для разрешенных переходов интеграл в (3) имеет порядок размеров атома a_0 , так что

$$d_{mn} \sim ea_0 \sim 10^{-18} \operatorname{CFC} \equiv 1 \, \mathrm{I}. \tag{2.2.4}$$

В случае магнитодипольных переходов, которые используют, в частности, в парамагнитных усилителях, надо в (2) сделать замену электрического поля E_0 на магнитное H_0 и d на магнитный дипольный момент μ , равный по порядку величины магнетону Бора:

$$\mu_{mn} \sim \mu_0 \equiv e\hbar/2mc \approx 0.9 \cdot 10^{-20} \,\mathrm{CFC.}$$
 (2.2.5)

Вероятность перехода. Подставив (2) в (2.1.23), найдем (при $t_0 = 0$)

$$P_{mn} = \frac{1}{4\hbar^2} \left| \boldsymbol{d}_{mn} \cdot \boldsymbol{E}_0 \frac{\exp\left[i\left(\omega_{mn} - \omega\right)_{\boldsymbol{i}}^* t\right] - 1}{\omega_{mn} - \omega} + \boldsymbol{d}_{mn} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \frac{\exp\left[i\left(\omega_{mn} + \omega\right) t\right] - 1}{\omega_{mn} + \omega} \right|^2.$$
(2.2.6)

Будем далее рассматривать вынужденные переходы вверх ($\omega_{mn} > 0$) или вниз ($\omega_{mn} < 0$) при условии резонанса между частотой поля ($\omega > 0$) и частотой перехода:

$$\omega \sim |\omega_{mn}| \gg |\omega - |\omega_{mn}||. \tag{2.2.7}$$

При этом одно из слагаемых в (6) много больше другого и последнее можно не учитывать — так называемое приближение вращающейся ¹) волны. Например, при вынужденном поглощении основную роль играет первое слагаемое, пропорциональное положительно-частотной части поля $E_0 e^{-i\omega t/2}$, а при вынужденном излучении — второе, пропорциональное отрицательно-частотной части $E_0^* e^{i\omega t/2}$ (в кван-

товой электродинамике амплитуды E_0 , E_0^* являются операторами, пропорциональными операторам уничтожения a и рождения a^+ фотонов см. § 7.4).

Итак, в первом порядке теории возмущения вероятность обнаружить атом на уровне mв момент времени t при начальном условии $c_n(0) = 1$ равна

$$P_{mn} = \left| \frac{d_{mn} \cdot E_0}{2\hbar} \right|^2 \left[\frac{\sin\left(\tilde{\omega}t/2\right)}{\tilde{\omega}/2} \right]^2,$$
(2.2.8)

где $\omega = \omega - |\omega_{mn}|$. Согласно этой формуле зависимость вероятности перехода от частоты внешнего поля имеет резонансный характер, при-



Рис. 2.2. Зависимость вероятности вынужденного перехода P_{mn} от частоты поля ω и времени взаимодействия t

чем острота резонанса возрастает с течением времени (рис. 2.2). В результате в пределе при $t \rightarrow \infty$ вероятность перехода оказывается пропорциональной δ -функции Дирака:

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{\sin\left(\tilde{\omega}t/2\right)}{\tilde{\omega}/2} \right]^2 = 2\pi t \,\delta\left(\tilde{\omega}\right). \tag{2.2.9}$$

Правильность выбора множителя при δ -функции проверяется интегрированием обеих частей равенства (9) по $\tilde{\omega}$.

Пропорциональность вероятности перехода времени действия возмущения *t* позволяет ввести вероятность перехода в единицу времени (ее называют также скоростью перехода):

$$W_{mn} \equiv P_{mn}/t = 2\pi | d_{mn} \cdot E_0/2\hbar |^2 \delta(\tilde{\omega}). \qquad (2.2.10)$$

Таким образом, скорость перехода пропорциональна квадрату поля, т. е. интенсивности волны. Наличие δ -функции в (10), отличной от нуля лишь при точном резонансе, легко понять с фотонной точки зрения: согласно закону сохранения энергии изменение энергии атома на

¹) Название связано с тем, что на комплексной плоскости вектор $e^{-i\omega t}$ вращается в отличие от осциллирующего вектора соз ωt .

 $\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n \equiv \hbar \omega_{mn}$ должно сопровождаться излучением или поглощени ем фотона с энергией $\hbar \omega$.

Учет ширины уровней. Практически, однако, всегда имеются до полнительные возмущения (например, столкновения в случае газа) которые уширяют энергетические уровни, и в результате резонана даже при $t \rightarrow \infty$ принимает конечную ширину $\Delta \omega$ (в случае столкнове ний $\Delta \omega = 2/\tau$, где τ — среднее время между столкновениями). Для учета конечной ширины резонанса надо δ -функцию в (10) заменить на форм-фактор $g(\omega)$, описывающий истинную форму спектральной линии и также нормированный на единицу:

$$W_{mn} = 2\pi | \boldsymbol{d}_{mn} \cdot \boldsymbol{E}_0 / 2\hbar |^2 g(\tilde{\boldsymbol{\omega}}), \qquad (2.2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) = 1. \qquad (2.2.12)$$

При уширении столкновениями спектральные линии имеют лоренцеву форму (рис. 2.3, кривая 1):

$$g_{\pi}(\tilde{\omega}) = \frac{2/(\pi \Delta \omega)}{1 + (2\tilde{\omega}/\Delta \omega)^2}.$$
 (2.2.13a)

Вероятность перехода максимальна при $\omega = |\omega_{mn}|$:

$$W_0 = \Omega^2 / \Delta \omega, \qquad (2.2.14)$$

где $\Omega \equiv |\mathbf{d}_{mn} \cdot \mathbf{E}_0|/\hbar$ — частота Раби. Эта величина имеет размерность частоты и характеризует возмущение атома резонансным монохроматическим полем.

Итак, вероятность вынужденного перехода пропорциональна интенсивности света, квадрату матричного элемента дипольного момента и обратно пропорциональна ширине спектральной линии.

Последняя зависимость характерна не только для столкновительного уширения: из условия нормировки (12) в общем случае следует, что $g(0) \sim 1/\Delta \omega$. Например, в газах при низких давлениях $\Delta \omega$ часто определяется эффектом Доплера, который дает гауссову форму линии. На рис. 2.3 сравниваются формы спектральных линий в случаях уширения из-за столкновений (см. (13а)), из-за эффекта Доплера, когда

$$g_{\mathcal{I}}(\widetilde{\omega}) = \frac{2}{\Delta \omega} \left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left[4 - \left(\frac{\widetilde{\omega}}{\Delta \omega}\right)^2 \ln 2\right], \quad (2.2.136)$$

и из-за конечного времени взаимодействия t (ср. (8)), когда

$$g_t(\tilde{\omega}) = \frac{0.886}{\Delta \omega} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2.78\tilde{\omega}}{\Delta \omega}\right), \quad \Delta \omega = \frac{5.56}{t}, \quad (2.2.13B)$$

где sinc $x = (\sin x)/x$ и $\Delta \omega$ — полная ширина линии на уровне 1/2. Из рис. 2.3 ясно, что конкретный механизм уширения заметно сказывается лишь на крыльях линии. Заметим, что амплитуды нормированных по площади форм-факторов (13) при точном резонансе и в случае одинаковых $\Delta \omega$ относятся как

$$\frac{2}{\pi} : \left(\frac{4\ln 2}{\pi}\right)^{1/2} : \frac{5.56}{2\pi} \approx 1 : 1.47 : 1.39.$$
 (2.2.15)

Выше при выводе (11) функция $(2/\omega)^2 \sin^2(\omega t/2)$, полученная из теории возмущения (здесь ω — расстройка частот поля и перехода), была заменена на $2\pi t g(\omega)$. Поясним смысл этой процедуры на примере модели «сильных» столкновений. Согласно последней каждое столкновение мгновенно переводит атом обратно на исходный уровень, по-

сле чего он начинает заново взаимодействовать с полем. При этом надо заменить в (8) t на $t-t_0 \equiv \Delta t$, где t_0 момент последнего столкновения. В газе интервал времени Δt , прошедшего от последнего столкновения данного атома до какоголибо фиксированного момента t, является случайной величиной с экспоненциальным распределением (см. [24], с. 35):

 $P(\Delta t) = \exp(-\Delta t/\tau)/\tau,$ (2.2.16)

где τ — среднее время между столкновениями.

Поглощаемая (или излучаемая) атомом мощность



Рис. 2.3. Форма спектральных линий. При уширении из-за столкновений или спонтанного излучения линии имеют лоренцеву форму (1), из-за эффекта Доплера — гауссову форму (2), а при резко ограниченном времени взаимодействия t форму sinc² ($\tilde{\omega}t/2$) (3)

пропорциональна мгновенной скорости перехода в данный момент времени t:

$$W(\Delta t) = dP/dt = \Omega^2 \sin(\omega \Delta t)/2\omega. \qquad (2.2.17)$$

Здесь для вероятности перехода P было использовано выражение (8). Средняя скорость перехода определяется усреднением (17) с помощью (16):

$$W = \int_{0}^{\infty} d(\Delta t) P(\Delta t) W(\Delta t) = \frac{\Omega^{2} \tau/2}{1 + \omega^{2} \tau^{2}}.$$
 (2.2.18)

Последнее выражение согласуется с (11) и (13а) при замене т на обратную полуширину линии $2/\Delta\omega$. Интеграл в (18) легко находится заменой sin x на Im exp(*ix*).

§ 2.3. Сечение и коэффициент поглощения

Связь интенсивности и амплитуды поля. Чтобы перейти от скорости перехода W к сечению $\sigma = W/F$ и коэффициенту поглощения (или уси ления) $\alpha = \sigma \Delta N$, надо выразить квадрат поля $|E_0|^2$ через плотность по тока фотонов $F[c^{-1} \cdot cm^{-2}]$ или интенсивность волны $I = \hbar \omega F$ [Bt/cm²]

Найдем сперва энергию волны С. Из уравнений Максвелла следует, что мгновенная энергия поля, заключенная в объеме V прозрачного изотропного немагнитного вещества с диэлектрической постоянной є равна

$$\mathscr{E}(t) = \int_{V} d^{3}r \, (\varepsilon E^{2} + H^{2})/8\pi.$$
 (2.3.1)

В случае плоской монохроматической волны

$$\boldsymbol{E} = (1/2) \boldsymbol{e} \boldsymbol{E}_{0} \boldsymbol{e}^{i (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)} + \kappa. \text{ c., } \boldsymbol{H} = n \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}.$$
(2.3.2)

Здесь e—единичный вектор поляризации, $k = \hat{k}n\omega/c$ —волновой вектор, \hat{k} —единичный вектор в направлении распространения, $n = \sqrt{\epsilon}$ —показатель преломления. Подстановка (2) в (1) и усреднение по времени приводят к следующей связи между средней по времени энергией и амплитудой плоской волны:

$$\mathscr{E} \equiv \overline{\mathscr{E}(t)} = n^2 V | \mathcal{E}_0 |^2 / 8\pi. \qquad (2.3.3)$$

Интенсивность волны равна, очевидно, плотности энергии \mathscr{E}/V , умноженной на скорость волны c/n:

$$I = cn |E_0|^2 / 8\pi.$$
 (2.3.4)

Заметим, что в этом выводе не принималась во внимание частотная дисперсия среды $\varepsilon(\omega)$. Для ее учета надо в (1) заменить ε на $d(\omega\varepsilon)/d\omega$ (см., например, [22, 23]), так что в (3) вместо n^2 будет выражение

(1/2) $[d(\omega\varepsilon)/d\omega + \varepsilon] = c^2/uv,$ (2.3.5)

где v=c/n — фазовая скорость и $u=d\omega/dk$ — групповая. Плотность энергии теперь надо умножать на u, и в результате снова получается та же связь (4).

Сечение резонансного взаимодействия. Подставив в выражение (2.2.11) для вероятности перехода W вместо квадрата поля $|E_0|^2$ плотность потока фотонов F, найдем сечение перехода, равное по определению W/F (полагаем n=1):

$$\sigma_{mn} = (4\pi^2/\hbar c) \, \omega g \, (\omega) \, | \, d_{mn}^{(e)} \, |^2, \qquad (2.3.6)$$

где $d_{mn}^{(e)} \equiv \boldsymbol{d}_{mn} \cdot \boldsymbol{e}$.

Сечение перехода максимально при точном резонансе (ω=ω_{mn}>0); в случае лоренцевой формы линии (2.2.13а)

$$\sigma_{mn0} = 8\pi\omega_{mn} |d_{mn}^{(e)}|^2 / \hbar c \,\Delta\omega. \qquad (2.3.7)$$

Для наглядности можно представить, что σ — площадь «тени», отбрасываемой атомом. Оценим эту площадь. Ширина линии $\Delta \omega$ не может быть меньше так называемой *естественной ширины*, определяемой спонтанными переходами. В дальнейшем будет показано (§ 2.5), что

$$\Delta \omega_{\rm ecr} = 4\omega_{mn}^3 | \boldsymbol{d}_{mn} |^2 / 3\hbar c^3 = 1/T_{1 \, \rm ecr}, \qquad (2.3.8)$$

где $T_{1 \text{ ест}}$ —время жизни атома в возбужденном состоянии, ограничиваемое спонтанными переходами в основное состояние. Пусть $d_{mn} || e$, тогда, подставив (8) в (7), получим

$$\sigma_{0} = (3/2\pi) \left(\Delta \omega_{\text{ect}} / \Delta \omega \right) \lambda^{2}.$$
(2.3.9)

При случайной ориентации вектора d_{mn} имеем $|d_{mn}|^2 = 3 |d_{mn}^{(e)}|^2$, так что в (9) появляется множитель 1/3.

Таким образом, если столкновительная и доплеровская ширины много меньше естественной, то «*тень*» атома по отношению к резонансным оптическим переходам имеет линейный размер порядка длины волны $\lambda \sim 10^{-4}$ см (вместо размера атома $a_0 \sim 10^{-8}$ см). В разреженных газах основную роль играет доплеровское уширение, имеющее порядок $\Delta f = \Delta \omega / 2\pi \sim 1$ ГГц; естественная ширина для разрешенных оптических переходов на два порядка меньше, поэтому $\sigma \sim \lambda^2 / 100$ (в случае магнитодипольных переходов $\Delta f_{ecr} \sim 10^3$ Гц и $\sigma \sim 10^{-6} \lambda^2$).

Кинетика населенностей. Рассмотрим, как изменяются средние населенности уровней N_m, определяемые следующим образом:

$$N_m \equiv |c_m|^2 N_0, \tag{2.3.10}$$

где N_0 — общее число атомов. Таким образом, мы здесь переходим от рассмотрения одной частицы к свойствам системы из N_0 одинаковых невзаимодействующих частиц. Скорость перехода $n \rightarrow m$ определим так (ср. (2.2.10)):

$$W_{mn} = d|c_m|^2/dt.$$
 (2.3.11)

Отсюда скорость увеличения населенности \dot{N}_m конечного состояния m должна быть $N_0 \sum_n W_{mn}$. Однако выше предполагалось, что начальное состояние n занято с вероятностью единица; здесь же эта вероятность равна N_n/N_0 , поэтому $\dot{N}_m = \sum W_{mn}N_n$. Если учесть, кроме того, уход частиц с уровней, то получаем следующую систему уравнений для на-селенностей:

$$dN_m/dt = \sum_n (W_{mn} N_n - W_{nm} N_m).$$
(2.3.12)

Здесь пока не учитывается релаксация: вообще же скорости W_{mn} должны включать и вклад хаотических полей, создаваемых окружающими частицами. Такие уравнения изучают в неравновесной термодинамике, их называют кинетическими или уравнениями баланса населенностей. Если в обмене участвуют только два уровня, то

$$N_1 + N_2 = N_0 \tag{2.3.13}$$

и достаточно рассматривать лишь одно из уравнений (12). Из эрмитово сти оператора возмущения следует $W_{12} = W_{21} \equiv W$ (см. (2.1.24)), так чт

$$\dot{N}_1 = -\dot{N}_2 = W(\dot{N}_2 - N_1).$$
 (2.3.14)

Кинетика фотонов. Каждый переход вниз сопровождается излуче нием одного фотона, а переход вверх — поглощением, поэтому скорости излучения фотонов ¹) равна \dot{N}_1 , и уравнение переноса для фотонов имеет вид

$$\partial N/\partial t + \nabla (\mathbf{u}N) = dN_1/dt,$$
 (2.3.15)

где $N(\mathbf{r}, t)$ — концентрация фотонов и $\mathbf{u}N = \mathbf{F}$ — вектор плотности потока фотонов. Отсюда в стационарном одномерном случае, когда $\partial N/\partial t = 0$ и $F = F_{r}(z)$,

$$dF/dz = W(N_2 - N_1). \tag{2.3.16}$$

Далее, из определения сечения перехода следует

$$dF/dz = -\sigma (N_1 - N_2) F = -\alpha F.$$
 (2.3.17)

Пусть населенности не зависят от z, тогда из (17) следует экспоненци альный закон изменения интенсивности ²) света:

$$F(z) = F(0) e^{-\alpha l}, \qquad (2.3.18)$$

где коэффициент поглощения (или при $N_1 < N_2$ —усиления) согласно (6) равен

$$\alpha = (4\pi^2/\hbar c) \, \omega g \, (\omega) \, | \, d_{12}^{(e)} |^2 \, (N_1 - N_2). \tag{2.3.19}$$

Коэффициент резонансного поглощения. Максимальное (резонанс ное) значение коэффициента поглощения в случае лоренцевой формь (2.2.13а) равно

$$\alpha_0 = (8\pi/\hbar c) \left(\omega_{21}/\Delta \omega \right) \left| d_{12}^{(e)} \right|^2 \left(N_1 - N_2 \right).$$
(2.3.20)

Заметим, что в стационарном случае $\dot{N}_m = 0$ и из (14) при $W \neq 0$ следует $N_1 = N_2$, так что, казалось бы, всегда $\alpha = 0$ (это явление выравнивания населенностей под действием поля называется эффектом на сыщения). Однако не учитываемые в (14) процессы релаксации (спонтанные переходы, неупругие столкновения атомов друг с другом и с электронами в газах, взаимодействие с колебаниями решетки в твердых телах, безызлучательные переходы) стремятся восстановить исходную разность населенностей $N_1 - N_2$, и поэтому в случае достаточно малых полей насыщением можно пренебречь.

В оптическом диапазоне для разрешенных переходов с естественным уширением величина α₀ достигает значения 1 см⁻¹ при относи-

¹⁾ Понятие фотона в рамках полуклассической теории излучения не возникает, и здесь более последовательно было бы говорить об изменении энергии поля на ћо, а не числа фотонов. Однако фотонный язык удобнее ввиду его наглядности.

²) Напомним, что интенсивность *I* пропорциональна *F*, а именно $I = \hbar \omega F$.

тельно небольшом числе активных частиц $|\Delta N| = N_2 - N_1$. При $\lambda = = 0.5$ мкм согласно (9) $|\Delta N| = 2\pi \alpha_0 / 3\lambda^2 = 10^9$ см⁻³. В рентгеновском диапазоне λ на 4 порядка меньше и $|\Delta N| \approx 10^{17}$ см⁻³.

В парамагнитных усилителях СВЧ-диапазона ширина линии определяется диполь-дипольным взаимодействием парамагнитных ионов. В кристалле рубина (Al₂O₃+10⁻³ Cr) при концентрации ионов хрома 10¹⁹ см⁻³ ширина линии имеет порядок 50 МГц. Заменяя в (7) d на µ, для $\lambda = 1$ см получаем $\sigma = 8\pi \mu^2 / \hbar \lambda \Delta f = 5 \cdot 10^{-20}$ см². Практически достижимое в парамагнетиках число активных частиц примерно равно равновесной разности населенностей $\Delta N^{(0)} = h\omega N_0 / \varkappa T g \approx N_0 / 10 = 10^{18}$ см⁻³ (здесь g=2S+1=4 — вырождение основного уровня иона хрома, снимаемое постоянным магнитным полем, S — спиновое число). Отсюда $\alpha_0 = 0.05$ см⁻¹, и для получения усиления G = 100 необходима длина кристалла $l = (\ln G)/\alpha_0 \approx 1$ м. Для сокращения l кристалл помещают в объемный резонатор, т. е. применяют многократное прохождение сигнала через вещество, или в замедляющую систему. В последнем случае приведенные выше формулы для о и а сохраняют смысл при замене скорости света в вакууме на групповую скорость волн в замедляющей системе u = dK/dz, где K — постоянная распространения.

Полоса усиления. Вследствие экспоненциальной связи (18) между коэффициентом передачи G = F(l)/F(0) слоя вещества с толщиной l и коэффициентом поглощения α наблюдаемая частотная зависимость $G(\omega)$ при $|\alpha|l \gg 1$ (большая оптическая плотность) будет отличаться по форме от функции $\alpha(\omega)$. Легко убедиться, что этот эффект приводит к обострению наблюдаемого резонанса при $\alpha < 0$ и к его уширению при $\alpha > 0$ (рис. 2.4). Пусть $\alpha < 0$ и функция $\alpha(\omega)$ имеет лоренцеву форму. Определим полосу усиления $\Delta\omega'$ условием уменьшения величины $G(\omega) - 1$ на граничных частотах вдвое по сравнению с ее максимальным значением, тогда из (18) находим

$$\frac{\Delta\omega'}{\Delta\omega} = \left\{ \frac{\ln G_0}{\ln \left[(G_0 + 1)/2 \right]} - 1 \right\}^{1/2}, \qquad (2.3.21)$$

где $G_0 = \exp(-\alpha_0 l)$. Отсюда при $G_0 - 1 \ll 1$ следует $\Delta \omega' = \Delta \omega$, а при обратном неравенстве

$$\frac{\Delta\omega'}{\Delta\omega} \approx \left(\frac{\ln 2}{\ln G_0 - \ln 2}\right)^{1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{|\alpha_0|l}}.$$
(2.3.22)

Таким образом, полоса усиления с ростом длины усилителя сужается довольно медленно. Например, при $G_0 = 100$ ($\alpha_0 l = -4,6$) отношение (21) равно 0,417 (приближенные выражения (22) дают 0,42 и 0,46).

[°] Учет вырождения уровней. Выражения для коэффициента усиления и условие инверсии $N_2 > N_1$ были выше получены в предположении, что уровни энергии атомов не вырождены. Пусть теперь g_1 различных по каким-то параметрам состояний имеют одну и ту же энергию \mathscr{C}_1 и g_2 состояний имеют энергию \mathscr{C}_2 :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{H}_0 - \mathcal{E}_1) \, \varphi_{1l} = 0 & (i = 1, \, \dots, \, g_1), \\ & (\mathcal{H}_0 - \mathcal{E}_2) \, \varphi_{2l} = 0 & (j = 1, \, \dots, \, g_2). \end{aligned}$$
 (2.3.23)

Заметим, что следующие ниже выводы применимы также и в случае когда вырождение снято за счет достаточно малых возмущений (рис. 2.5). Теперь индексы 1 или 2 в приведенной выше теории маятия и приведенной выше и приведенной выше теории маятия и приведенной вы в приведенной выше теории маятия и приведенной выше и приведенной вы в приведенной выше и приведенной вы в приведенной вы вы в приведенной вы в приведенной вы вы в вы вы в приведенной вы вы вы вы вы в







Рис. 2.5. Вырождение уровней. g_1 различных состояний обладают ют одинаковой энергией g_1 , а g_2 состояний — энергией g_2 ; в правой части рисунка вырождение снимается внешним постоянным полем H_0 , нарушающим симметрию системы; переменное поле вызывает переходы между определенной парой состояний *i*, *j*

возмущения надо заменить на двойные 1*i* или 2*j*. Вероятность вынужденного перехода между состояниями 1*i* и 2*j* согласно (2.2.11) пропорциональна соответствующему матричному элементу:

$$W_{1i, 2j} = W_{2j, 1i} \sim |d_{1i, 2j}^{(e)}|^2.$$

Число переходов вверх или вниз пропорционально населенностям исходного состояния N_{1i} или N_{2i} , поэтому

$$\dot{N}_{1i} = \sum_{j=1}^{g_2} (W_{1i, 2j} N_{2j} - W_{2j, 1i} N_{1i}).$$
(2.3.24)

Скорость изменения общей населенности уровня $N_1 = \sum N_{1l}$ будет равна двойной сумме по вырожденным состояниям:

$$\dot{N}_{1} = \sum_{ij} W_{1i, 2j} (N_{2j} - N_{1i}).$$
(2.3.25)

Предположим теперь, что эффекта насыщения нет и процессы релаксации или механизмы инверсии приводят к равномерному распределению населенностей по подуровням:

$$N_{1i} = N_1/g_1, \quad N_{2j} = N_2/g_2.$$
 (2.3.26)

В результате (25) принимает вид (ср. (14))

$$\dot{N}_1 = -W' \Delta N', \qquad (2.3.27)$$

где

$$W' = \sum_{ij} W_{1i, 2j}, \ \Delta N' = N_1/g_1 - N_2/g_2.$$
(2.3.28)

Итак, для учета вырождения в формулах вида (20) надо понимать под W сумму W' и под ΔN — разность «населенностей состояний» N_m/g_m . При этом условие инверсии имеет вид

$$N_1/g_1 < N_2/g_2. \tag{2.3.29}$$

Пусть, например, $g_1 = 1$ и $g_2 = 3$, тогда для усиления необходимо, чгобы $N_2 > 3N_1$. Напомним, что согласно распределению Больцмана

$$\frac{N_{2}^{(0)}/N_{1}^{(0)} = (g_{2}/g_{1}) \exp\left(-\hbar\omega_{21}/\varkappa T\right)}{(2.3.30)}$$

и $N_2^{(0)} < 3N_1^{(0)}$.

§ 2.4. Вынужденные переходы в случайном поле

До сих пор поле, индуцирующее переходы, считалось монохроматическим. Пусть теперь E(t) произвольно зависит от времени. Согласно (2.1.22) амплитуда перехода в первом порядке теории возмущений имеет в дипольном приближении следующий вид (при условии $c_1(t_0) = 1$):

$$c_{2}(t) = -\frac{1}{i\hbar} \int_{t_{0}}^{t} dt' \exp(i\omega_{21}t') \sum_{\alpha} d_{21\alpha} E_{\alpha}(t'), \qquad (2.4.1)$$

где $\alpha = x$, y, z—индексы декартовой системы координат. Квадрат модуля этого выражения определяет вероятность перехода:

$$P_{21}(t) = \hbar^{-2} \sum_{\alpha\beta} d_{21\alpha} d_{21\beta}^* \int_{t_0}^{t} dt' dt'' \exp\left[i\omega_{21}(t'-t'')\right] E_{\alpha}(t') E_{\beta}(t''). \quad (2.4.2)$$

Корреляционные функции. Рассмотрим далее случай, когда поле имеет хаотический, случайный характер. При этом P надо усреднить по соответствующему распределению вероятностей, так что в (2) вместо парного произведения амплитуд полей $E_{\alpha}E_{\beta}$ появится матрица вторых *моментов* поля¹)

$$\langle E_{\alpha}(t') E_{\beta}(t'') \rangle \equiv G_{\alpha\beta}(t', t'') = G_{\beta\alpha}(t'', t'). \qquad (2.4.3)$$

Это равенство определяет некоторый тензор, каждая из девяти компонент которого является функцией двух аргументов. Матрицу вторых моментов (3) называют также *тензором корреляции* поля. Еще один эквивалентный термин — функция когерентности поля (первого по-

¹) Угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю полей (§ 7.2).

рядка). Полностью статистические свойства случайного поля задаются набором моментов (функций когерентности) всех порядков и для всевозможных пар «точек» $x \equiv \{r, t\}$. Подробнее статистическая оптика будет обсуждаться в гл. 7, а здесь лишь отметим, что нечетные моменты поля, как правило, равны нулю, а моменты порядка 2n определяют вероятности *n*-фотонных переходов. Укажем также, что сумма диагональных компонент матрицы вторых моментов $\sum G_{\alpha\alpha}$ (*шпур* или *след* матрицы) при совпадающих аргументах определяет среднюю плотность энергии электрического поля $\langle E^2 \rangle/8\pi$ в рассматриваемой точке.

Важнейший класс случайных полей составляют стационарные поля, статистические характеристики которых (интенсивность, спектр, поляризация) не меняются с течением времени. Функция корреляции стационарного процесса может зависеть лишь от разности двух ее аргументов:

$$G_{\alpha\beta}(t', t'') = G_{\alpha\beta}(t'+t_0, t''+t_0) \equiv G_{\alpha\beta}(t'-t''). \qquad (2.4.4)$$

Из (4) и определения (3) следует свойство симметрии:

$$G_{\alpha\beta}(-t) = G_{\beta\alpha}(t); \qquad (2.4.5)$$

в частности, $G_{\alpha\alpha}(t)$ — четные функции времени.

Итак, согласно (2) и (3) вероятность перехода под действием стационарного случайного излучения определяется тензором корреляции поля:

$$P_{21} = \hbar^{-2} \sum_{\alpha\beta} d_{21\alpha} d_{21\beta}^* \int_{t_0}^{t} dt' dt'' \exp\left[i\omega_{21}(t'-t'')\right] G_{\alpha\beta}(t'-t''). \quad (2.4.6)$$

Скорость перехода. Будем интересоваться действием возмущения за большие интервалы времени — много бо́льшие, чем время корреляции поля τ_E (§ 7.2). При этом можно устремить пределы интегрирования в (6) к $\pm \infty$. Сделаем замену переменных $t_1 \equiv t' - t''$, $t_2 \equiv t' + t''$. Интегрирование по t_1 дает фурье-образ $G_{\alpha\beta}(\omega_{21})$, называемый тензором спектральной плотности поля:

$$G_{\alpha\beta}(\omega) \equiv (2\pi)^{-1} \int dt \, \mathrm{e}^{i\omega t} G_{\alpha\beta}(t) = G^*_{\alpha\beta}(-\omega) = G^*_{\beta\alpha}(\omega) \equiv G^*_{\alpha\beta}(\omega). \quad (2.4.7)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$G_{\alpha\beta}(t) = \int d\omega \,\mathrm{e}^{-i\omega t} G_{\alpha\beta}(\omega). \tag{2.4.8}$$

Бесконечные пределы интегрирования, как это принято, опускаем и обозначаем функцию и ее фурье-образ одинаковыми буквами. Второе интегрирование (по t_2) дает просто время наблюдения $t - t_0$, так что можно определить не зависящую от времени скорость перехода $W = P/(t - t_0)$. Пусть дипольный момент перехода параллелен оси x, тогда окончательно получаем следующее простое выражение для скорости перехода:

$$W_{21} = 2\pi\hbar^{-2} |d_{21}|^2 G_{xx}(\omega_{21}).$$
(2.4.9)

Итак, скорость вынужденного перехода под действием случайного (шумового или некогерентного) возмущения пропорциональна спектральной плотности возмущения $G(\omega)$ на частоте перехода. Выражение (9) полезно сравнить с формулой (2.2.11), определяющей скорость перехода в случае монохроматического поля: эти формулы совпадают при замене $|E_0|^2g(\omega) \rightarrow G(\omega)$.

В приведенном выводе не принималось во внимание уширение уровней $\Delta \omega$ в результате процессов релаксации. Однако интуитивно ясно, что этот вывод должен сохранить силу в случае, когда $\Delta \omega$ много меньше ширины спектра возмущения $\Delta \omega_E \sim 1/\tau_E$. Поле при этом называют *некогерентным*. В противоположном случае поле можно, очевидно, полагать монохроматическим, когерентным.

Коэффициент Эйнштейна *B*. Рассмотрим теперь изотропное неполяризованное излучение, для которого $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$. Перейдем при этом от $G(\omega)$ к спектральной плотности энергии $\rho(\omega)$. Последняя определяется через плотность энергии следующим образом (полагаем n=1):

$$\mathcal{E}/V = \langle E^2 + H^2 \rangle / 8\pi \equiv \int_0^\infty d\omega \, \rho(\omega). \qquad (2.4.10)$$

В поле излучения E = H, поэтому

$$\mathscr{E}/V = \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha} (t=0)/4\pi = 3 \int_{0}^{\infty} d\omega G(\omega)/2\pi,$$
 (2.4.11)

в последнем равенстве использована связь (8) при t=0 и учтено, что согласно (7) $G(\omega)$ — четная функция. Из сравнения (10) и (11) получаем связь спектральных плотностей амплитуды и энергии поля:

$$G(\omega) = 2\pi\rho(\omega)/3.$$
 (2.4.12)

Подставив (12) в (9), находим окончательно скорость перехода в изотропном неполяризованном шумовом поле с широким спектром:

$$W_{21} = B_{21}\rho(\omega_{21}), \qquad (2.4.13)$$

$$B_{21} = B_{12} \equiv (2\pi | \boldsymbol{d}_{21} | /\hbar)^2 / 3.$$
 (2.4.14)

Коэффициент пропорциональности *В* между скоростью перехода и плотностью энергии называется коэффициентом Эйнштейна для вынужденного перехода. В следующем параграфе, исходя из найденной Планком функции ρ⁽⁰⁾ (ω) для равновесного излучения, мы найдем второй коэффициент Эйнштейна *A*, равный скорости спонтанного перехода.

Спектральная плотность поля. В заключение настоящего раздела поясним физический смысл спектральной плотности поля $G(\omega)$. Для этого формально представим E(t) в виде интеграла Фурье (индекс α опускаем):

$$E(t) = \int d\omega \, e^{-i\omega t} \, E(\omega), \qquad (2.4.15)$$

$$E(\omega) = \int dt \ e^{i\omega t} E(t)/2\pi. \qquad (2.4.16)$$

Строгое определение фурье-представления случайной функц см. в [24]. Найдем с помощью (16) и определений (3), (4) коррел тор фурье-компонент поля:

$$\langle E(\omega) E(\omega') \rangle = \int dt \, dt' \, e^{i\omega t + i\omega' t'} \, G(t - t')/4\pi^2. \qquad (2.4.1)$$

Сделаем в интеграле по t замену переменных $t_1 \equiv t - t'$, тог интеграл по t_1 даст согласно (7) $2\pi G(\omega)$, а второй интеграл да $2\pi \delta(\omega + \omega')$ согласно одному из представлений δ -функции:

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} dt \, e^{i\omega t} = 2\pi \, \delta(\omega). \qquad (2.4.1)$$

В результате

$$\langle E(\omega) E(\omega') \rangle = G(\omega) \,\delta(\omega + \omega'). \tag{2.4}$$

Из (16) при учете вещественности E(t) следует

$$E(\omega) = E^*(-\omega), \qquad (2.4.2)$$

поэтому (19) можно представить также в виде

$$\langle E(\omega) E^*(\omega') \rangle = G(\omega) \,\delta(\omega - \omega').$$
 (2.4.2)

Таким образом, в стационарном поле коррелируют только гарл ники, отличающиеся лишь знаком частоты, и их корреляция опре ляется спектральной плотностью $G(\omega)$. Это означает, что показан фотодетектора, измеряющего энергию поля в полосе частот $\Delta \omega$ средней частотой ω , будут пропорциональны $G(\omega) \Delta \omega$.

§ 2.5. Поле в качестве термостата

Рассмотрим кинетику населенностей в случае, когда атомы ная дятся в равновесном поле со спектральной плотностью энергии р⁽⁰ (Из кинетического уравнения (2.3.14) для двух невырожденных урней следует

$$N_2 = -N_1 = B\rho (N_1 - N_2),$$
 (2.5)

где $B = B_{12} = B_{21}$ и $\rho = \rho(\omega_{21})$. Таким образом, шумовое широкополоси поле, как и монохроматическое, стремится выравнять населеннос уровней, так что в стационарном режиме $N_1 = N_2$. Однако вещест под действием равновесного излучения с температурой T должно и греваться или охлаждаться до этой же температуры, так что населности распределяются по формуле Больцмана, согласно которой $N_2 > N_2$.

Спонтанные переходы. Выход из этого противоречия дает добав. ние в кинетическое уравнение (1) слагаемого, описывающего спонта ные (т. е. не зависящие от поля) переходы с возбужденного уровня на нижний уровень 1. Такие переходы сопровождаются собственн тепловым излучением нагретого тела, которое и предотвращает выр

нивание населенностей под действием внешнего поля. Обозначим, следуя Эйнштейну, скорость спонтанных переходов через $A_{12} = A$, тогда (1) примет вид

$$\dot{N}_2 = B\rho (N_1 - N_2) - AN_2.$$
 (2.5.2)

Коэффициент A можно рассчитать, исходя из распределений Больцмана и Планка и из найденного выше значения B. При равновесии между атомами и полем $\dot{N}_2 = 0$, поэтому из (2) следует связь

$$A/B = (N_1/N_2 - 1) \rho. \tag{2.5.3}$$

Подставив сюда распределения Планка

$$\rho^{(0)}(\omega) = \hbar k^{3} \mathcal{N}(\omega) / \pi^{2}, \qquad (2.5.4)$$

где

Ľ

$$\mathcal{N}(\omega) = [\exp(\hbar\omega/\varkappa T) - 1]^{-1}, \qquad (2.5.5)$$

и Больцмана

$$N_1^{(0)}/N_2^{(0)} = \exp{(\hbar\omega_{21}/\kappa T)},$$
 (2.5.6)

найдем отношение констант спонтанных и вынужденных переходов: $A/B = \hbar k^3/\pi^2$, (2.5.7)

где $k = \omega/c = 1/\lambda$. Отсюда, с учетом рассчитанного выше выражения (2.4.14) для *B*, следует, что

$$A = 4k^3 | \boldsymbol{d}_{21} |^2 / 3\hbar.$$
 (2.5.8)

Оценка для разрешенного перехода в видимом диапазоне ($d_{21}=1$ Д, $\lambda=0.5$ мкм) дает $A=2\cdot10^6$ с⁻¹.

Понятие спонтанного перехода играет большую роль в теории взаимодействия поля с веществом и в квантовой электронике. Спонтанные переходы определяют минимальную ширину линий излучения и поглощения. В нагретом веществе они приводят к тепловому излучению. Как и вообще процессы релаксации, они препятствуют получению инверсии населенностей. Далее, поскольку спонтанные переходы происходят независимо от амплитуды внешнего поля, они являются источником шума и ограничивают поэтому предельную чувствительность квантовых усилителей и монохроматичность квантовых генераторов (§ 7.1).

Отметим резкую — кубичную — зависимость вероятности спонтанного перехода от частоты, которая объясняет одну из трудностей создания ультрафиолетовых и рентгеновских лазеров. Хотя в противоположной области спектра — радиодиапазоне — вероятность спонтанных переходов ничтожна, именно они определяют минимальную температуру шумов парамагнитных усилителей (см. (7.1.10)).

Мы нашли величину A косвенным путем. Последовательно спонтанные переходы объясняются в рамках квантовой электродинамики взаимодействием между атомом и вакуумом (§ 7.7). Однако они имеют простые классический и полуклассический аналоги — собственное излучение ускоренно движущихся электронов в атоме (§ 5.2). Можно ука-

2 д. Н. Клышко

зать и «полуквантовую» модель — классический ток, согласно Глауб ру [54], возбуждает квантованное поле в когерентное состояние.

Естественная ширина. Спонтанные переходы ограничивают врем жизни T_1 изолированного атома в возбужденном состоянии. Можи ожидать, что $T_1=1/A$. Эта простая зависимость будет подтвержден ниже, см. (5.2.18). Далее, согласно соотношению неопределенност $\Delta \mathscr{C} \Delta t = \hbar$ (где $\Delta \mathscr{C}$ — точность измерения энергии и Δt — время изм рения) конечное время жизни атома приводит к конечной шири уровня. Полагая $\Delta t = T_1$, получим $\Delta \mathscr{C}_2 = \hbar A$. Это уширение уров должно проявиться в стационарных экспериментах в разбросе част переходов $\Delta \omega_{21} = \Delta \mathscr{C}_2/\hbar$, т. е. в уширении спектральных линий,

$$\Delta \omega_{\rm ecr} = A. \tag{2.5.}$$

Ширина спектральных линий, обусловленная спонтанными пер ходами, называется естественной. Этот термин подчеркивает, ч $\Delta\omega_{ecr}$ — наименьшая возможная ширина, которая имеет место дах в случае одиночного изолированного атома. Отметим, однако, ч в принципе все же можно избавиться от естественного уширения, п местив атом в добротный объемный резонатор, у которого нет типколебаний с частотой в окрестности ω_{21} . Практически наблюдаеми линии имеют естественную ширину лишь в тех редких случаях, ког, другие возмущения — столкновения и эффект Доплера в газах, вза модействие с фононами в кристаллах и т. д. — дают много меньши вклад и, кроме того, когда оптическая толщина образца мала (§ 7.1 Заметим, что при этом ширина линий поглощения или усиления, св занных с вынужденными переходами, также равна A.

Форма изолированных линий при естественном уширении являет лоренцевой. Строго это следует из теории Вигнера — Вайскопфа (см например, [55]). Имеется и наглядная классическая модель, соглас которой возбужденный атом излучает экспоненциально затухающ квазимонохроматическое колебание (§ 5.2). Фурье-преобразование т кого колебания и дает лоренцеву (дисперсионную) форму спект излучения.

Оценим с помощью (9) относительную величину естественного у ш рения. Для разрешенных переходов $d \approx ea_0$ (см. (2.2.4)), так что

$$\Delta \omega_{ecr} / \omega \approx (4/3) \, (1/137) \, (a_0/\hbar)^2,$$
 (2.5.1)

где для постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c$ мы приняли значен 1/137 (напомним, что это число определяет также отношение ск рости электрона в атоме водорода к скорости света). Полагая λ = $1/R = 4\pi \cdot 137a_0 \approx 0,1$ мкм (R—постоянная Ридберга), получае

$$\Delta \omega_{ecr} / \omega \approx 0.3 / (137)^3 \approx 10^{-7}.$$
 (2.5.1)

Такого же порядка или меньше смещение уровней атома извзаимодействия с электромагнитным вакуумом (сдвиг Лемба). Таки образом, относительное возмущение атома вакуумом весьма мал Число фотонов, спектральная яркость и яркостная температура. Найдем отношение вероятностей вынужденных и спонтанных переходов в случае некогерентного (шумового) поля. Согласно (7) и (2.4.13)

$$W_{\text{BMB}}/W_{\text{cn}} = B\rho/A = \rho/\hbar\omega g_{\omega} \equiv N, \qquad (2.5.12)$$

где величина

$$g_{\omega} \equiv \omega^2 / \pi^2 \mathcal{C}^{\mathbf{s}} \tag{2.5.13}$$

имеет смысл спектральной плотности мод поля в единичном объеме (напомним, что ρ — спектральная плотность энергии в единичном объеме). Мода (или тип колебания) — это, грубо говоря, колебательная степень свободы (или пространственная гармоника) поля (§ 7.3). Обратная величина $1/g_{\omega}$ равна частотному интервалу между соседними модами. Согласно определению (12) N имеет смысл энергии поля, приходящейся на одну моду и выраженной в единицах $\hbar\omega$, т. е. N — это число фотонов на моду. Эту величину называют также фактором вырождения фотонного газа. Отметим, что энергия и число фотонов флуктуируют (здесь ρ и N — средние значения).

Число N является важнейшим параметром некогерентного излучения. Покажем, что оно пропорционально основной фотометрической характеристике — спектральной яркости $I_{\omega\Omega}$. Последняя определяется как интенсивность излучения в единичном спектральном интервале и единичном телесном угле и имеет размерность $Bt/(cm^2 \cdot \Gamma \iota \cdot cp)$. Интенсивность излучения на единицу частоты I_{ω} равна половине спектральной плотности энергии $\rho/2$, умноженной на скорость света. Добавив множитель $1/4\pi$, переходим к спектральной яркости $I_{\omega\Omega}$.

Итак, согласно (12) вынужденные переходы под действием некогерентного поля происходят в N раз чаще, чем спонтанные. Общее число переходов вверх и вниз можно представить в виде

$$w_{21} = AN, \quad w_{12} = A(N+1).$$
 (2.5.15)

Иногда спонтанные переходы, которым соответствует второе слагаемое в последнем выражении, интерпретируют как вынужденные переходы, происходящие за счет нулевых (вакуумных) флуктуаций поля. Однако такая интерпретация приводит к заниженной вдвое вероятности спонтанного перехода вниз и не объясняет отсутствия спонтанного перехода вверх [65]. Правильный результат получается, если отличать нормально и антинормально упорядоченные флуктуации. В § 7.7 показано, что спонтанные переходы определяются нормально упорядоченными флуктуациями дипольного момента атома и антинормально упорядоченными флуктуациями вакуума.

В равновесном излучении N зависит лишь от частоты и температуры и определяется функцией Планка (5) : $N = \mathcal{N}(\omega)$. В общем же случае

オビム

N зависит, кроме частоты, от направления наблюдения, типа поляр зации и точки наблюдения: N = N(k, r, v). Здесь k — волновой векто задающий и частоту, и направление, v — индекс поляризации, пр нимающий два значения.

В неравновесном поле равенство (5) используется для определени яркостной температуры $T_{s\phi}(N) \equiv \hbar \omega / \kappa \ln (1+1/N)$ излучения с да ными частотой, направлением и поляризацией. Например, излучен Солнца для оптического диапазона и соответствующего интервала угл имеет $T_{s\phi} \sim 6000$ К, так что согласно (5) для зеленых лучей ($\lambda \sim 0.5$ мк $N \sim 10^{-2}$ и вынужденные переходы под действием солнечного све происходят много реже спонтанных. Таким образом, в видимом ди пазоне вероятности вынужденных и спонтанных переходов сравн ваются лишь при излучении в сотни раз более ярком, чем яркость Сол ца (при этом $T_{s\phi} \sim 4 \cdot 10^4$ К). Такая яркость достигается с помоще многомодовых лазеров (к одномодовым лазерам понятие яркости н применимо).

[°]Время релаксации. Определим теперь с помощью (2) скорос изменения населенностей при учете спонтанных и вынужденных пер ходов. Заменим для этого N_1 на $N_0 - N_2$ и воспользуемся соотн шением (15):

$$\dot{N}_2 = A [NN_0 - (2N+1)N_2].$$
 (2.5.1)

Здесь N — число фотонов на моду и $N_0 = N_1 + N_2$ — общее числ атомов на двух уровнях. Отсюда в установившемся режиме

$$N_{1}^{(0)}/N_{0} = (N+1)/(2N+1) = \nu/(1+\nu),$$

$$N_{2}^{(0)}/N_{0} = N/(2N+1) = 1/(1+\nu),$$
(2.5.1)

где $v = \exp(\hbar \omega_{21}/\kappa T)$. Решение уравнения (16) имеет вид

$$N_{2}(t) = N_{2}^{(0)} + [N_{2}(t_{0}) - N_{2}^{(0)}] e^{-t/T_{1}}, \qquad (2.5.1)$$

$$1/T_{1} = A (2N+1) = 2B\rho + A = w_{12} + w_{21}.$$

Итак, время T_1 нагрева (или охлаждения) внутренних степеней св боды атомов за счет взаимодействия с некогерентным излучением пр малых N равняется 1/A — времени жизни атома по отношению к спол танным переходам, а при больших N сокращается в 2N+1= $cth(\hbar\omega_{21}/2\pi T)$ раз.

Фактически мы здесь рассмотрели простую модель релаксации в которой термостатом служит некогерентное электромагнитное излучение, окружающее атом (§ 7.7).
МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ, НАСЕЛЕННОСТИ И РЕЛАКСАЦИЯ

Использованный выше вероятностный метод позволил описать обмен энергией между излучением и атомами. При этом осталось без внимания другое известное проявление взаимодействия поля с веществом — замедление скорости распространения волн. Еще один, более существенный недостаток вероятностного метода состоит в недостаточно строгом учете релаксационных процессов, для последовательного рассмотрения которых необходимо применять методы статистической физики и кинетики. Более полная теория взаимодействия атомов с внешним полем и термостатом основана на методе матрицы плотности, объединяющем квантовое и статистическое рассмотрения.

Ниже, в § 3.1, приведены определение и общие свойства матрицы плотности, в § 3.2 рассмотрены диагональные элементы этой матрицы, т. е. населенности уровней, и введено понятие отрицательной температуры, § 3.3 посвящен изменению матрицы плотности во времени и процессам релаксации.

§ 3.1. Определение и свойства матрицы плотности

Наблюдаемые величины. В гл. 2 мы определили вероятность перехода через амплитуды энергетических состояний c_n . Выразим теперь произвольную наблюдаемую квантовой системы f (в дальнейшем под f будет пониматься дипольный момент атома, $f \equiv d_{\alpha}$) через аналогичные коэффициенты. Будем исходить из основного «измерительного» постулата квантовой механики: многократные измерения величины f, произведенные над ансамблем одинаковых систем, т. е. «изготовленных» в одном и том же состоянии $\Psi(\mathbf{r}, t)$, дадут в среднем значение

$$\langle f(t) \rangle = \int d\mathbf{r} \, \Psi^*(\mathbf{r}, t) \,\widehat{f} \, \Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle t \, | \, f \, | \, t \rangle, \qquad (3.1.1)$$

где \hat{f} — оператор, соответствующий f, и r — совокупность координат системы (в дальнейшем операторный знак \wedge будет часто опускаться).

Существенно, что под f в (1) можно понимать и произведение операторов: $f = g^2$ или f = gh. Это дает возможность определять не только средние величины $\langle f \rangle$, называемые первыми моментами, но и высшие моменты $\langle g^2 \rangle$, $\langle g^n \rangle$, $\langle gh \rangle$, ..., характеризующие квантовые флуктуации g и квантовую корреляцию g и h. Правда, формула (1) написана в представлении Шредингера и поэтому применима лишь в случае, если f — одновременный оператор, например f(t) = g(t) h(t). Для определения функций корреляций $\langle g(t_1) h(t_2) \rangle$ необходимо перейти к пред-

ставлению Гейзенберга, в котором зависимость от времени переносится с волновой функции на операторы.

Знание волновой функции позволяет находить не только моменты $\langle f^n(t) \rangle$ наблюдаемой f, но и ее распределение в момент времени t, P(f, t). Эта функция определяется формулой (1) при замене оператора \hat{f} на оператор-диаду $|f\rangle\langle f|$ (§ 7.5).

Матрица плотности чистого состояния. Разложим волновую функцию по набору собственных функций какого-либо оператора (не обязательно оператора энергии):

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n} b_n(t) \varphi_n(\mathbf{r}). \qquad (3.1.2)$$

В обозначениях Дирака $|t\rangle = \sum |n\rangle \langle n|t\rangle$. Заметим, что 'если φ_n — энергетические функции, то коэффициенты b_n и c_n отличаются лишь экспоненциальным множителем (см. (2.1.13)). Подставив (2) в (1), получаем

$$\langle f \rangle = \sum_{nm} b_n^* b_m f_{nm}. \tag{3.1.3}$$

Здесь матрица

$$f_{nm} \equiv \int d\mathbf{r} \, \varphi_n^* f \varphi_m \equiv \langle n \, | \, f \, | \, m \rangle$$

считается известной и задача сводится к определению попарных произведений $b_n^* b_m$, также образующих матрицу, называемую матрицей плотности или статистической матрицей:

$$\rho_{mn} = b_m b_n^*. \tag{3.1.4}$$

Таким образом, вектору состояния системы Ψ мы поставили в соответствие матрицу. Можно определить и некоторый оператор ρ , соответствующий Ψ :

$$\int d\mathbf{r} \, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{m}}^* \hat{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}} = b_{\boldsymbol{m}} b_{\boldsymbol{n}}^*, \qquad (3.1.5)$$

в обозначениях Дирака $\hat{\rho} = |t\rangle \langle t|$ (§ 7.5).

С помощью матрицы и оператора плотности среднее (3) выражается более компактно:

$$\langle f \rangle = \sum_{mn} \rho_{mn} f_{nm} = \operatorname{Sp}(\rho f),$$
 (3.1.6)

где Sp f означает сумму диагональных элементов $\sum f_{nn}$, называемую следом или шпуром матрицы. Шпур матрицы является одним из ее инвариантов — он не изменяется при преобразовании матрицы вида $f' = UfU^{-1}$. Такие преобразования операторов в квантовой механике осуществляют смену представления, и инвариантность шпура обеспечивает независимость наблюдаемых величин от выбора представления.

Свойство Sp f' = Sp f сразу следует из другого свойства Sp (gh) = Sp (hg), которое легко проверить, исходя из определений операций Sp и умножения матриц.

Смешанное состояние. Основное понятие при переходе от классической механики к статистической физике — ансамбль Гиббса, составленный из совокупности тождественных систем, распределенных с вероятностями P(q, p) по возможным состояниям системы. Аналогично строится и квантовый статистический ансамбль — мы полагаем, что P_1N систем ансамбля находятся в состоянии Ψ_1 , P_2N — в состоянии Ψ_2 , P_iN — в состоянии Ψ_i и т. д. Здесь N — общее число систем в ансамбле и $\sum P_i = 1$.

Состояние системы, при котором точная волновая функция не определена, а известен лишь набор чисел P_i , определяющих вероятность того, что система находится в состоянии Ψ_i , называется *смешанным*. При этом система характеризуется взвешенной *смесью* состояний (в отличие от *чистого* состояния, при котором известна волновая функция системы).

Подчеркнем, что простая сумма функций $\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2$ дает снова чистое состояние с четко определенной волновой функцией. При этом среднее содержит «интерференционный» член, зависящий от относительных раз состояний:

$$\langle f \rangle = P_1 f_{11} + P_2 f_{22} + 2 \operatorname{Re}(\alpha_1^* \alpha_2 f_{12}),$$
 (3.1.7)

где

$$P_{i} \equiv |\alpha_{i}|^{2}, \quad f_{ij} \equiv \int d\mathbf{r} \Psi_{i}^{*} f \Psi_{j}.$$

В аналогичном смешанном состоянии последнее слагаемое в (7) отсутствует. Здесь имеется аналогия с наложением двух световых полей: когерентные поля интерферируют, а некогерентная смесь дает просто двойную интенсивность.

Дополнительная неопределенность смешанных состояний приводит к дополнительным «тепловым» флуктуациям наблюдаемых по ансамблю и, согласно эргодической гипотезе, во времени. Однако эти флуктуации уже не носят такого принципиального, неустранимого характера, как квантовые.

«Чистота» изготовления состояния в реальных экспериментах зависит от искусства экспериментатора. Около абсолютного нуля температуры кристалл находится в чистом (основном) состоянии с определенной энергией, но при этом остаются квантовые флуктуации координат атомов. В хорошем мазере или лазере с полной инверсией населенностей атомы находятся в верхнем рабочем состоянии с энергией \mathfrak{E}_2 . При этом флуктуаций энергии нет, $\langle \mathcal{H}^2 \rangle = \mathfrak{E}_2^2$, однако координата электрона и дипольный момент флуктуируют.

Итак, квантовый объект в зависимости от его предыстории может оказаться в одном из трех типов состояний:

1) в собственном состоянии φ_n данного оператора f, когда априори известно, что $\langle f \rangle = f_{nn}$ и f не флуктуирует:

$$\langle f^k \rangle = \langle f \rangle^k;$$

2) в чистом состоянии Ψ , образованном суперпозицией $\sum b_n \varphi_n$, когда наблюдаются квантовые флуктуации и известны лишь вероятности $|b_n|^2$ измерить то или иное значение f_{nn} :

$$\langle f^k \rangle = \sum |b_n|^2 (f_{nn})^k;$$

3) в смешанном состоянии, когда к квантовой неопределенности добавляется неполнота информации о волновой функции.

При вычислении средних величин в случае смешанных состояний надо производить двойное усреднение — квантовое с помощью волновых функций Ψ_i по формуле (1) и классическое с помощью распределения P_i и обычных правил теории вероятностей:

$$\overline{\langle f \rangle} = \sum_{i} P_{i} f_{ii} = \sum_{i} P_{i}^{-} \int d\mathbf{r} \ \Psi_{i}^{*} f \Psi_{i}.$$
(3.1.8)

Теперь амплитуды разложения (2) и матрица плотности (4) зависят от индекса *i*:

$$\Psi_i = \sum b_n^{(i)} \varphi_n,$$

так что (8) принимает вид (ср. (6))

$$\overline{\langle f \rangle} = \sum_{mni} P_i b_{n.}^{(i)*} b_m^{(i)} f_{nm} \equiv \operatorname{Sp}(\overline{\rho f}), \qquad (3.1.9)$$

где мы определили оператор плотности смешанного состояния:

$$\hat{\overline{\rho}} \equiv \sum_{i} P_{i} \hat{\rho}_{i}, \quad \overline{\rho}_{mn} \equiv \overline{b_{m} b_{n}^{*}}.$$
(3.1.10)

Линейность операции усреднения позволила включить ее в определение матрицы плотности. При этом формула усреднения (6) сохранила свой вид. В дальнейшем черта, означающая дополнительное усреднение, будет опускаться.

°Более общее определение матрицы плотности. Часто смешанному состоянию и матрице плотности такого состояния дают другие, более общие определения. При этом термин «смешанное состояние» относят не к системе в целом, а к ее части, подсистеме.

Пусть система состоит из двух частей A и B. Ее состояние задается волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$, которая в общем случае, конечно, не факторизуется: $\Psi \neq \Psi_A(\mathbf{r}_A) \Psi_B(\mathbf{r}_B)$. Таким образом, волновой функции подсистемы Ψ_A не существует. Ведь факторизация означает независимость подсистем, и поэтому она невозможна, если A и B взаимодействуют или взаимодействовали в прошлом. Здесь имеется аналогия с классической статистической физикой: в случае взаимодействующих частиц совместное распределение вероятностей $P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$ нельзя представить в виде $P_A(\mathbf{r}_A) P_B(\mathbf{r}_B)$.

Однако в классической статистической физике мы можем определить отдельно функцию распределения подсистемы A, просуммировав P по не интересующим нас переменным:

$$P_{A}(\boldsymbol{r}_{A}) = \int d\boldsymbol{r}_{B} P(\boldsymbol{r}_{A}, \boldsymbol{r}_{B}). \qquad (3.1.11)$$

Спрашивается, возможна ли аналогичная процедура в квантовой механике?

Чтобы определить матрицу плотности подсистемы, разложим Ψ по какому-либо полному набору функций $\psi_{ln}(r_A, r_B)$:

$$\Psi = \sum_{in} b_{in} \psi_{in}. \tag{3.1.12}$$

Такой набор $\psi_{in} = \chi_i \varphi_n$ порождают два оператора, действующие только на переменные одной подсистемы. Например,

$$(\mathcal{H}_{A}-\mathcal{E}_{An})\varphi_{n}=0, \qquad (\mathcal{H}_{B}-\mathcal{E}_{Bl})\chi_{l}=0.$$

Пусть нас интересует наблюдаемая f_A :

$$\langle f_A \rangle = \int d\mathbf{r}_A d\mathbf{r}_B \Psi^* f_A \Psi =$$

= $\sum_{ii'nn'} b^*_{in} b_{i'n'} f_{Ann'} \delta_{ii'} = \sum_{nn} \rho_{An'n} f_{Ann'} = \operatorname{Sp}(\rho_A f_A). \quad (3.1.13)$

Мы снова получили формулу (6), введя обозначение

$$\rho_{An'n} = \sum_{i} b_{in}^{*} b_{in'}, \qquad (3.1.14)$$

которое эквивалентно определению (ср. (11))

$$\rho_A \equiv S \rho_B \left(\rho_{AB} \right). \tag{3.1.15}$$

В квантовой электронике под системой A обычно понимается конкретный атом (или молекула, электрон в кристалле), а к системе B относят все остальные частицы вещества и квантованное электромагнитное поле (классическое поле, действующее на систему, не нарушает, очевидно, «чистоты» состояния). Иногда, наоборот, A — отдельная мода поля, а B — вещество. Если B обладает достаточно большим числом степеней свободы и сплошным спектром энергии, т. е. имеет большую теплоемкость, то ее состояние можно считать не зависящим от A и она играет роль *термостата*. Воздействие B на A обусловливает релаксацию A.

Если пренебрегать обратным влиянием A на B, то можно описывать A с помощью волновой функции или матрицы плотности чистого состояния (4) и мы возвращаемся к задаче о поведении квантовой системы в заданном шумовом поле, рассмотренной в § 2.4. Решение этой задачи в рамках той или иной модели позволяет рассчитывать процессы релаксации и форму спектральных линий. В простейшей модели роль термостата для атома играет равновесное планковское поле, при этом вероятности релаксационных переходов определяются коэффициентами Эйнштейна A, B (§ 2.5).

Свойства матрицы плотности. С помощью определения (10) легко показать, что матрица плотности обладает следующими свойствами:

Sp
$$\rho = 1$$
, $0 \ll \rho_{nn} \ll 1$, $\rho^+ = \rho$. (3.1.16)

Обычно используют энергетическое представление, в котором диа гональные элементы матрицы плотности $\rho_{nn} \equiv \rho_n$ имеют смысл относи тельных населенностей уровней. Первое равенство в (16) означает, чт вероятность найти систему на каком-то уровне равна единице, второ свойство дает неотрицательность вероятности и третье свойство (эр митовость) обеспечивает действительность наблюдаемых величин:

$$\langle f \rangle^* = \sum \rho_{mn}^* f_{nm}^* = \sum \rho_{nm} f_{mn} = \langle f \rangle.$$

Недиагональный элемент матрицы плотности $\overline{b_m^* b_n}$ характеризуе степень корреляции состояний m и n в статистическом ансамбле Если амплитуды состояний различных систем ансамбля содержа случайный фазовый множитель $b_n^{(j)} \sim \exp(i\varphi_n^{(j)})$, то при $m \neq n$

$$\rho_{mn} \sim \overline{\exp i \left(\varphi_m - \varphi_n \right)} = 0 \tag{3.1.17}$$

и состояние ансамбля полностью характеризуется населенностями состояний ρ_n .

В случае чистого состояния из определения (4) следует свойств | $\rho_{mn}|^2 = \rho_{mm}\rho_{nn}$. В смешанном состоянии элементы матрицы плот ности удовлетворяют неравенству Коши—Буниковского:

$$|\rho_{mn}|^2 < \rho_{mn}\rho_{nn}.$$
 (3.1.18)

[°]Матрица плотности и энтропия. Пусть замкнутая система нахо дится в одном из чистых энергетических состояний: $\Psi = \varphi_1 \exp(-i\mathcal{E}_1 t/\hbar)$ тогда согласно определению (4) лишь один элемент матрицы плотно сти отличен от нуля: $\rho_{mn} = \delta_{mn} \delta_{n1}$. Такая тривиальная матрица удов летворяет матричному уравнению

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}.$$

Этим свойством обладают все чистые состояния. Эго следует из (4), правила умножения матриц и условия нормировки $Sp\rho = 1$.

Нарушение равенства (19) или следующего из него равенства Sp $\rho^2 = 1$ может служить признаком смешанности состояния. Однак существует более удобная, количественная мера статистической не определенности квантовых систем — энтропия (см., например, [7, 25]) Определим оператор энтропии через оператор плотности следующим образом: $\hat{S} = -\ln \hat{\rho}$, тогда энтропия S равна $\langle \hat{S} \rangle$, т. е.

$$S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle = -Sp(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \qquad (3.1.20)$$

В диагональном для р представлении (20) принимает вид

$$S = -\sum_{n} \rho_n \ln \rho_n \tag{3.1.21}$$

(это следует из того, что в диагональном представлении $[F(f)]_{nn} = 42$

= $F(f_{nn})$). В чистом состоянии ρ_n равно 0 или 1, поэтому S = 0, неопределенность («хаотичность») минимальна. Противоположный крайний случай максимальной неопределенности получается для однородной смеси состояний: $\rho_n = \text{const} = 1/g$, где g—число состояний с данной энергией (микроканонический ансамбль Гиббса). При этом $\hat{\rho} = \hat{I}/g$, $\hat{\rho}^2 = \hat{I}/g^2$ и согласно (21)

$$S = -\sum_{n=1}^{g} (1/g) \ln (1/g) = \ln g. \qquad (3.1.22)$$

Таким образом, $0 \ll S \ll \ln g$.

[°]Матрица плотности атома. В статистической физике обычно рассматривают макроскопические объекты, состоящие из $N \sim 10^{22}$ одинаковых частиц. Понятия «состояние», «уровень энергии», «матрица плотности» при этом относят к веществу в целом. Можно, в принципе, говорить о волновой функции монокристалла размером около 1 см, зависящей примерно от 10^{22} аргументов r_j и времени. Соответственно число возможных состояний и, следовательно, размерность матриц f_{mn} , ρ_{mn} также чрезвычайно велики. Далее, чтобы реализовать ансамбль, надо иметь, скажем, 10^3 одинаковых кристаллов.

С другой стороны, в квантовой электронике рабочие вещества, как правило, состоят из слабо взаимодействующих атомов или молекул (газы, примесные кристаллы и растворы), и достаточно рассматривать состояние отдельного атома, точнее, одного внешнего электрона. При этом остальные частицы вещества включают в понятие термостата, слабо возмущающего волновую функцию атома.

Указанный переход примерно от 10^{22} степеней свободы к нескольким кардинально упрощает теорию (модель идеального газа). Дальнейшее упрощение достигается исключением из рассмотрения незаселенных и нерезонансных (с внешним полем) состояний, т. е. переходом к *двух*-*уровневой модели* в случае квазимонохроматического внешнего поля и отсутствия вырождения. Заметим, что матрица плотности *n*-уровневой невырожденной системы состоит из n^2 элементов, из которых n(n-1) — комплексные. Однако условия нормировки и эрмитовости (16) сокращают число независимых элементов, так что состояние системы описывается $n^2-1\equiv m$ действительными числами. Для двухуровневой системы m=3, и ее состояние можно наглядно представить точкой в трехмерном фазовом пространстве с координатами $2\rho'_{21}$, $2\rho''_{21}$ и $\rho_1-\rho_2\equiv \Delta$ (§ 4.4). В случае чистого состояния условие $\rho^2=\rho$ сокращает число переменных до двух и изображающая точка принадлежит единичной сфере.

Поскольку атомы одинаковы и независимы, то аддитивные макроскопические параметры вещества (например, поляризация P) вычисляют простым умножением одноатомных средних на $N: P = N \langle d \rangle$. Заметим, что если все атомы газа находятся в одинаковых условиях, то газ в целом можно рассматривать как ансамбль (кванговый или квантовостатистический), составленный приблизительно из 10²² систем. Суммирование по атомам при этом эквивалентно усреднению по ансамблю (см. (8)), и диагональные элементы матрицы плотности ρ_n определяю среднюю относительную населенность N_n/N уровня \mathcal{O}_n в реальног газе, а не в гипотетическом ансамбле из 10³ одинаковых сосудо с газом.

§ 3.2. Населенности уровней

Равновесные населенности. В случае термодинамического равновес сия все статистические свойства системы определяются канонический распределением Гиббса. Это распределение применимо как к изолиров ванным макроскопическим системам, так и к системам любых размеров взаимодействующим с термостатом. В применении к отдельным атомал или молекулам идеального газа распределение Гиббса соответствуе матрице плотности следующего вида:

$$\rho_{mn}^{(0)} = \delta_{mn} \rho_m^{(0)} = \delta_{mn} \exp\left(-\mathcal{E}_m / \kappa T\right) / Z, \qquad (3.2.1)$$

где нормировочный множитель, называемый статистической сум мой, определяется из условия нормировки:

$$Z = \sum_{m} \exp\left(-\frac{\mathscr{O}_{m}}{\varkappa T}\right). \tag{3.2.2}$$

Индекс *т* здесь нумерует различные состояния атома, поэтом населенность уровня с g_n -кратным вырождением равна

$$N_n^{(0)} = g_n N \exp(-\frac{g_n}{\kappa}T)/Z.$$
 (3.2.3)

Эта формула называется распределением Больцмана. Заметим, чтравновесный оператор плотности (1) можно представить в виде

$$\hat{\rho}^{(0)} = \exp\{(-\hat{\mathcal{H}}_0/\varkappa T)/\operatorname{Sp}\{\exp(-\hat{\mathcal{H}}_0/\varkappa T)\}.$$
(3.2.4)

Как было показано в § 2.3, взаимодействие внешнего поля с ве ществом определяется населенностями «резонансных» уровней N_i , N_2 В первом приближении теории возмущения наличие переменного поля приводит к возникновению лишь недиагональных элементов матрицы плотности, $\rho_{12}^{(1)} \sim E$, а диагональные элементы остаются без изменения $\rho_n^{(1)} \approx 0$, поэтому при достаточно слабых полях можно рассчитывать населенности с помощью распределения Больцмана (3).

Согласно распределению Больцмана в основном заселены лиши уровни, отстоящие от основного на энергию порядка или меньше πT Следовательно, поле с частотой, много большей $\pi T/\hbar \equiv \omega_T$, вызывае лишь переходы вверх. При комнатной температуре эта граничная час тота лежит в далеком ИК-диапазоне ($v_T \equiv \omega_T/2\pi c \approx 200 \text{ см}^{-1}$, $\lambda_T = = 1/v_T \approx 50 \text{ мкм}$), а при гелиевых температурах — в CBЧ-диапазоне ($v_T \approx 1 \text{ см}^{-1}$).

В случае атомарных газов или примесных ионов в кристаллах пер вые возбужденные уровни лежат, как правило, много выше этой гра ницы и практически все частицы находятся на основном уровне, та что в поглощении света принимают участие все частицы: $\Delta N \sim N_1 \sim N$ Часто основной уровень обладает вырождением g_1 , которое может быть снято (полностью или частично) за счет спин-орбитального взаимодействия (тонкая структура) или статических полей (эффект Штарка или Зеемана). При этом частицы распределяются по подуровням, и если расщепление много меньше κT , то населенности подуровней примерно равны N/g_1 , а разности населенностей имеют согласно (3) порядок

$$\Delta N \sim (\hbar \omega/g_1 \kappa T) \ N \ll N. \tag{3.2.5}$$

Переходы между такими подуровнями в примесных кристаллах используют в парамагнитных усилителях, и соотношение (5) объясняет необходимость охлаждения рабочих веществ усилителей до гелиевых температур.

В случае молекулярных газов или растворов органических красителей основной электронный уровень обладает богатой вращательноколебательной структурой, перекрывающей СВЧ- и средний ИК-диапазоны, поэтому молекулы распределены по множеству уровней и разности населенностей также невелики.

Двухуровневая система и отрицательная температура. Рассмотрим зависимость населенностей двух невырожденных уровней от температуры. Расположим начало отсчета энергии посередине между уровнями, так что $\mathscr{O}_{1,2} = \pm \hbar \omega/2$, тогда из (1) следует $\rho_{1,2} = e^{\pm x}/Z$, где $x = \hbar \omega/2 \pi T$. Из условия $\rho_1 + \rho_2 = 1$ находим $Z = e^x + e^{-x}$, и в результате

$$\rho_1 = N_1/N = (e^{-2x} + 1)^{-1}, \quad \rho_2 = N_2/N = (e^{2x} + 1)^{-1}, \quad (3.2.6)$$

$$\Delta = \frac{N_1 - N_2}{N} = \text{th } x. \qquad \frac{e^{-x}}{\sqrt{x} + e^{-x}} \qquad (3.2.7)$$

Рабочее вещество лазера, в принципе, находится в сильно неравновесном состоянии, и распределение Больцмана (3), как и вообще понятие температуры, к нему неприменимо. Однако удобно сохранить соотношения вида (6), (7) и для неравновесных систем, понимая под Tв этом случае некоторый эффективный параметр. Эффективная, или спиновая, температура для данной пары невырожденных уровней определяется через отношение населенностей следующим образом:

 $N_m / N_n \equiv \exp\left(\hbar\omega_{nm} / \varkappa T_{s\phi}\right), \qquad (3.2.8)$

т.е. эффективная температура есть просто логарифмическая мера отношения населенностей. Из (8) следует, что при инверсии $T_{9\Phi} < 0$.

Легко убедиться, что формулы (6), (7) сохраняют свой вид и для неравновесных систем, если под T понимать эффективную температуру. На рис. 3.1 представлена зависимость относительной разности населенностей от эффективной температуры, построенная по формуле (7) для всей шкалы температур, как положительных, так и отрицательных. Полной инверсии ($\rho_1 - \rho_2 \equiv \Delta = -1$) соответствует $T_{s\phi} = -0$, при полном насыщении ($\rho_1 = \rho_2 = 1/2$, $\Delta = 0$) $T_{s\phi} = \pm \infty$, при $\Delta = 1$ $T_{s\phi} = +0$. Заметим, что в двухуровневой системе с отрицательной температурой запас энергии больше, чем

$$\mathcal{E} = \rho_1 \mathcal{E}_1 + \rho_2 \mathcal{E}_2 = -(\hbar\omega/2) \Delta = -(\hbar\omega/2) \text{ th } x, \qquad (3.2.9)$$

rge $x = \hbar\omega/2\pi T_{ab} \cdot \mathcal{E}_2 = -\frac{\hbar\omega}{2} \mathcal{E}_2 + \frac{2\pi}{2} \cdot \mathcal{E}_2$

Пес $x \equiv n_0/2\pi I_{ab}$. Су су $z = e^{-ie^{-1}/2}$ Су z = 2Можно определить через T_{ab} и энтропию неравновесной двухуровневой системы. Согласно определению (3.1.21) и (6)

$$S = -\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_2 \ln \rho_2 = \ln (2 \operatorname{ch} x) - x \operatorname{th} x. \qquad (3.2.10)$$

Таким образом, энтропия является четной функцией температуры с максимумом $S_0 = \ln 2$ при $T_{ab} = \pm \infty$ (рис. 3.1).

В дальнейшем мы покажем, что интенсивность теплового излучения двухуровневой системы также выражается через эффектив-



Рис. 3.1. Зависимость относительной разности населенностей Δ и внтропии S двухуровневой системы от параметра $x = \hbar \omega_0/2 \pi T$ ную температуру (§ 7.1). При $\dot{T}_{\mathfrak{s}\Phi} < 0$ это излучение определяет шумы квантовых усилителей (закон Кирхгофа для отрицательной температуры), в частности, при $\hbar\omega \ll \varkappa |T_{\mathfrak{s}\Phi}|$ шумовая температура усилителя равна по модулю эффективной, $T_{\mathfrak{m}} = |T_{\mathfrak{s}\Phi}|$.

[°]Населенности в полупроводниках. Рас чет числа активных частиц с помощью рас пределения Больцмана (3) невозможен в случае межзонных переходов в полупроводниках (такие переходы используют в полупроводниковых лазерах). В отличие от связанных электронов в газах или в примесных диэлектрических кристаллах электроны в валентной зоне и зоне проводимости полупроводника делокализованы и могут

обмениваться местами. Возможность сбмена заставляет рассматривать многоэлектронную задачу и учитывать антисимметрию общей волновой функции по отношению к перестановке двух электронов, которая приводит к принципу Паули.

В первом приближении электроны ведут себя как частицы идеального квантового газа большой плотности. Применение общего распределения Гиббса (оно имеєт вид (1) при условии, что индекс *m* нумерует все возможные состояния многочастичной системы) к идеальному газу с учетом принципа Паули приводит к распределению Ферми — Дирака $f^{(0)}(\mathscr{C})$, которое мы для сравнения с (3) представим в следующем виде (рис. 3.2, δ):

$$N_m^{(0)} = 2f^{(0)}(\mathscr{C}_m) = 2 \{ \exp\left[(\mathscr{C}_m - \mu)/\kappa T\right] + 1 \}^{-1}, \qquad (3.2.11)$$

где коэффициент 2 учитывает спиновое вырождение, μ — уровень Ферми, определяемый условием нормировки $\sum N_m^{(0)} = N$ (N — общее число электронов), и \mathscr{E}_m — разрешенные значения энергии одного электрона. Дискретность спектра является следствием периодических граничных условий для волновой функции электрона. Согласно (11)

средняя населенность любого уровня не может превышать двух электронов в соответствии с принципом Паули.

Уровни энергии электронов \mathscr{C}_m в полупроводнике распределены в разрешенных зонах практически непрерывно. В результате населенность N_m можно считать функцией непрерывного аргумента \mathscr{C} и условие нормировки $\sum N_m = N$, определяющее неявно уровень Ферми, принимает вид

$$\int d\mathscr{E} g(\mathscr{E}) N(\mathscr{E}) = N, \qquad (3.2.12)$$

где область интегрирования охватывает зону проводимости и валентную зону, g(&) — плотность энергетических состояний.



Рис. 3.2. Инверсия населенностей в полупроводнике: а) связь между импульсом pи энергией \mathscr{E} (закон дисперсии) для электронов и дырок (\mathscr{E}_g — запрещенная зона); свет с частотой ω и волновым вектором k переводит электроны с уровня \mathscr{E}_1 на уровень \mathscr{E}_2 (или обратно); б) населенности уровней в равновесном полупроводнике (распределение Ферми — Дирака); \mathfrak{e}) при инжекции носителей уровень Ферми μ расщепляется на квазиуровни μ_v , μ_c и для некоторых пар уровней имеет место инверсия $f_1 < f_2$

Для чистых полупроводников уровень Ферми лежит примерно в середине запрещенной зоны. Если бы здесь имелись примесные уровни, на них находилось бы по одному электрону — уровень Ферми и можно формально определить как уровень, заполненный ровно наполовину. При низких температурах граница между заполненными и пустыми уровнями очень резкая (рис. 3.2, б).

Для достаточно высоких уровней, для которых $\mathscr{E}-\mu \gg T$, можно пренебречь единицей в знаменателе выражения (11), и оно принимает вид распределения Больцмана (3):

$$N_{m} = 2Z^{-1} \exp\left(-\mathscr{O}_{m}/\varkappa T\right) \ll 2, \qquad (3.2.13)$$

где $Z = \exp(-\mu/\kappa T)$.

[°]Инверсия в полупроводниках. Рассмотрим условие квантового усиления при межзонных переходах в полупроводниках. Падающее поле с частотой ω, превышающей ширину запрещенной зоны \mathscr{E}_g/\hbar , вызывает почти «вертикальные» переходы электронов с уровня 1 валентной зоны на уровень 2 зоны проводимости (рис. 3.2, *a*). Уровни 1, 2 в зонах однозначно определены законами сохранения энергии $\hbar\omega = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$ и импульса $\hbar \mathbf{k} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ (точнее, квазиимпульса).

Число вынужденных переходов вверх пропорционально вероятности заполнения нижнего уровня $N_1/2=f(\mathfrak{E}_1)=f_1$, умноженной в соответствии с принципом Паули на вероятность $1-f_2$ того, что на верхнем уровне имеется дырка. Аналогично число переходов вниз пропорционально $f_2(1-f_1)$ с тем же коэффициентом пропорциональности (см. (2.1.24)). Суммарный эффект поглощения или усиления энергии поля пропорционален разности:

$$\alpha \sim f_1(1-f_2)-f_2(1-f_1)=f_1-f_2=(N_1-N_2)/2.$$
 (3.2.14)

Таким образом, вклад одной пары резонансных уровней в коэффициент поглощения пропорционален разности их заселенностей, как и в случае локализованных электронов, и условие инверсии имеет вид

$$f(\mathscr{E}_2) > f(\mathscr{E}_1).$$
 (3.2.15)

В равновесном полупроводнике $f = f^{(0)}$ и это условие не выполняется. Однако если, например, в зоны с помощью внешнего источника постоянного тока инжектируется достаточное количество носителей заряда — электронов и дырок, — то условие (15) может быть выполнено (рис. 3.2, *в*). Легко показать, что для этого носители в зонах должны быть вырождены:

$$\mu_c - \mu_{\upsilon} > \hbar \omega > \mathscr{E}_g. \tag{3.2.16}$$

Здесь µ_c, µ_v – квазиуровни Ферми в зонах проводимости и валентной. Кроме метода инжекции, в полупроводниковых лазерах используется оптическая накачка (одно- или двухфотонная) и накачка электронным пучком.

Отметим здесь, что усилители и генераторы, использующие свободные электроны, — гиротроны, лазеры на свободных электронах и т. д. также можно описывать в терминах инверсии населенностей (чисел заполнения). Так, в квазимонохроматическом пучке со средней энергией \mathscr{E}_0 занята лишь узкая группа уровней около \mathscr{E}_0 , поэтому имеет место инверсия $f(\mathscr{E}_0) > f(\mathscr{E})$ по отношению ко всем нижележащим уровням.

§ 3.3. Эволюция матрицы плотности

Неравновесные системы. Матрица плотности системы ρ_{mn} аналогично функции распределения P(q, p) в классической физике содержит полную статистическую информацию о свойствах системы, т. е. позволяет рассчитывать средние по ансамблю величины $\langle f \rangle = \text{Sp}(f\rho)$, высшие моменты, коэффициенты корреляции $\langle fg... \rangle = \text{Sp}(fg...)$ и т. д. Термодинамика имеет дело в основном с равновесными системами, в которых матрица плотности и средние по ансамблю не зависят от времени:

 $\dot{\rho}^{(0)} = \langle \dot{f} \rangle^{(0)} = 0$. Заметим, однако, что функции корреляции $\langle f(t) g(t') \rangle^{(0)}$ могут зависеть от разности времен t - t'.

В квантовой электронике, наоборот, представляют интерес системы, в которых под действием внешних полей устанавливается существенно неравновесное состояние, $\rho \neq \rho^{(0)}$. Если внешнее возмущение переменное, $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}^2(t)$, то, естественно, матрица плотности и средние по ансамблю зависят от времени: $\rho = \rho(t)$, $\langle f \rangle = \langle f(t) \rangle$. С другой стороны, после выключения внешнего поля выведенная из равновесия система ($\rho(t_0) \neq \rho^{(0)}$) будет релаксировать, приближаться к равновесию, и ее матрица плотности и средние будут опять зависеть от времени. Впрочем, процессы релаксации также можно описывать переменным возмущением $\mathcal{V}^2(t)$, действующим на систему со стороны термостата.

Неравновесные и нестационарные системы изучает неравновесная статистическая термодинамика или, иначе, кинетическая теория. Кинетичаеская теория от динамики изучает не зависимость от времени координат и импульсов отдельных частиц q(t), p(t) или волновой функции $\Psi(q, t)$, а поведение средних $\langle f(p, q, t) \rangle$, функций распределения P(q, p, t) или матрицы плотности $\rho_{mn}(t)$ для систем, взаимодействующих с термостатом и (или) с внешними переменными полями.

Уравнение Неймана. Рассмотрим сначала, исходя из уравнения Шредингера, динамическую задачу о поведении матрицы плотности системы с известным оператором энергии \mathcal{H} . Для этого подставим разложение (3.1.2) в уравнение Шредингера и умножим полученное уравнение слева на оператор $\int dr \, \phi_m^*$. Благодаря ортонормированности функций ϕ_m получим следующую систему уравнений, определяющих динамику коэффициентов b_m :

$$i\hbar \dot{b}_m = \sum_n \mathcal{H}_{mn} b_n. \tag{3.3.1}$$

Напомним, что здесь, в отличие от (2.1.14), фигурируют матричные элементы полного гамильтониана \mathcal{H} , а не оператора возмущения \mathcal{V} , что связано с другим определением амплитуд состояний. Кроме того, использованные здесь базисные функции φ_m не обязательно являются собственными для оператора энергии.

Умножим (1) на b_k^* и выпишем комплексно сопряженное выражение:

$$i\hbar b_k^* \dot{b}_m = \sum_n \mathcal{H}_{mn} b_k^* b_n,$$

$$i\hbar b_k \dot{b}_m^* = -\sum \mathcal{H}_{nm} b_k b_n^*.$$
(3.3.2)

Здесь была использована эрмитовость оператора энергии, $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$. Поменяем местами индексы m и k во втором уравнении и сложим его с первым. В результате с учетом определения матрицы плотности чистого состояния (3.1.4) найдем следующее уравнение движения:

$$i\hbar\dot{\rho}_{mk} = \sum_{n} \left(\mathscr{H}_{mn}\rho_{nk} - \rho_{mn}\mathscr{H}_{nk} \right). \tag{3.3.3}$$

49

Согласно определению (3.1.10), такой же вид имеет и уравнение для матрицы плотности смешанного состояния. С помощью правила умножения матриц и знака коммутации ($[f, g] \equiv fg - gf$) можно записать (3) в компактном инвариантном виде:

$$i\hbar\dot{\rho} = [\mathcal{H}, \rho].$$
 (3.3.4)

Эго уравнение, описывающее эволюцию матрицы плотности, называется уравнением Неймана, оно является исходным уравнением неравновесной термодинамики. Его классический аналог—уравнение Лиувилля для функции распределения P(q, p, t).

Взаимодействие с термостатом. При наиболее общем подходе под р в (4) понимается матрица плотности чистого состояния замкнутой системы, энергия которой состоит из следующих слагаемых:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}, \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2, \quad (3.3.5)$$

где \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B —невозмущенные гамильтонианы рассматриваемой системы и термостата, а \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 описывают взаимодействие системы с термостатом, т. е. релаксацию, и внешним полем соответственно. Уравнение Неймана решается с помощью теории возмущения, и далее производится усреднение по переменным термостата (см. второе определение матрицы плотности (3.1.15)).

При более приближенном подходе ρ относится лишь к рассматриваемой системе (атому, молекуле), $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_A$, и \mathcal{V}_1 полагается стохастической функцией времени с известными статистическими параметрами. Пусть индексы k, m, n нумеруют невозмущенные энергетические функции ($\mathcal{H}_0 \varphi_k = \mathscr{E}_k \varphi_k$), тогда (3) принимает вид

$$\left(\frac{d}{dt}+i\omega_{mk}\right)_{s}\rho_{mk}=\frac{1}{i\hbar}\sum_{n}\left(\mathscr{V}_{mn}\rho_{nk}-\rho_{mn}\mathscr{V}_{nk}\right),\qquad(3.3.6)$$

где оператор \mathscr{V} включает действие термостата и внешнего поля. Заметим, однако, что такой подход не объясняет неравенства вероятностей релаксационных переходов вверх и вниз, $w_{12} > w_{21}$ (см. следующий раздел).

Наконец, в квантовой электронике релаксацию учитывают, как правило, феноменологически с помощью небольшого числа констант, которые считают известными из более детальной теории или из эксперимента.

Эволюция замкнутой системы. Прежде чем вводить релаксационные параметры в уравнение для матрицы плотности, рассмотрим случай замкнутой системы. Пусть φ_n — собственные функции оператора энергии, тогда $\mathcal{H}_{mn} = \mathscr{C}_n \delta_{mn}$ и (3) принимает вид

$$\dot{\rho}_{mk} = -i\omega_{mk}\rho_{mk}. \qquad (3.3.7)$$

Таким образом, в замкнутой системе матрица плотности зависит от времени тривиальным образом:

$$\rho_{mk}(t) = \rho_{mk}(0) \exp(-i\omega_{mk} t), \qquad (3.3.8)$$

т. е. недиагональные элементы матрицы плотности осциллируют с соответствующими боровскими частотами, а диагональные элементы (относительные населенности) постоянны. Заметим, что этот результат следует также сразу из экспоненциальной зависимости от времени амплитуд состояний ($b_n = c_n \exp(-i\mathcal{E}_n t/\hbar)$) и определения ρ (3.1.4). Применим (8) для определения дипольного момента изолированного

атома:

$$\langle \boldsymbol{d}(t) \rangle = \operatorname{Sp} \left\{ \boldsymbol{d} \boldsymbol{\rho}(t) \right\} = \sum_{mn} \boldsymbol{d}_{nm} \boldsymbol{\rho}_{mn}(0) \exp\left(-i\omega_{mn}t\right). \quad (3.3.9)$$

Но из уравнений Максвелла следует, что осциллирующий диполь подобно антенне излучает в пространство электромагнитные волны и поэтому через какое-то время атом должен потерять весь запас энергии и перейти в основное состояние, т. е. $\rho_{mn}(\infty) = \delta_{mn} \delta_{n0}$. Таким образом, атом не может быть изолирован от электромагнитного вакуума, который играет роль термостата с Т=0. Этот пример напоминает, что изолированных систем не существует, и поэтому (7) надо дополнить релаксационными членами, описывающими установление равновесия: $\rho(\infty) \rightarrow \rho^{(0)}$.

Поперечная и продольная релаксации. Простейшие модели релаксации (использующие, в частности, марковское приближение) приводят к следующему виду кинетических уравнений для матрицы плотности (см., например, [7, 14]):

$$\left(\frac{d}{dt}+i\omega_{mk}\right)\rho_{mk}=-\gamma_{mk}\rho_{mk}, \quad m\neq k, \qquad (3.3.10a)$$

$$\frac{d\rho_m}{dt} = \sum_n \left(\omega_{mn} \rho_n - \omega_{nm} \rho_m \right), \quad \rho_m \equiv \rho_{mm}. \tag{3.3.106}$$

Согласно (10а) недиагональные компоненты матрицы плотности ведут себя как амплитуды экспоненциально затухающих осцилляторов:

$$\rho_{mk}(t) = \rho_{mk}(0) \exp\left[\left(-i\omega_{mk} - \gamma_{mk}\right)t\right]. \tag{3.3.11}$$

Постоянная затухания для данной пары уровней у12= у21 часто обозначается через 1/T₂. Время релаксации T₂ недиагональной компоненты 012 называется временем спин-спиновой или поперечной релаксации (смысл последнего термина выяснится в § 4.4).

Экспериментально поперечная релаксация обычно проявляется в уширении спектральных линий (мы пока отвлекаемся от нестационарных экспериментов, рассматриваемых в гл. 5). В § 4.2 будет показано, что из (10а) следует лоренцева форма линии с полной шириной на уровне 0,5:

$$\Delta \omega = 2\gamma_{12} = 2/T_2. \tag{3.3.12}$$

В разреженных газах единственной причиной релаксации является взаимодействие атомов с электромагнитным вакуумом, вызывающее с вероятностью $A_{12} = 2\gamma_{12}$ спонтанное излучение и соответствующее уширение верхнего уровня $\Delta \mathscr{C}_2 = \hbar A_{12}$ и спектральной линии, — так называемое естестзенное уширение:

$$\Delta \omega_{\rm ect} = 2\gamma_{12} = A_{12}. \tag{3.3.13}$$

Если нижний уровень рассматриваемого перехода не является основным, то нужно учесть также и его уширение. Пусть $2\gamma_n = \sum_{m < n} A_{mn}$ общая вероятность спонтанного перехода с уровня *n* на все нижележащие уровни, тогда

$$\gamma_{mn} = \gamma_m + \gamma_n. \tag{3.3.14}$$

Практически Δf_{ecr} лежит в области мегагерц для разрешенных переходов в видимой области и $T_2 \sim 10^{-6}$ с.

В случае достаточно плотных газов естественное уширение маскируется столкновительным и T_2 совпадает по порядку величины со средним временем т между столкновениями атомов друг с другом. В результате $\Delta\omega \approx 2/\tau$ и ширина линии пропорциональна давлению *р* (при условии, конечно, что доплеровское уширение меньше столкновительного). Для грубых оценок можно полагать, что при *p* = = 1 мм рт. ст. $\Delta f \sim 10-100$ МГц. Заметим, однако, что в некоторых условиях наблюдается сужение линий при увеличении давления, $\Delta\omega \sim 1/p$ (столкновительное или динамическое сужение). Одна из моделей этого явления рассмотрена в [3].

Взаимодействие атома с термостатом приводит не только к затуханию состояний, но и к некоторому сдвигу $\delta \omega$ частоты перехода. В случае термостата — вакуума этот сдвиг называется *лембовским*. Оба эти эффекта можно формально учесть, заменяя частоту перехода ω_{mn} на комплексную величину

$$\tilde{\omega}_{mn} = \omega_{mn} + \delta \omega_{mn} - i \gamma_{mn}. \qquad (3.3.15)$$

Существенно, что поперечная релаксация не обязательно связана с передачей энергии в термостат. Например, при упругих столкновениях в газе фазы комплексных амплитуд состояний $b_m^{(t)}$ и их парных произведений $b_m^{(t)}b_n^{(t)*}$ для отдельных атомов изменяются случайным образом, и если в начальный момент времени эти фазы были одинаковы ($\rho_{mn} \neq 0$), то через некоторое время $T_2 = 1/\gamma_{mn}$, равное по порядку величины среднему времени между столкновениями, фазы равномерно распределятся в интервале $0-2\pi$, так что $\rho_{mn} \rightarrow 0$. Аналогичный результат дает также диполь-дипольное взаимодействие соседних примесных атомов в кристаллах. Подобные возмущения, не изменяющие населенностей, называются *адиабатическими*. Конечно, неадиабатические возмущения, например неупругие столкновения, также дают вклад в затухание недиагональных элементов, так как они изменяют и амплитуду и фазу коэффициентов $b_m^{(i)}$.

Рассмотрим теперь релаксацию диагональных компонент матрицы плотности, т. е. населенностей. Кинетические уравнения (10б) содержат набор феноменологических коэффициентов w_{mn} с размерностью 1/c. Коэффициент w_{21} определяет скорость перехода из состояния 1 в состояние 2 под действием термостата (напомним, что в квантовой механике индексы переходов принято читать справа налево). Роль термостата могут играть, например, колебания решетки в кристаллах, поступательные степени свободы атомов в газе, электромагнитное излучение.

В случае двухуровневых систем используют обозначение

$$T_1 = (w_{12} + w_{21})^{-1}. \tag{3.3.16}$$

Параметр T_1 определяет время релаксации населенностей, т. е. средней энергии, и называется временем спин-решеточной или продольной релаксации. Время продольной релаксации зависит от температуры термостата и изменяется в очень широких пределах: от 10^{-12} с в случае безызлучательных оптических переходов в конденсированном веществе до часов и суток в случае ядерного магнитного резонанса (слабость взаимодействия с решеткой объясняется малым значением магнитного момента ядер, $\mu \sim 10^{-23}$ СГС). Заметим, что адиабатические возмущения, например диполь-дипольное взаимодействие, не изменяют населенности, и поэтому обычно $T_1 > T_2$. Экспериментально продольная релаксация проявляется в эффекте насыщения (§ 4.3).

Уравнения (10) должны охватывать и случай термодинамического равновесия, когда $\rho = \rho^{(0)}$ и $\dot{\rho}^{(0)} = 0$, поэтому должна иметь место следующая связь:

$$\sum_{n} \left(\omega_{mn} \rho_n - \omega_{nm} \rho_m \right) = 0. \tag{3.3.17}$$

Это равенство удовлетворяется, в частности, если принять принцип детального равновесия:

$$w_{mn}\rho_n = w_{nm}\rho_m. \tag{3.3.18}$$

Огсюда при учете распределения Больцмана находим следующую связь между вероятностями релаксационных переходов, уменьшающую вдвое число независимых параметров в (106):

$$w_{mn}/w_{nm} = \exp\left(\hbar\omega_{nm}/\kappa T\right), \qquad (3.3.19)$$

где T — температура термостата. Это условие обеспечивает динамическое равновесие населенностей. Таким образом, $w_{12} > w_{21}$, в отличие от случая вынужденных переходов в классическом поле, когда согласно (2.1.24) $W_{12} = W_{21}$. При низких температурах термостата в нем отсутствуют возбуждения (фотоны, фононы и т. д.) с высокой энергией $\hbar\omega > \kappa T$, поэтому он может лишь поглощать энергию из рассматриваемой системы и переходы вверх практически не происходят. Крайний пример такой ситуации представляют переходы между уровнями ядер в γ-диапазоне, которые даже в конденсированном веществе часто происходят лишь вследствие спонтанного излучения с вероятностью $w_{12} = = A = 1/T_1$. В случае ядерных изомеров A чрезвычайно мало из-за сильного запрета по мультипольности, и T_1 достигает, как и в случае ЯМР, суток.

В принципе, параметры w_{mn} можно вычислять в рамках той или иной модели термостата. Пример такого расчета в случае термостата — поля уже был проведен выше в § 2.5. При этом

$$w_{21} = B\rho, \quad w_{12} = B\rho + A,$$
 (3.3.20)

$$1/T_1 = A \operatorname{cth}(\hbar\omega_{21}/2\pi T) = A/\Delta^{(0)},$$
 (3.3.21)

где A, B — коэффициенты Эйнштейна для спонтанных и вынужденных переходов, $\rho \equiv \rho^{(0)}(\omega_{21})$ — спектральная плотность равновесного поля, определяемая формулой Планка, и $\Delta^{(0)}$ — равновесная относительная разность населенностей (см. (3.2.7)).

[°]Представление взаимодействия. Уравнение Неймана для матрицы плотности (4) обычно приходится решать с помощью теории возмущений, т. е. метода последовательных приближений; исключение составляет случай двухуровневой системы, рассмотренный ниже в § 4.3. Как и при решении уравнения Шредингера в энергетическом представлении (§ 2.1), будем полагать, что влияние внешнего переменного поля на электроны в атоме много слабее действия постоянного поля ядра, определяющего невозмущенные стационарные состояния связанного электрона. Более точно условие применимости теории возмущения имеет, как будет показано ниже, вид $\Omega \ll \tilde{\omega}$, где $\Omega = |d_{mn} \cdot E_0|/\hbar$ —частота Раби, т. е. матричный элемент энергии возмущения в частотных единицах, и $\tilde{\omega}$ — расстройка между частотой поля и ближайшей частотой атома, т. е. дефицит энергии в виртуальном состоянии $|\omega - \omega_{mn}|$ (§ 6.2), или ширина перехода γ_{mn} , определяемая релаксацией.

Прежде чем решать уравнение Неймана, удобно перенести тривиальную невозмущенную зависимость матрицы плотности от времени на операторы. Для этого введем следующее обозначение для матричных элементов произвольного оператора в энергетическом базисе:

$$f'_{mn} \equiv f_{mn} \exp\left(i\omega_{mn}t\right) = \int d\boldsymbol{r} \Phi_m^*\left(\boldsymbol{r}, t\right) f \Phi_n\left(\boldsymbol{r}, t\right), \qquad (3.3.22)$$

где функции $\Phi_n = \varphi_n \exp(-i\mathscr{E}_n t/\hbar)$ удовлетворяют уравнению $i\hbar\dot{\Phi}_n = \mathscr{H}_0 \Phi_n$. Преобразованию матричных элементов (22) соответствует следующее унитарное преобразование самих операторов:

$$f'(t) = U_0^+ f U_0, \qquad (3.3.23)$$

$$U_0(t) = \exp(-i\mathcal{H}_0 t/\hbar), \quad U_0 U_0^+ = I.$$
 (3.3.24)

Унитарный оператор U₀ называется оператором невозмущенной эволюции, в энергетическом представлении он диагонален и имеет соб-

ственные значения $\exp(-i\mathcal{E}_n t/\hbar)$, так что

$$\Phi_{n}(t) = U_{0}(t) \,\varphi_{n}, \qquad (3.3.25)$$

$$\varphi_n = U_{\varphi}^+(t) \,\Phi_n(t). \tag{3.3.26}$$

В обозначениях Дирака временная эволюция вектора состояния записывается следующим образом (при $\mathscr{V} = 0$):

$$| t \rangle = U_0(t - t_0) | t_0 \rangle.$$
 (3.3.27)

Обратное к (27) преобразование имеет вид

$$| \rangle' \equiv |t_0\rangle = U_0^+ |t\rangle.$$
 (3.3.28)

Подставим теперь в уравнение Неймана (4) вместо ρ_{mn} и \mathcal{P}_{mn} штрихованные величины согласно (23) и учтем, что $\omega_{mn} + \omega_{nk} = \omega_{mk}$. В результате получим уравнение для матрицы плотности в *предстазлении взаимодействия* или, иначе, *представлении Дирака*:

$$i\hbar\dot{\rho}_{mk} = \sum_{n} (\mathcal{V}_{mn}'\rho_{nk}' - \rho_{mn}'\mathcal{V}_{nk}').$$
 (3.3.29)

В инвариантном виде оно записывается так:

$$i\hbar\dot{\rho}' = [\mathscr{P}', \rho'].$$
 (3.3.30)

Отметим, что зависимость произвольного оператора f от времени определяется уравнением Гейзенберга:

$$i\hbar \dot{f} = [f, \mathcal{H}]. \tag{3.3.31}$$

Здесь полагается, что f не зависит от времени явно, т. е. $\partial f/\partial t = 0$.

Преобразование операторов вида (24) при одновременном преобразовании векторов состояний (28) называется переходом к представлению взаимодействия, а в случае $\mathscr{V}=0$ — к представлению Гейзенберга. Эти преобразования аналогичны переходу к вращающейся системе координат.

В исходном представлении Шредингера векторы состояний и, в соответствии с определением (3.1.4), элементы матрицы плотности являются функциями времени, а операторы могут зависеть от времени лишь за счет переменной внешней силы (как, например, оператор энергии $\mathcal{V}^{2}(t) = -d \cdot E(t)$ при дипольном взаимодействии). В представлении Гейзенберга, наоборот, вся временная зависимость перенесена на операторы и их матричные элементы, кроме оператора плотности, а векторы состояний неподвижны. Представление взаимодействия занимает промежуточное положение, в нем все величины зависят от времени.

Существенно, однако, что наблюдаемые величины не зависят от выбора представления:

$$\langle f \rangle = \operatorname{Sp}(f \rho) = \operatorname{Sp}(f' \rho').$$
 (3.3.32)

55

При доказательстве используется определение (24), унитарность $U_0U_0^+ = I$ и инвариантность шпура к циклической перестановке: Sp (*abc*) = Sp (*bca*).

^оТеория возмущения. Нетрудно найти формальное решение уравнения Неймана (30) методом последовательных приближений. Для этого представим оператор плотности в виде ряда (штрихи временно опускаем):

$$\rho(t) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}(t) + \rho^{(2)}(t) + \dots \qquad (3.3.33)$$

и подставим его в (30). Здесь $\rho^{(0)} = \rho(t_{\theta})$ — начальное условие. Приравняв слагаемые одного порядка малости по возмущению \mathcal{V}^{2} , найдем связь

$$i\hbar\dot{\rho}^{(R)} = [\mathcal{V}, \ \rho^{(k-1)}].$$
 (3.3.34)

Последовательное интегрирование дает

$$\rho^{(k)}(t) = (i\hbar)^{-k} \int_{t_0}^t dt_k \dots \int_{t_0}^{t_k} dt_1 [\mathscr{V}(t_k), \dots [\mathscr{V}(t_1), \rho^{(0)}] \dots]. \quad (3.3.35)$$

Отсюда находим среднее значение произвольного оператора

$$\langle f(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (i\hbar)^{-k} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \times \langle [\dots [f'(t), \mathcal{V}'(t_1)], \dots, \mathcal{V}'(t_k)] \rangle^{(0)}.$$
(3.3.36)

В последнем выражении усреднение производится по начальной (невозмущенной) матрице плотности $\rho^{(0)}$; начальный момент времени t_0 обычно полагается равным — ∞ . При выводе (36) было использовано свойство Sp (*ab*) = Sp (*ba*), согласно которому под знаком Sp имеют место равенства вида

$$a[b, c] = [a, b]c, a[b, [c, d]] = [[a, b], c]d.$$
 (3.3.37)

Выражение (36) определяет отклик (реакцию) квантовой системы на внешнее возмущение. Например, полагая $f = d_{\alpha}$, $\mathscr{V}(t) = -d \cdot E(t)$, можно найти средний дипольный момент атома, т. е. смещение зарядов, возникающий под действием заданного электрического поля, в виде

$$\langle \boldsymbol{d}(t) \rangle = \hat{\alpha} \boldsymbol{E} + \hat{\beta} \boldsymbol{E}^2 + \hat{\gamma} \boldsymbol{E}^3 + \dots,$$
 (3.3.38)

где $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ — некоторые интегральные операторы, структура которых ясна из (36). Разложение d(t) и E(t) в ряд или интеграл Фурье определяет тензоры поляризуемости атома $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega, \omega')$, ... Умножив, далее, атомные поляризуемости на плотность атомов N, можно найти тензоры макроскопической восприимчивости вещества $\chi^{(1)}(\omega)$, $\chi^{(2)}(\omega, \omega')$, ...

В результате таких вычислений, примеры которых будут приведены ниже в § 4.2 и 6.2, поляризация вещества $P = N \langle d \rangle$ выражается через внешнее поле и параметры атомов — дипольные матричные элементы d_{mn} и частоты переходов ω_{mn} .

восприимчивость вещества

В классической электродинамике принято разделять задачу взаимодействия излучения с веществом на две части — микроскопическую и макроскопическую. Микроскопическая часть задачи состоит в определении поведения заряженных частиц вещества под действием заданного внешнего поля. В результате ее решения вычисляют усредненные, макроскопические, параметры вещества, например тензор восприимчивости χ , определяющий поляризацию однородного вещества $P = \chi \cdot E$ под действием поля, или диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$. При разложении поля в частотный интеграл Фурье эти величины являются комплексными функциями частоты, $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + +i\varepsilon''(\omega)$.

При макроскопическом подходе восприимчивость вещества считается известной и задача состоит в исследовании процессов излучения и распространения поля с помощью макроскопических уравнений Максвелла.

В настоящей главе сначала рассмотрены определение и общие свойства тензора восприимчивости (§ 4.1). Далее в § 4.2 восприимчивость вычисляется с помощью простейшей модели — одинаковые, неподвижные и невзаимодействующие молекулы. При этом используется как классическая, так и квантовая теории. В § 4.3 рассмотрен важнейший эффект нелинейной оптики — эффект насыщения, при котором населенности двух уровней выравниваются под действием сильного резонансного поля. Наконец, в § 4.4 выводятся уравнения Блоха, широко используемые в квантовой электронике.

§ 4.1. Определение и общие свойства восприимчивости

По определению линейная диэлектрическая восприимчивость $\chi(\omega)$ является коэффициентом пропорциональности между монохроматическим макроскопическим полем $E(\omega)$ с частотой ω и возникающей под его действием поляризацией $P(\omega)$ в однородной среде. В анизотропной среде поляризация может быть непараллельна полю, так что восприимчивость в общем случае является тензором:

$$P_{\alpha}(\omega) = \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\omega) E_{\beta}(\omega), \qquad (4.1.1)$$

знак суммирования, как правило, опускается, $\alpha_{\bullet} \beta = x$, y, z. В более компактных векторных обозначениях

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\omega}). \tag{4.1.2}$$

57

Симметрия. Здесь $E(\omega)$ обозначает фурье-компоненту поля E(t). Как обычно в физике, функцию времени f(t) и ее фурье-образ $f(\omega)$ обозначают одной буквой и различают лишь по аргументам:

$$f(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} f(\omega), \qquad f(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t)/2\pi. \qquad (4.1.3)$$

Отсутствие пределов интегрирования означает, что они равны $\pm \infty$. Заметим, что если f(t)— вещественная величина, то из (3) вытекает следующее свойство симметрии функции $f(\omega)$:

$$f(-\omega) = f^*(\omega). \tag{4.1.4}$$

Таким образом, дейстеительная часть $f'(\omega)$ является четной функцией, мнимая часть $f''(\omega)$ — нечетной, так что достаточно задавать $f(\omega)$ лишь для положительных частот. Из определения (2) следует, что все компоненты тензора восприимчиеости также обладают свойством (4):

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega). \tag{4.1.5}$$

Тензор $\chi(\omega)$ и его обратный фурье-образ $\chi(t)$, называемый функцией Грина или функцией отклика, обладают еще одним общим свойством, характерным для произеольных физических систем—он симметричен, т. е. $\chi = \tilde{\chi}$, или

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}. \tag{4.1.6}$$

Здесь $\tilde{\chi}$ — транспони роєанный тензор: $\tilde{\chi}_{\alpha\beta} \equiv \chi_{\beta\alpha}$. Это равенство является примером общего принципа симметрии кинетических козффициентов Онсагера. Оно подтверждается и микротеорией (см. (4.2.20)). Симметрия χ нарушается только в случае гиротропии — єстественной или вызванной постоянным магнитным полем. В последнем случае вмєсто (6) имєєм $\chi(H_0) = \tilde{\chi}(-H_0)$.

Дополнительные связи между различными компонентами $\chi_{\alpha\beta}$ накладывает симметрия среды. Например, в кристаллах с кубической симметрией, как и в изотропной среде, $\chi_{\alpha\beta} = \chi \delta_{\alpha\beta}$.

Влияние причинности. Зависимость восприимчивости от частоты $\chi(\omega)$ не может быть произвольной — как мы сейчас покажем, ее действительная $\chi'(\omega)$ и мнимая $\chi''(\omega)$ части связаны интєгральным преобразованием Гильберта.

Рассмотрим поляризацию, возникающую в диэлектрике под действием очень короткого импульса поля: $E(t) \sim \delta(t)$, т. е. считаем длительность импульса много меньшей, чем период наиболее высокочастотного собственного колебания вещества. В спектре такого импульса равномерно представлены все частоты: $E(\omega) = \text{const}$, и поэтому спектр поляризации, согласно определению (1), будет пропорционален $\chi(\omega)$: $P(\omega) \sim \chi(\omega)$ (для простоты считаєм среду изотропной). Следовательно, импульс поляризации P(t) пропорцио-

нален фурье-образу комплексной восприимчивости:

$$P(t) \sim \int d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) \equiv 2\pi \chi(t).$$

Очевидно, что реакция системы не может возникать раньше силы, ее вызвавшей, поэтому функция $\chi(t)$ должна обращаться в нуль при t < 0:

$$\int d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) \sim \theta(t), \qquad (4.1.7)$$

где $\theta(t)$ —ступенчатая функция Хевисайда, равная единице при t > 0 и нулю при t < 0.

Принцип причинности существенно ограничивает согласно (7) допустимый класс функций $\chi(\omega)$ — из него следует, что $\chi(\omega)$, рассматриваемая как функция комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$, должна быть аналитической в верхней полуплоскости. Будем вычислять интеграл (7) с помощью теории вычетов. Подынтегральное выражение

содержит множитель $e^{\omega^* t}$, поэтому при t > 0надо рассматривать интеграл по контуру, охватывающему нижнюю полуплоскость (рис. 4.1), а при t < 0 — верхнюю. Но по принципу причинности при t < 0 интеграл обращается в нуль, следовательно, функция $\chi(\omega)$ не может иметь полюсов в верхней полуплоскости (см., например, [2, 22, 25]).

Далее, согласно интегральной формуле Коши действительная и мнимая части аналитической функции связаны преобразованиями Гильберта:

$$\pi\chi'(\omega) = \int d\omega_1 \frac{\chi''(\omega_1)}{\omega_1 - \omega}, \quad \pi\chi''(\omega) = \int d\omega_1 \frac{\chi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1}.$$
(4.1.8)

Эти интегральные связи называются соотношениями *Крамерса* — *Кронига*. Они позволяют, например, измерив только мнимую часть восприимчивости, вычислить ее действи-



Рис. 4.1. Доказательство аналитичности восприимчивости диэлектрика χ (ω) в верхней полуплоскости комплексной часто ты: функция отклика $\chi(t)$ при t<0 по принципу причинности равна нулю и в то же время равна интегралу от $\chi(\omega)e^{-i\omega t}$ по контуру С; отсюда по теореме Коши внутри С не должно быть полюсов функции χ(ω)

тельную часть. Нетрудно обобщить проделанный вывод на случай анизотропной среды, при этом соотношения (8) справедливы по отдельности для всех компонент тензора χ .

Поглощение заданного поля. В приближении линейной оптики восприимчивость χ полностью определяет излучение, распространение и поглощение макроскопического поля в однородном веществе, а также свойства поверхностных волн, эффекты преломления и дифракции при наличии границ. Более того, согласно флуктуационно-диссипативной теореме (ФДТ) χ определяет также и равновесное тепловое поле в веществе (§ 7.7).

Покажем, что мнимая часть восприимчивости $\chi''(\omega)$ определяет поглощаемую или — при $\chi'' < 0$ — излучаемую веществом мощность. Будем исходить из макроскопических уравнений Максвелла для

линейной немагнитной среды, в которой $D = E + 4\pi P = (I + 4\pi \chi) E$ иB = H:

> $c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{D} = 4\pi \boldsymbol{i}$. (4.1.9 a)

> $c \operatorname{rot} E + \dot{H} = 0$. (4.1.96)

- div $D = 4\pi\rho$, (4.1.9 в)
 - div H = 0. (4.1.9 r)

где ј и р-сторонние (заданные) плотности тока и заряда.

Поглощаемая в единице объема вещества мощность Э в силу закона сохранения энергии должна при j=0 равняться, с обратным знаком, дивергенции плотности потока энергии S:

$$\mathcal{P}(t) = -c \operatorname{div}(E \times H)/4\pi = c (E \cdot \operatorname{rot} H - H \cdot \operatorname{rot} E)/4\pi.$$

Из (9а, б) следует, что

$$\mathcal{P}(t) = (E \cdot \dot{D} + H \cdot \dot{H})/4\pi.$$

В случае монохроматического поля это выражение будет содержать осциллирующее с двойной частотой слагаемое. В среднем по времени оно равно нулю, так что средняя за период мощность будет равна

$$\mathcal{P} \equiv \overline{\mathcal{P}(t)} = \overline{E \cdot P} = \omega \operatorname{Im} (E_0^* \cdot P_0)/2 = i\omega (E_{0\alpha} \chi_{\alpha\beta}^* E_{0\beta}^* - E_{0\alpha}^* \chi_{\alpha\beta} E_{0\beta})/4.$$
(4.1.10)

Поменяем местами индексы а, в в первом слагаемом и учтем симметричность (6) тензора восприимчивости в негиротропной среде, тогда

$$\mathcal{P} = \omega \chi_{\alpha\beta}^{"} E_{0\alpha}^{*} E_{0\beta}/2 \equiv \omega E_{0}^{\bullet} \cdot \chi^{"} \cdot E_{0}/2. \qquad (4.1.11)$$

В случае гиротропной среды в (11) вместо мнимой части тензора х должна стоять антиэрмитова часть ($\chi - \chi^+$)/2*i*. В изотропной среде или кубическом кристалле (11) принимает вид

> $\mathcal{P} = \omega \chi'' |E_0|^2/2.$ (4.1.12)

[°]Восприимчивость вакуума. Найдем далее поле, создаваемое в однородной среде сторонними источниками - заданной поляризацией, изменяющейся гармонически в пространстве и во времени:

$$P = (1/2) P_0 e^{ik \cdot r - i\omega t} + \text{K.c.}$$
(4.1.13)

Здесь k и ω-независимые величины. В однородной среде под действием Р возникает плоская монохроматическая волна с амплитудами E., H. Подставим (13) в уравнения (9а, б) и учтем, что **J**= **P**, в результате получим систему алгебраических уравнений для E_n , H_n ($n \equiv ck/\omega$):

$$n \times H_0 + \varepsilon \cdot E_0 = -4\pi P_0, \qquad (4.1.14)$$
$$n \times E_0 - H_0 = 0 \qquad (4.1.15)$$

$$E_0 - H_0 = 0 \tag{4.1.15}$$

или, после исключения H₀,

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E}_0 = -4\pi \boldsymbol{P}_0. \tag{4.1.16}$$

Двойное векторное произведение в (16) выделяет проекцию вектора — E_0 на плоскость, перпендикулярную направлению распространения k. Обозначим эту операцию проектирования через II. Тензор II имеет, очевидно, следующие компоненты:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} / k^2. \tag{4.1.17}$$

В результате (16) принимает вид

$$(n^2 \Pi - \varepsilon) \cdot E_0 = 4\pi P_0. \tag{4.1.18}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы из трех линейных неоднородных алгебраических уравнений. Это решение выражается известным образом через миноры и детерминант матрицы $(n^2\Pi - \varepsilon)_{\alpha\beta}$. Не решая систему явно, выразим E_0 через P_0 с помощью понятия обратной матрицы или тензора. По определению $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, поэтому из (15) и (18) следует

$$\boldsymbol{E}_{0} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{P}_{0}, \quad \boldsymbol{H}_{0} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{P}_{0}), \quad \boldsymbol{G} \equiv 4\pi (n^{2}\Pi - \boldsymbol{\varepsilon})^{-1}. \quad (4.1.19)$$

Тензор $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ называют спектральной функцией Грина для уравнений Максвелла, он определяет макроскопическое поле, создаваемое поляризацией (13), т. е. отклик электромагнитного «вакуума в среде» на возмущение. Тензорная функция $G(\mathbf{k}, \omega)$ аналогично χ или ε удовлетворяет соотношениям Крамерса—Кронига. Фурье-образ $G(\mathbf{r}, t)$ определяет поля, возникающие в однородной среде под действием произвольного распределения поляризации $P(\mathbf{r}, t)$ или тока.

Рассмотрим случай изотропной среды. Направим ось z вдоль k, тогда из (17) и (19) найдем

$$E_{0x,y} = 4\pi P_{0x,y}/(n^2 - \varepsilon), \qquad (4.1.20)$$

$$E_{0z} = -4\pi P_{0z}/\epsilon; \qquad (4.1.21)$$

напомним, что здесь $n \equiv ck/\omega$. Последнее выражение для продольного, по отношению к направлению распространения, поля E_{0z} показывает, что оно не зависит от k—мы исключаем обычно слабые эффекты пространственной дисперсии, когда $\varepsilon = \varepsilon(k, \omega)$. Согласно (21) продольное поле, создаваемое данной поляризацией, максимально на частотах, при которых $|\varepsilon(\omega)|$ минимально; эти частоты определяются условием $\varepsilon'(\omega) \approx 0$. Заметим, что функцию Грина для продольного поля можно получить также из уравнения (9в), если учесть, что $\rho = \operatorname{div} P$.

Поперечные компоненты поля $E_{0x, y}$ в зависимости от k испытывают согласно (20) «волновой резонанс» при $k = \omega \sqrt{\varepsilon'}/c$, т. е при $n^2 = \varepsilon'$. При этом $G_{xx} = G_{yy} = i/\chi''$ и мощность излучения равна (ср. (12))

$$\mathcal{P} = \omega \left(|P_{0x}|^2 + |P_{0y}|^2 \right) / 2\chi''. \tag{4.1.22}$$

°Термодинамический подход. В веществе между областями сильного поглощения существуют окна прозрачности, в которых можно пренебречь диссипацией энергии поля, т. е. полагать $|\chi''/\chi'| \ll 1$ (счктаем вещество негиротропным). В отсутствие диссипации энергия колебательного движения частиц, вызванная внешним полем, сохраняется и можно определить работу поляризации $A(E_0)$ как однозначную функцию амплитуды поля; эта работа по раскачке зарядов производится источниками переменного поля. Заметим, что для определения A необходимо конечное время установления стационарной амплитуды колебаний поляризации P_0 , что возможно лишь при наличии некоторого конечного поглощения. Понятие работы $A(E_0)$ позволяет считать E_0 одним из термодинамических параметров, задающих состояние вещества наряду с энтропией S, плотностью ρ и т. д. При таком подходе можно дать термодинамическое определение поляризации $P_0(S, \rho, E_0)$ и восприимчивости $\chi(S, \rho, E_0)$ как функций состояния вещества.

В окнах прозрачности мала и дисперсия, поэтому поляризация почти мгновенно следует за полем:

$$P(t) \approx \chi(\omega) \cdot E(t), \qquad (4.1.23)$$

здесь ω — средняя частота квазимонохроматического поля. В случае оптического поля $\chi(\omega)$ определяется, конечно, без учета инерционных механизмов поляризации, например, связанных с ориентацией молекул переменным полем (§ 6.2), дающих вклад лишь в статическую и радиочастотную восприимчивости.

Будем сначала полностью игнорировать дисперсию, тогда состояние вещества зависит от времени как от параметра только через поле E(t). При этом в (10) можно полагать $\dot{P} = \chi \cdot \dot{E}$, так что скорость изменения энергии макрополя (на единицу объема) принимает вид ¹)

$$\mathcal{P}(t) = (E \cdot \dot{E} + H \cdot \dot{H})/4\pi + E \cdot \chi \cdot \dot{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \frac{1}{2} E \chi \cdot E \right). \quad (4.1.24)$$

В последнем равенстве использована симметрия тензора χ . Выражение в скобках является, очевидно, плотностью энергии макрополя, причем первое слагаемое есть энергия поля в вакууме (при тех же E, H), а второе имеет смысл дополнительной работы A, производимой источником поля при наличии вещества. Дополнительная энергия вещества в заданном поле имеет обратный знак:

$$v = -E \cdot \chi \cdot E/2. \tag{4.1.25}$$

Строго говоря, здесь вместо макрополя внутри вещества E должно стоять внешнее поле E' в отсутствие вещества (см. [22], §11), однако мы для простоты пренебрегаем различием E и E'.

Формулы (23)—(25) предполагают линейную связь между *Р* и *E*, что оправдано лишь при достаточно слабом поле. Очевидным

¹) Учет дисперсии приводит в линейном приближении к замене χ в (24) на d (ωχ)/dω [22].

обобщением (25) является выражение

$$dv = -\boldsymbol{P}(S, \ \rho, \ \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{E}, \qquad (4.1.26)$$

или

$$v = -\int_{0}^{E} P(S, \rho, E) \cdot dE. \qquad (4.1.27)$$

Поляризация P и, следовательно, элементарная работа поляризации — dv зависят, конечно, не только от E, но и от других параметров состояния вещества, поэтому интеграл в (27)—криволинейный и для однозначного определения v следует указать путь интегрирования. Можно работу поляризации определять при неизменных энтропии S и плотности ρ , т. е. для теплоизолированного вещества при заданной концентрации молекул $N = \rho/m$. При этом внутренняя энергия вещества на единицу объема в отсутствие поля $U_0(S, \rho)$ не изменяется в процессе поляризации (по определению $dU_0 = TdS + \mu d\rho$, где μ —химический потенциал) и поэтому внутренняя энергия вещества при наличии поля равна

$$U(S, \rho, E) = U_0(S, \rho) + v(S, \rho, E), \qquad (4.1.28)$$

где Е играет роль внешнего термодинамического параметра.

Теперь можно дать термодинамические определения поляризации и восприимчивости как функций состояния вещества:

$$P_{\alpha}(S, \rho, E) \equiv -\frac{\partial U}{\partial E_{\alpha}}, \qquad (4.1.29)$$

$$\chi_{\alpha\beta}(S, \rho) \equiv -(\partial^2 U/\partial E_{\alpha} \partial E_{\beta})_{E=0}. \tag{4.1.30}$$

Таким образом, определение тензора χ через термодинамический потенциал обеспечивает его симметричность. В (24)—(29) при пренебрежении дисперсией можно полагать E = E(r, t), так что состояние вещества завлеит параметрически от времени и координаты.

Разлагая далее в ряд Тейлора внутреннюю энергию U(E) или энергию адиабатической поляризации v(E), около точки E=0можно определить нелинейную поляризацию и тензоры нелинейной восприимчивости $\chi^{(n)}$ (§ 6.1).

В термодинамике часто удобно использовать вместо U другие потенциалы, например свободную энергию $F(T, \rho, E)$. Полевую часть F (работу поляризации v_F) следует вычислять при постоянной температуре, так что в общем случае $v_F \neq v_U$. Однако в слабых полях полевые части всех потенциалов одинаковы (см. [25], §15) и равны v(E). В результате различные макрсскопические явления в электромагнитном поле—электрострикция, электрокалорический эффект и др.—определяются частными производными χ по плотности, температуре и т. д. (§ 6.2).

Пусть теперь поле квазимонохроматично, тогда в проведенном рассуждении надо под χ понимать $\chi(\omega)$. Таким образом, термодинамические потенциалы прозрачного вещества при прохождении света получают приращение

$$v(t) = - [E_0 \cdot \chi(\omega) \cdot E_0^* + E_0 \cdot \chi(\omega) \cdot E_0 e^{-i2\omega t} + \text{K.c.}]/8. \quad (4.1.31)$$

63

Практический интерес представляет лишь постоянная, или медленно меняющаяся, составляющая потенциала:

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{E}_{0} \cdot \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{E}_{0}^{*}/4. \tag{4.1.32}$$

Это выражение для эффективного потенциала вещества в монохроматическом поле описывает, согласно известным формулам термодинамики, влияние света на состояние вещества. Изменение состояния (температуры, плотности) в свою очередь влияет на χ и на проходящий свет, т. е. вызывает нелинейно-оптический эффект (§ 6.2).

Заметим, что согласно (32) можно определить амплитуду поляризации и восприимчивость через эффективный потенциал:

$$P_{0\alpha} = -4 \, \partial v / \partial E_{0\alpha}^*, \quad \chi_{\alpha\beta} = -4 \partial^2 v / \partial E_{0\alpha}^* \partial E_{0\beta}. \tag{4.1.33}$$

Пусть плотность молекул равна N, тогда в приближении невзаимодействующих молекул поляризуемость одной молекулы будет $\alpha = \chi/N$ и из (32) следует эффективный потенциал молекулы в переменном поле:

$$\mathscr{V} = -\frac{1}{4} E_0 \cdot \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{E}_0^*$$
(4.1.34)

Потенциал (34) определяет среднюю силу светового давления, действующего на молекулу в монохроматическом поле, через ее поляризуемость:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla \mathcal{V} = \nabla (\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{\alpha}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}_0^*)/4. \tag{4.1.35}$$

Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$F_{\alpha} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (E_{0\beta} \alpha_{\beta\gamma} E_{0\gamma}^{*}) = \frac{1}{4} \frac{\partial E_{0\beta}}{\partial x_{\alpha}} d_{0\beta}^{*} + \text{K.c.} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} d_{0}^{*} \cdot E_{0}(\mathbf{r}) + \text{K.c.} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{d(t) \cdot E(\mathbf{r}, t)}. \quad (4.1.36)$$

Здесь нет множителя 1/2, так как подразумевается, что оператор не действует на дипольный момент молекулы $d = \alpha \cdot E$. Силе (36) соответствует потенциал $\mathscr{V}(r) = -d \cdot E(r)$. Подробнее световое давление рассматривается в § 6.2.

§ 4.2. Теория дисперсии

Закон дисперсии. В окнах прозрачности $\varepsilon''=0$ и согласно (4.1.20) функция Грина G при $n=\sqrt{\varepsilon}$ обращается в бесконечность; обычно через n обозначают именно это «резонансное» значение отношения ck/ω , называемое показателем преломления.

Это же условие определяет возможность существования нетривиального решения ($E_0 \neq 0$) у однородных ($P_0 = 0$) уравнений Максвелла. Таким образом, в среде без источников могут распространяться лишь волны с определенной связью меж ду длиной $\lambda = 2\pi/k$ и частотой волны. Эту связь

$$k(\omega) = \omega [\varepsilon(\omega)]^{1/2}/C, \qquad (4.2.1)$$

или обратную зависимость $\omega(k)$, называют законом дисперсии, а удовлетворяющие ей волны называют свободными или нормальными. Условием существования нормального продольного поля является равенство $\varepsilon(\omega) = 0^{-1}$. Из (1) следует, что фазовая скорость поперечных нормальных волн в $\sqrt{\varepsilon}$ раз меньше скорости света. Групповая скорость, как известно, равняется производной $d\omega/dk \equiv u$, отсюда следует, что продольные волны не распространяются (так как согласно (4.1.21) $\omega(k) =$ = const н u = 0 — мы опять исключаем влияние пространственной дисперсии).

В анизотропной среде условие существования нормальных волн, или обращения функции Грина в бесконечность, имеет согласно (4.1.19) вид

$$\det\left(n^{2}\Pi - \varepsilon\right) = 0. \tag{4.2.2}$$

Это условие называют уравнением Френеля. При фиксированных частоте ω и направлении волнового вектора k/k (2) имеет решения лишь для двух ²) определенных направлений вектора поляризации $e_v(v = 1, 2)$. В общем случае вектор не перпендикулярен k и может быть комплексным, что соответствует эллиптической поляризации нормальной волны (подробнее см. [26]). Законы дисперсии $\omega_v(k)$ для двух нормальных волн также различны, что приводит к эффекту двупреломления. В анизотропной среде вектор групповой скорости u равен $\nabla \omega_v(k)$ и в общем случае не параллелен фазовой скорости.

Учет поглощения. При учете поглощения уравнение Френеля имеет решения лишь для комплексных ω и/или **k**. Выбор определяется постановкой задачи. Стационарному эксперименту соответствуют вещественная частота и комплексная постоянная распространения. В случае комплексного волнового вектора свободная монохроматическая волна затухает или усиливается при распространении. Сделаем в (1) замену $k \rightarrow \bar{k} \equiv k + i\alpha/2$, тогда закон дисперсии нормальной поперечной волны в изотропной среде примет вид $(k + i\alpha/2)^2 = (\varepsilon' + i\varepsilon'') \omega^2/c^2$. Отсюда

$$k^2 - \alpha^2/4 = \omega^2 \varepsilon'/c^2$$
, $\alpha k = \omega^2 \varepsilon''/c^2$

или

$$k = \frac{\omega}{c} \operatorname{Re} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \left(\frac{|\epsilon| + \epsilon'}{2}\right)^{1/2}, \qquad (4.2.3)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c} \left(\frac{|\varepsilon| - \varepsilon'}{2} \right)^{1/2}; \qquad (4.2.4)$$

3 д. н. Клышко

¹) Мы пренебрегаем эффектами пространственной дисперсии, описываемой зависимостью є от k (см., например, [2, 22]).

²) Эффекты пространственной дисперсии могут приводить к удвоению числа нормальных волн данной частоты. Соответствующие волны получили название «но-вых» (рис. 4.5).

знак корня выбирают из физических соображений. Эти формулы определяют положение двух полюсов функции Грина $G(\tilde{k}, \omega)$ в плоскости \tilde{k} (см. (4.1.20)).

В области слабого поглощения, где α² ≪ k², формулы (3), (4) принимают вид

$$\begin{vmatrix} k = \omega \sqrt{\varepsilon'}/c, \\ \alpha = k \varepsilon''/\varepsilon'. \end{vmatrix}$$
(4.2.5)
(4.2.6)

Следует еще раз подчеркнуть, что закон дисперсии $\omega_v(k)$ и фиксированная поляризация $e_v(k)$ имеют место лишь для свободных волн, т. е. волн, порожденных удаленными источниками. В области же заданных источников пространственная и временная зависимости «вынужденного» поля определяются распределением токов и могут быть любыми. В частности, тепловое флуктуационное поле внутри вещества создается хаотическим движением заряженных частиц и поле с данной частотой состоит из суперпозиции плоских волн со всевозможными длинами, причем волны с максимальной амплитудой не всегда удовлетворяют (5) (см. (38)).

Итак, макроскопическая теория позволяет выразить все основные наблюдаемые закономерности излучения, распространения и поглощения волн через феноменологическую функцию $\chi(\omega)$. Следующей задачей является вычисление $\chi(\omega)$ с помощью микроскопической теории. Это традиционная задача неравновесной термодинамики, которая до сих пор не решена полностью.

Классическая теория дисперсии. Чтобы определить порядок величины и вид частотной дисперсии линейной диэлектрической восприимчивости, воспользуемся наиболее простой моделью вещества: будем считать его состоящим из независимых, неподвижных, одинаковых атомов или молекул. Под действием переменного электрического поля электронное облако молекулы начинает осциллировать (ядра полагаем неподвижными) и молекула приобретает дипольный момент $d(t) = -e\sum r_i(t)$, пропорциональный в первом приближении полю. Здесь e>0 — заряд электрона и r_i — радиус-вектор *i*-го электрона. Магнитодипольный, квадрупольный и другие высшие моменты можно, как правило, не учитывать, так как в оптическом диапазоне масштаб пространственного изменения поля $\lambda > 10^{-5}$ см много больше размеров молекул N равно дипольному моменту единицы объема, т. е. поляризации: $P = -Nd = \gamma E$.

Таким образом, задача вычисления восприимчивости сводится к вычислению дипольного момента молекулы, возникающего под действием внешнего поля.

Для учета влияния теплового движения зарядов необходимо использовать кинетическую теорию. В квантовой теории r_i и, следовательно, d являются операторами, поэтому надо производить как квантовое, так и статистическое усреднение, т. е. использовать метод матрицы плотности. Рассмотрим предварительно классическую модель Лоренца, в которой молекула представляется осциллятором. Уравнение движения линейного изотропного осциллятора имеет вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + 2\gamma \dot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}_{\text{лок}}/m, \qquad (4.2.7)$$

где m, ω_0 и e—эффективная масса, частота и заряд осциллятора, γ —феноменологическая константа затухания и $E_{\text{лок}}$ -- поле в центре молекулы, называемое *действующим* или локальным. Умножив (7) на eN, найдем уравнение движения для поляризации:

$$\ddot{\boldsymbol{P}} + 2\gamma \dot{\boldsymbol{P}} + \omega_0^2 \boldsymbol{P} = \omega_\rho^2 \boldsymbol{E}_{\pi \text{o}\kappa} / 4\pi, \qquad (4.2.8)$$

где $\omega_p = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — так называемая плазменная частота.

Поле в центре неподвижной молекулы $E_{\rm лок}$ отличается от усредненного по пространству макроскопического поля E. Согласно Лоренцу

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\mathrm{gok}}} = \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon + 2}{3} \boldsymbol{E}, \qquad (4.2.9)$$

так что (8) принимает вид

$$\ddot{\boldsymbol{P}} + 2\gamma \dot{\boldsymbol{P}} + \tilde{\omega}_0^2 \boldsymbol{P} = \omega_\rho^2 \boldsymbol{E} / 4\pi, \qquad (4.2.10)$$

$$\tilde{\omega}_0^2 \equiv \omega_0^2 - \omega_p^2/3.$$
 (4.2.11)

Отсюда, полагая поле монохроматическим, находим

$$\chi = \frac{\omega_p^2/4\pi}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}.$$
(4.2.12)

В дальнейшем сдвиги собственных частот (11) за счет поправки Лоренца будем считать включенными в определение ω₀.

Предположим теперь, что имеется несколько типов независимых осцилляторов с собственными частотами ω_j и концентрациями $f_j N$ ($\sum f_j = 1$), тогда

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \sum_j \frac{f_j}{\tilde{\omega}_j^2 - \omega^2 - 2i\gamma_j \omega}.$$
 (4.2.13)

Параметр f_j называется силой осциллятора. Аналогичное выражение, которое во многих случаях хорошо описывает наблюдаемую дисперсию восприимчивости, будет получено ниже с помощью квантовой теории.

Заметим, что для очень больших частот или в случае свободных электронов в плазме или металле можно положить в (13) $\omega \gg \omega_j$, так что

$$\varepsilon pprox 1 - rac{\omega_p^2}{\omega (\omega + 2i\gamma)}.$$

Квантовая теория дисперсии. Будем теперь исходить из кинетических уравнений для матрицы плотности (3.3.10) с феноменологическими релаксационными параметрами γ_{mn} , ω_{mn} . В дипольном приближении энергия возмущения $\mathscr{V} = - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, и ее матричные элементы в случае монохроматического поля имеют вид

$$\mathcal{V}_{mn}(t) = -\hbar\Omega_{mn}e^{-i\omega t/2} + \mathfrak{s.c.}, \qquad (4.2.14)$$

где

$$\Omega_{mn} \equiv \boldsymbol{d}_{mn} \cdot \boldsymbol{E}_{0}/\hbar. \tag{4.2.15}$$

Буквы э.с. заменяют эрмитово сопряженную матрицу

 $-\boldsymbol{d}_{nm}^{*}\cdot\boldsymbol{E}_{0}^{*}\boldsymbol{e}^{i\omega t}/2=-\boldsymbol{d}_{mn}\cdot\boldsymbol{E}_{0}^{*}\boldsymbol{e}^{i\omega t}/2.$

Монохроматическое возмущение вызовет в линейном приближении такой же отклик, поэтому будем искать матрицу плотности в виде

$$\rho_{mn}^{(1)}(t) = \rho_{mn}^{(1)}(\omega) e^{-i\omega t} + \mathfrak{s. c.}$$
(4.2.16)

В нулевом порядке теории возмущений матрица плотности диагональна, $\rho_{mn}^{(0)} = \rho_m^{(0)} \delta_{mn}$, так что, подставив (14) и (16) в (3.3.10), найдем для $m \neq n$

$$\rho_{mn}^{(1)}(\omega) = \frac{\Omega_{mn} \Delta_{mn}^{(0)}/2}{\omega_{mn} - \omega - i\gamma_{mn}}, \qquad (4.2.17)$$

где $\Delta_{nm} \equiv \rho_n - \rho_m$ — относительная разность населенностей уровней *n* и *m*. Диагональные элементы $\rho_{nn}^{(1)}$ согласно (3.3.10) будут обратно пропорциональны частоте возмущения ω и, если интересоваться лишь резонансными эффектами, при условии $\gamma/\omega \ll 1$ можно считать $\rho_{nn}^{(1)} = 0$. Итак, амплитуда отклика на гармоническое возмущение пропорциональна разности населенностей и достигает максимума в случае резонанса $\omega = \omega_{mn}$.

Подставив (17) в (3.1.6), находим дипольный момент молекулы и поляризацию:

$$P = N \langle \boldsymbol{d} (t) \rangle = \frac{1}{2} P_0 e^{-i\omega t} + \kappa. c.,$$
$$P_0 = \frac{N}{\hbar} \sum_{mn} \frac{\Delta_{nm}^{(0)} \boldsymbol{d}_{nm} (\boldsymbol{d}_{mn} \cdot \boldsymbol{E}_0)}{\omega_{mn} - \omega - i\gamma_{mn}}.$$

Отсюда в соответствии с определением (4.1.1)

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{N}{\hbar} \sum_{mn} \frac{\Delta_{nm}^{(0)} d_{nm}^{(\alpha)} d_{mn}^{(\beta)}}{\omega_{mn} - \omega - i\gamma_{mn}}, \qquad (4.2.18)$$

где $d^{(\alpha)} \equiv d_{\alpha}$ проекция дипольного момента молекулы на ось $\alpha = x$, y, z.

Легко проверить, что полученное выражение обладает необходимой симметрией (4.1.5) и удовлетворяет принципу причинности (рис. 4.1). Заметим, что (18) можно представить в несколько ином виде:

$$\chi_{\alpha\beta} = \sum_{n} N_{n} \alpha_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega),$$

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega) \equiv \frac{1}{\hbar} \sum_{m} \left(\frac{d_{nm}^{(\alpha)} d_{mn}^{(\beta)}}{\omega_{mn} - \omega - i\gamma_{mn}} + \frac{d_{mn}^{(\alpha)} d_{nm}^{(\beta)}}{\omega_{mn} + \omega + i\gamma_{mn}} \right).$$
(4.2.19)

Здесь $\alpha^{(n)}$ имеет смысл тензора поляризуемости молекулы, находящейся в состоянии *n*. В отсутствие статического магнитного поля невозмущенные волновые функции и, следовательно, матричные элементы $d_{mn} = d_{nm}$ можно полагать вещественными (см. [25], с. 469). При этом (19) в согласии с (4.1.6) инвариантно к перестановке индексов α , β :

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(n)} = \alpha_{\beta\alpha}^{(n)} = \frac{2}{\hbar} \sum_{m} \frac{\omega_{mn} d_{mn}^{(\alpha)} d_{mn}^{(\beta)}}{\omega_{mn}^2 - (\omega + i\gamma_{mn})^2}.$$
(4.2.20)

С помощью (18) и (4.1.11) легко показать, что каждая пара уровней (m, n) дает положительный или отрицательный вклад в энергию поля в зависимости от знака $\omega_{mn}\Delta_{nm}$, т. е. для усиления поля необходима инверсия населенностей (см. также (21)).

Для газа (18) надо усреднить по случайным ориентациям и скоростям молекул. При усреднении по ориентациям недиагональные элементы тензора $d_{\alpha}d_{\beta}$ обращаются в нуль, а диагональные дадут $|d_{mn}^{(\alpha)}|^2 = |d_{mn}|^2/3$. В результате тензор восприимчивости (18) становится скаляром:

$$\chi = \frac{2N}{3\hbar} \sum_{m>n} \frac{\omega_{mn} \Delta_{nm}^{(0)} |d_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 - (\omega + i\gamma_{mn})^2} .$$
(4.2.21)

В последнем выражении учтено, что в двойной сумме каждое слагаемое с $m \neq n$ встречается дважды:

$$\sum_{mn} a_{mn} = \sum_{n} a_{nn} + \sum_{m > n} (a_{mn} + a_{nm}), \qquad (4.2.22)$$

причем в (21) диагональные слагаемые равны нулю, так как Δ_{nn}=0. °Сила осциллятора. Для сравнения (21) с классическим выражением

(13) определим следующие безразмерные величины, называемые силами осцилляторов:

1

$$f_{mn} \equiv 2m\omega_{nm} |\boldsymbol{d}_{mn}|^2 / 3\hbar e^2.$$
 (4.2.23)

Заметим, что возможно и феноменологическое определение силы осциллятора через χ" (см. [22], с. 391).

Будем нумеровать всевозможные пары состояний (*m*, *n*) одним индексом $j \equiv \{m, n\}$, причем m > n. Если пренебречь слагаемыми γ^2 в знаменателе (21) и отождествить $f_j \equiv f_{nm} \Delta_{nm}^{(0)}$, то (21) примет вид (13). Таким образом, квантовый расчет подтверждает модель Лоренца: в первом приближении по амплитуде внешнего поля вещество ведет себя как совокупность линейных осцилляторов с затуханием. Однако f_j может теперь принимать отрицательные значения, что проявляется в эффектах квантового усиления ($\chi'' < 0$) и отрицательной дисперсии ($\partial \chi' / \partial \omega < 0$ вне резонанса).

Напомним, что согласно (4.1.7) δ -импульс поля вызывает импульс поляризации, равный фурье-образу $\chi(\omega)$. В соответствии с (21) полюсы функции комплексной частоты $\chi(\tilde{\omega})$ находятся в точках $\tilde{\omega}_j = \pm \omega_j - i\gamma_j$ нижней полуплоскости, поэтому импульс поляризации будет состоять из суммы затухающих гармонических колебаний:

$$\chi(t) = \theta(t) \frac{\omega_p^2}{4\pi} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j} \exp(-\gamma_j t) \sin(\omega_j t). \qquad (4.2.24)$$

Полученное выражение определяет функцию Грина для поляризации вещества через собственные частоты и силы осцилляторов переходов.

Силы осцилляторов удовлетворяют правилам сумм. Так, в случае одноэлектронных переходов

$$\sum_{m} f_{nm} = 1.$$
 (4.2.25)

Это равенство можно получить из правила коммутации $[x, p] = i\hbar$ $(p \equiv p_x)$. Пусть $\mathcal{H}_0 = p_{\alpha}^2/2m + \mathcal{V}(r)$, тогда

$$[x, \mathcal{H}_0] = i\hbar p/m, \quad p_{mn} = im\omega_{mn} x_{mn}, \quad (4.2.26)$$

отсюда

$$\omega_{mn} |x_{mn}|^{2} = i x_{mn} p_{nm} / m = -i p_{mn} x_{nm} / m$$

$$\sum_{m} \omega_{mn} |x_{mn}|^{2} = i [p, x]_{nn} / 2m = \hbar / 2m.$$

Из последнего равенства получаем (25).

Для наиболее сильных оптических переходов атомов $|f_{mn}| \approx 1$. Например, для «резонансной» линии атомарного водорода f = 0,416(переход 1s — 2p, $\lambda = 0,12$ мкм). Отсюда по формуле (23)

$$|x_{mn}| = (\lambda_c \lambda_{mn} f_{mn}/2)^{1/2} = 10^{-8} \text{ cm},$$
 (4.2.27)

что соответствует $|d_{mn}| = 4,8 \cdot 10^{-18} \, \mathrm{CFC} = 4,8 \, \mathrm{Д}$. Здесь $\lambda_c = \hbar/mc \approx \approx 4 \cdot 10^{-11} \, \mathrm{cm}$ — комптоновская длина волны и $\lambda \equiv \lambda/2\pi$. Для разрешенных переходов между вращательными уровнями в миллиметровом диапазоне d_{mn} также имеет порядок 1Д, но при этом согласно (23) $f_{mn} \sim 10^{-5}$. Заметим, что сумма в (25) должна включать и интеграл по непрерывному спектру ионизированных состояний, например, на долю последнего в водороде при n = 1s приходится f = 0,43.

Изолированный резонанс. В области узкого одиночного резонанса можно учитывать лишь одно слагаемое в двойной сумме (21):

$$\chi = \chi_{\infty} + \frac{2\gamma\omega_0\Delta\chi}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}; \qquad (4.2.28a)$$

здесь $\Delta \chi \equiv \Delta N d^2/3\hbar \gamma = f \omega_p^2/8\pi \gamma \omega_0$ и χ_{∞} — вещественная восприимчивость, обусловленная другими резонансами. В знаменателе (28) опущено слагаемое γ^2 , которое можно, как и поправку Лоренца (11), включить в определение ω_0 . Параметр $\Delta \chi$, пропорциональный плотности активных частиц ΔN и квадрату момента перехода d^2 , определяет максимальное значение χ'' и амплитуду изменения χ' (рис. 4.2).

В оптическом диапазоне обычно *добротность резонанса* ω₀/2γ ≫ 1, поэтому в непосредственной окрестности резонанса можно использовать

простую приближенную формулу:

$$\chi \approx \chi_{\infty} - \frac{\Delta \chi}{x+i}, \qquad (4.2.286)$$

где

 $x \equiv (\omega - \omega_0)/\gamma, \quad \omega \sim \omega_0 \gg \gamma > 0,$

которая дает четную зависимость $\chi''(x)$ и нечетную $\chi'(x) - \chi_{\infty}$ (рис. 4.2). Из рис. 4.2 ясно, что эта формула даже при небольших добротностях резонанса дает хорошее приближение для χ'' и несколько худшее для χ' .



Рис. 4.2. Дисперсия восприимчивости $\chi(\omega)$ в области одиночного резонанса при добротности линии $\omega_0/2\gamma=5$ и $\chi_{\infty}=0$: сплошные линии соответствуют формуле (28а), штриховые — приближению (286), штрих-пунктирные — (28в)

Обратим внимание, что при удалении от резонанса $|\chi''|$ падает много быстрее, чем $|\chi' - \chi_{\infty}|$, поэтому в окнах прозрачности, где $\chi'' \ll 1$, показатель преломления *n* может все же заметно отличаться от единицы. На достаточном удалении от резонанса поглощение можно не учитывать и (28a) принимает вторую асимптотическую форму (рис. 4.2):

$$\chi - \chi_{\infty} \approx \frac{f \omega_{\rho}^{2} / 4\pi}{\omega_{0}^{2} - \omega^{2}} = \frac{\chi_{0} - \chi_{\infty}}{1 - \omega^{2} / \omega_{0}^{2}}, \qquad (4.2.28\text{B})$$

где χ₀ == χ(0).

При интерпретации оптических экспериментов обычно вместо χ или $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ используют более близкие к эксперименту параметры -показатели преломления и затухания:

$$n \equiv kc/\omega = \operatorname{Re} \sqrt{\tilde{\epsilon}}, \quad \varkappa \equiv \alpha c/2\omega = \operatorname{Im} \sqrt{\tilde{\epsilon}}.$$
 (4.2.29)

Величина \varkappa^{-1} имеет смысл глубины проникновения волны в вещество, выраженной в единицах $\lambda/2 \equiv c/2\omega$. На рис. 4.3 представлена дисперсия этих параметров в области одиночного резонанса согласно формулам (286, в) и (3)—(6).



Рис. 4.3. Дисперсия показателей преломления *n* и поглощения *x* в области одиночного резонанса при «амплитуде» $\Delta \varepsilon$ резонанса 1 (*a*) и 5 (*b*): сплошные линии соответствуют формулам (3), (4) и (286), штриховые — формулам (5), (6) (т. е. приближению слабого поглощения) и (286), штрих-пунктирные — формуле (28в) (т. е. приближению $\varepsilon''=0$, когда $n=\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon>0$ и $x=\sqrt{-\varepsilon}$ при $\varepsilon<0$; штриховкой отмечена запрещенная зона, где $\varepsilon'<0$

В лазерных веществах обычно $|\alpha| \ll 1$ см⁻¹, так что $|\varepsilon''/\varepsilon'| \approx \approx |\alpha|/k < 10^{-4}$ и заведомо применимы приближения (5), (6). Подставляя в них (286), находим

$$n \approx n_{\infty} \left(1 - \frac{\Delta \varepsilon}{2\varepsilon_{\infty}} \frac{x}{1+x^2} \right),$$
 (4.2.30)

$$\alpha \approx \frac{\omega \Delta \varepsilon / c n_{\infty}}{1+x^2}, \qquad (4.2.31)$$
где $n_{\infty} \equiv \varepsilon_{\infty}^{1/2} = (1 + 4\pi \chi_{\infty})^{1/2}$ — показатель преломления при $x \gg 1$ и

$$\Delta \varepsilon = 4\pi \Delta \chi = \frac{f\omega_p^2}{2\gamma\omega_0} = \frac{4\pi \Delta N d^2}{3\hbar\gamma}$$
(4.2.32)

— «амплитуда» резонанса для є. Отметим, что (31) совпадает с результатом «вероятностного» расчета (2.3.19) и что при инверсии населенностей χ' , χ'' и α меняют знаки. При этом ход дисперсии показателя преломления противоположен обычному — n падает с ростом частоты вне резонанса и растет в области поглощения. Это явление называется отрицательной дисперсией.

В конденсированном веществе узкие резонансы часто имеют большую амплитуду, $\Delta \varepsilon > 1$. Это особенно характерно для дисперсии ε в ИК-области около собственных частот колебаний решетки ионных кристаллов; соответствующие элементарные возбуждения—*квазичастицы*— называются *оптическими фононами*. Пусть, например, d = 1Д, $\Delta N = 10^{20}$ см⁻³ и $\Delta \omega \equiv 2\gamma = 1$ см⁻¹, тогда согласно (32) $\Delta \varepsilon = 4^{-1}$). Если при этом f = 1 и $\lambda_0 = 1$ мкм, то плазменная частота будет много больше $\Delta \omega$, но все же много меньше ω_0 : $\omega_p = (\omega_0 \Delta \omega \Delta \varepsilon)^{1/2} = 200$ см⁻¹.

Из однородных уравнений Максвелла следует, что возможных продольные колебания с законом дисперсии $\varepsilon(\omega, k) = 0$. Если пренебречь диссипацией и пространственной дисперсией, то эти колебания имеют фиксированную вещественную частоту ω_i и произвольный волновой вектор, т. е. нулевую групповую скорость $u = d\omega/dk$. Согласно (28в) при $f = \varepsilon_{\infty} = 1$

$$\omega_{\mathbf{g}} = \sqrt{\omega_{0}^{2} + \omega_{\rho}^{2}} \approx \omega_{0} + \omega_{\rho}^{2}/2\omega_{0} = \omega_{0} + \gamma \Delta \varepsilon. \qquad (4.2.33)$$

Следовательно, при $\Delta \epsilon \gg 1$ расщепление продольной ω_t и поперечной ω_0 частот много больше параметра затухания γ . Это же условие определяет существенность сдвига собственной частоты молекул за счет их кулоновского взаимодействия (11), так что под ω_0 в (33) следует понимать $\omega_0 - \gamma \Delta \epsilon/3$.

В интервале $\omega_0 - \omega_l$ согласно (28в) $\varepsilon < 0$ и волновое число $\tilde{k} = \omega \sqrt{\varepsilon/c}$ чисто мнимое, так что поле теряет волновой характер. Таким образом, в этом интервале имеет место «запрещенная зона», в которой модуль френелевского коэффициента отражения $R = (\sqrt{\varepsilon} - 1) f$ ($\sqrt{\varepsilon} + 1$) обращается в единицу и диэлектрик ведет себя как металл. Отметим, что металл при $\omega \gg \omega_p$, наоборот, подобен диэлектрику.

Поляритоны. В случае слабого затухания допустимо квантовое рассмотрение макрополя в среде (§ 7.4). При этом возникает понятие фотона в среде или поляритона (не путать с поляроном — свободным электроном в диэлектрике при учете поляризации им окружающего вещества). Поляритон (иногда используется термин светоэкситон) — это элементарное возбуждение макрополя и связанных с ним молекул

Здесь опущен множитель 2πс, связывающий ω и частоту в обратных сантиметрах.

с энергией $\hbar\omega$, которое распространяется со скоростью $u=d\omega/dk$. При приближении $\omega \kappa \omega_0$ все большая доля энергии поляритона приходится на внутреннюю энергию молекул.

При падении фотона из вакуума на среду он с вероятностью $1-|R|^2$ превращается в поляритон, который, пройдя в среднем расстояние α^{-1} , поглощается. Импульсы фотона в среде $\hbar k$ отличаются в n раз от импульса $\hbar \omega/c$ вакуумного фотона с той же энергией.

Поляритоны возбуждаются также за счет тепловой энергии, при этом их среднее число на моду равно функции Планка $\mathscr{N}(\omega)$. Согласно ФДТ (§ 7.7) ωk -спектр равновесных флуктуаций поля в среде пропорционален $\mathscr{N}(\omega) G''(\omega, k)$, где G — функция Грина для макроскопических уравнений Максвелла (§ 4.1).



Рис. 4.4. Зависимость спектральной плотности равновесного поля $\langle E^2_{\alpha} \rangle_{\omega k}$, деленной на $\hbar N'/2\pi^3$, от частоты и волнового вектора в окрестности резонанса дилектрической проницаемости при $\omega_0/\gamma=20$ и $\Delta\epsilon=5$: сплошные линии — поперечные относительно k флуктуации, штриховые — продольные; из рисунка ясно, что частотный спектр тепловых флуктуаций поля описывается законом дисперсии (штрих-пунктир) без аномального участка

Выше говорилось о законе дисперсии, т. е. связи между частотой и длиной волны, для свободных волн, создаваемых удаленным источником. Возможны и другие определения функций $n(\omega)$ или $\omega(k)$, например, по максимуму мнимой части функции Грина $G''(\omega, k)$. Соответствующий закон дисперсии проявляется в экспериментах по рассеянию света на поляритонах (§ 6.5).

Подставим $\varepsilon(\omega)$ в однополюсной аппроксимации (286) в (4.1.20), (4.1.21), тогда при $\omega > 0$

$$G_x = \frac{4\pi}{y + \Delta\varepsilon/(x+i)}, \qquad (4.2.34)$$

$$G_{z} = \frac{4\pi}{-\varepsilon_{\infty} + \Delta\varepsilon/(x+i)}, \qquad (4.2.35)$$

$$x \equiv (\omega - \omega_0)/\gamma, \quad y \equiv (ck/\omega)^2 - \varepsilon_{\infty}.$$

Отсюда спектры поперечных и продольных флуктуаций поля описываются функциями (рис. 4.4)

$$G_x'' = \frac{4\pi\Delta\varepsilon}{(\Delta\varepsilon + xy)^2 + y^2}, \qquad (4.2.36)$$

$$G_{\mathbf{z}}'' = \frac{4\pi\Delta\varepsilon}{(\Delta\varepsilon - x\varepsilon_{\infty})^2 + \varepsilon_{\infty}^2}.$$
 (4.2.37)

Если пренебречь зависимостью параметра *y* от ω, то спектры флуктуаций при фиксированном *k* имеют лоренцеву форму с центральными частотами, определяемыми уравнениями

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\omega}) = (ck/\omega)^2, \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\omega}_l) = 0,$$
(4.2.38)

где функция $\tilde{\epsilon}(\omega)$ совпадает с (28б) при условии $\gamma = 0$:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\infty} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} / \boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{\varepsilon}_{\infty} + f \omega_p^2 / (\omega_0^2 - \omega^2).$$
(4.2.39)

Таким образом, закон дисперсии для равновесных флуктуаций поля (38) отличается от закона дисперсии для свободных волн (3) $ck/\omega = \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ отсутствием параметра затухания γ .

Закон дисперсии (38) соответствует условию $\partial G''/\partial x = 0$. В то же время условие максимума G''_x при фиксированной частоте $\partial G''_x/\partial y = 0$ приводит согласно (36) к знакомому закону дисперсии (5) Re $\varepsilon(\omega) = = (ck/\omega)^2$. Отсюда следует, что наблюдаемый в области резонанса закон дисперсии зависит от условия эксперимента.

Дисперсионные свойства среды при качественном рассмотрении удобно представлять графически в виде связи между ω и k вместо зависимостей между ε или n и ω . На рис. 4.5 показана такая связь в различных приближениях и приведены часто используемые названия соответствующих квазичастиц.

При пренебрежении связью поперечного поля с колебаниями зарядов, что допустимо при $k \gg \omega_0/c$, элементарное возбуждение, т. е. квант энергии вещества, называют экситоном или оптическим фононом, если речь идет о полярных колебаниях ионов в решетке кристалла. Экситоны аналогично фотонам, в зависимости от описывающего их волнового пакета, могут быть или локализованными в некоторой области кристалла, или распределенными во всем пространстве. В приближении $\Delta \varepsilon = 0$ дисперсионные кривые фотонов и экситонов пересекаются без взаимодействия и экситоны падающим полем не возбуждаются.

При малых $\Delta \varepsilon$ и пренебрежении диссипацией имеет место «антипересечение» или «отталкивание» дисперсионных кривых, которые принимают в области взаимодействия вид пары гипербол с небольшим зазором (рис. 4.5, *a*).

При $\Delta \epsilon \gg 1$ колебания зарядов и поля сильно влияют друг на друга и дисперсионная картина существенно меняется — появляются продольная ветвь и запрещенная зона, при приближении к которой $u \rightarrow 0$

75

где

(рис. 4, 5, θ). Электромагнитная волна сопровождается синфазной ($\omega < \omega_0$) или противофазной ($\omega > \omega_0$) волной поляризации, вклад которой в общую плотность энергии составляет заметную долю. Подчеркнем



Рис. 4.5. Дисперсия в различных приближениях: цифрам соответствуют следующие названия квазичастиц: 1 — фотон; 2 — механический экситон, или оптический фонон; 3 — кулоновский экситон (продольный и поперечный); 4 — поляритон (светоэкситон); 5 — «новые» волны; a) сила осциллятора или плотность частиц малы, дисперсионные ветви «антипересекаются» с небольшим зазором; б) учет кулоновского взаимодействия молекул снимает вырождение между частотами продольных и поперечных экситонов; в) учет взаимодействия молекул и поперечного поля приводит к поляритонным эффектам — к появлению запрещенной зоны (заштрихованная область), к дисперсии фазовой скорости ω/k поляритона вне зоны и к обращению его групповой скорости и в нуль на обоих границах зоны; г) учет диссипации приводит к размытию закона дисперсии, к конечным временам жизни τ и длине пробега 1/α= *ит* для поляритонов; при этом возбуждаемые извне волны испытывают аномальную дисперсию (штриховая линия); ∂ , e) — учет анизотропии вещества приводит к зависимости частот экситонов и поляритонов от направления волнового вектора k/k. На рисунке представлена частотная и угловая дисперсия k (w, d) для необыкновенной волны в одноосном кристалле в случаях слабой (d) и сильной (e) анизотропии; 🕅 угол между волновым вектором и осью z кристалла, ω_0^z и ω_l^z — частоты, на которых ε_{zz} равно соответственно ∞ и 0, ω_0^x и ω_l^x — то же для $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{uu}$

еще раз, что продольные колебания в приближении u=0 не распространяются, т. е. это волны с фиксированной частотой ω_l и произвольной длиной волны.

Конечно, рассмотренные нами простейшие модели лишь качественно описывают дисперсию поля в реальных средах. Для описания эф-

фектов пространственной дисперсии надо учитывать зависимость параметров $\Delta \epsilon$ и ω_0 от k [2, 22]. Для учета доплеровского уширения следует проинтегрировать (28) по распределению Максвелла для ω_0 в случае газов и по распределению Ферми — Дирака — в случае межзонных переходов в конденсированных средах. Переходы между узкими экситонными зонами в полупроводниках и молекулярных кристаллах описываются дисперсионными функциями (28) с зависящими от ω и k параметрами $\Delta \epsilon$, ω_0 и k. Вычисление этих параметров представляет интересную задачу теории твердого тела.

Отметим в заключение, что вместо є иногда проще вычислять непосредственно функцию Грина G или связанную с ней формулой Кубо (§ 7.7) спектральную плотность равновесных флуктуаций [48].

§ 4.3. Двухуровневая модель и эффект насыщения

Найденная выше восприимчивость χ определяет отклик вещества на переменное поле лишь в первом приближении теории возмущения. При этом не учитывается эффект насыщения населенностей и другие нелинейные по полю явления. Нелинейные эффекты наиболее сильно проявляются в резонансных условиях — когда частоты поля близки к собственным частотам вещества.

Область применения модели. В настоящем разделе будет рассмотрена модель двухуровневой системы, которая широко используется в квантовой электронике и спектроскопии. Эта модель основана на предположении, что поле квазимонохроматично и имеется резонанс $\omega \sim \omega_{21} \equiv \omega_0$ лишь для одной пары невырожденных уровней молекулы. Характерный пример такой ситуации встречается в магнитном резонансе — ядерном (ЯМР) или электронном (ЭПР). Если молекула имеет один неспаренный электрон или спин ядра I=1/2, то при наложении постоянного магнитного поля H_0 все уровни расщепляются на два зеемановских подуровня с частотой перехода $\omega_0 = \gamma H_0$, где γ — гиромагнитное отношение. Обычно ω_0 лежит в радиодиапазоне и резко отличается от других частот молекулы.

Как правило, однако, гамильтониан в отсутствие постоянного магнитного поля инвариантен по отношению к некоторым операциям симметрии, например к вращениям, и поэтому все энергетические уровни вырождены. Тем не менее и в этом случае двухуровневая модель дает качественно правильное описание.

Следует отметить, что встречаются ситуации, когда двухуровневое приближение вообще неприменимо — например, в случае ЯМР при I>1/2 или для описания переходов между колебательными уровнями молекул со слабым ангармонизмом. В последнем случае молекула ведет себя как осциллятор с почти эквидистантным набором уровней, так что резонанс имеет место одновременно для многих пар уровней.

Кинетические уравнения. Двухуровневая система описывается уравнениями для матрицы плотности (3.3.6) при m, n = 1, 2 с феноменологическими временами релаксации w_{mn} и $\gamma_{21} \equiv 1/T_2$ (см. (3.3.10)).

Пусть $\mathscr{V}_{nn} = 0$, тогда

$$\dot{\rho}_{21} = -(i\omega_0 + 1/T_2)\rho_{21} - i(\rho_{11} - \rho_{22}) \mathscr{P}_{21}/\hbar, \qquad (4.3.1)$$

$$\rho_{11} = w_{12}\rho_{22} - w_{21}\rho_{11} + i \left(\mathcal{P}_{21}\rho_{12} - \rho_{21} \mathcal{P}_{12} \right) / \hbar.$$
(4.3.2)

В случае двух уровней $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$, так что $\dot{\rho}_{11} = -\dot{\rho}_{22}$. Введем обозначения

$$\rho_{11} - \rho_{22} \equiv \Delta, \quad w_{12} + w_{21} \equiv 1/T_1.$$
 (4.3.3)

При выключенном возмущении ($\mathcal{V} = 0$) населенности должны принимать равновесные значения $\rho_{nn}^{(0)}$, поэтому скорости релаксации w_{12} и w_{21} связаны условием (3.3.19), из которого следует

$$(w_{12} - w_{21})/(w_{12} + w_{21}) = \Delta^{(0)}. \tag{4.3.4}$$

Уравнение (2) при учете (3) и (4) принимает вид

$$\dot{\Delta} = (\Delta^{(0)} - \Delta)/T_1 + 4 \operatorname{Im}(\rho_{21} \mathscr{P}_{12})/\hbar.$$
(4.3.5)

Пусть поле квазимонохроматично и имеет среднюю частоту $\omega > 0$, близкую к ω_0 :

$$E(t) = (1/2) E_0(t) \exp(-i\omega t) + \kappa. c., \qquad (4.3.6)$$

где $E_0(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда поля. Тогда в дипольном и резонансном приближениях в (1) можно полагать

$$\mathcal{W}_{21} \approx -(1/2) d_{21} \cdot E_0(t) \exp(-i\omega t) \equiv -(1/2) \hbar \Omega \exp(-i\omega t + i\varphi).(4.3.7)$$

Здесь опущено нерезонансное отрицательно-частотное слагаемое, пропорциональное $e^{i\omega t \ 1}$, введены частота Раби $\Omega \equiv |d_{21} \cdot E_0|/\hbar$ и фаза взаимодействия $\varphi(t)$. В случае линейной поляризации поля и вещественных волновых функций φ является просто фазой волны. Определим также медленно меняющуюся «огибающую» недиагонального элемента матрицы плотности:

$$\rho_{21}(t) = \rho_0(t) \exp(-i\omega t). \tag{4.3.8}$$

В результате кинетические уравнения для двухуровневой системы принимают вид

$$\dot{\rho}_{0} = \left[i\left(\omega - \omega_{0}\right) - 1/T_{2}\right]\rho_{0} + i\Omega\Delta e^{i\phi}/2, \qquad (4.3.9)$$

$$\dot{\Delta} = (\Delta^{(0)} - \Delta) / T_1 - 2\Omega \, \mathrm{Im} \, (\rho_0 e^{-i\varphi}). \tag{4.3.10}$$

Эта система из трех уравнений для трех вещественных функций $\rho'_0(t)$, $\rho''_0(t)$ и $\Delta(t)$ определяет эволюцию состояния двухуровневой системы под действием термостата и внешнего поля. Согласно (9) действие поля на ρ_0 пропорционально разности населенностей Δ , которая в свою очередь связана согласно (10) с полем через ρ_0 . Эта взаимосвязь и опреде-

Мы пренебрегаем также высшими гармониками матрицы плотности, осциллирующими с частотами пω и имеющими порядок (Ω/ω)ⁿ.

ляет нелинейность отклика двухуровневой системы, которая в стационарных условиях проявляется в эффекте насыщения — стремлении Δ к нулю при условии $\Omega^2 \gg 1/T_1 T_2$; нестационарные проявления ангармонизма двухуровневой системы будут рассмотрены в гл. 5.

Эффект насыщения. Рассмотрим далее установившийся отклик двухуровневой системы в случае монохроматического поля, когда Ω , ρ_0 , ϕ и Δ постоянны. Из (9) при этом следует (ср. (4.2.17))

$$\rho_0 = \frac{\Omega \Delta/2}{\omega_0 - \omega - i/T_2} e^{i\varphi}. \tag{4.3.11}$$

Подстановка этого выражения в (10) позволяет определить стационарную разность населенностей:

$$\Delta = \Delta^{(0)} / (1 + 2T_1 W), \qquad (4.3.12)$$

где

$$W = \frac{\Omega^2 T_2/2}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2} \,. \tag{4.3.13}$$

Эти формулы описывают эффект насыщения — уменьшение разности населенностей под действием сильного резонансного поля. Отметим, что (13) совпадает со скоростью перехода, найденной в § 2.2 для случая лоренцевой формы линии с ненасыщенной шириной $\Delta \omega_0 = -2/T_2$. Второе слагаемое в знаменателе (12) называется фактором насыщения:

$$s = 2WT_1 = 2W/(w_{12} + w_{21}).$$
 (4.3.14)

Из (14) ясно, что эффект насыщения определяется конкуренцией скоростей переходов под действием шумового поля термостата ($w_{12} + +w_{21}$)/2 и монохроматического внешнего поля W.

Эффект насыщения согласно (13) наиболее сильно проявляется при точном резонансе, когда фактор насыщения принимает максимальное значение:

$$s_0 = \Omega^2 T_1 T_2 = 2\sigma_0 F T_1 \equiv F/F_{\rm H}. \tag{4.3.15}$$

Здесь введены сечение перехода $\sigma = W/F$, плотность потока фотонов F и плотность потока фотонов F_{μ} , вызывающая уменьшение разности населенностей вдвое:

$$F_{\mathbf{s}} = 1/2\sigma_{0}T_{1} = \hbar c/8\pi\omega_{0} | \boldsymbol{d}_{12}^{(e)} |^{2}T_{1}T_{2}.$$
(4.3.16)

Итак, разность населенностей под действием резонансного поля уменьшается по закону

$$\Delta = \frac{\Delta^{(0)}}{1 + F/F_{\rm H}} \quad . \tag{4.3.17}$$

[°]Форма линии при насыщении. Подстановка (12) и (13) в (11) дает значение ρ₀ с учетом эффекта насыщения населенностей. Дипольный момент двухуровневой системы равен (полагаем, что молекула

неполярна, $d_{nn} \equiv 0$)

$$\langle \boldsymbol{d}(t) \rangle = \boldsymbol{d}_{12} \rho_{21} + \kappa. c.,$$
 (4.3.18)

так что восприимчивость вещества, состоящего из N двухуровневых молекул, принимает вид (ср. (4.2.18))

$$\chi_{\alpha\beta}(E_0) = N d_{12}^{(\alpha)} d_{21}^{(\beta)} \Delta / \hbar (\omega_0 - \omega - i/T_2) = \\ = \hbar^{-1} \Delta^{(0)} N d_{12}^{(\alpha)} d_{21}^{(\beta)} \frac{\omega_0 - \omega + i/T_2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (1 + s_0)/T_2^2}.$$
(4.3.19)

Напомним, что здесь частоты ω и ω_0 положительны, значения χ для $\omega < 0$ определяются формулой (19) при замене ω , *i* на — ω , —*i*. Отметим, что из (19) при $s_0 \neq 0$ следует, что восприимчивость $\chi(\omega, E_0)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного $\omega = \omega' + i\omega''$, имеет полюсы как в верхней, так и в нижней полуплоскостях:

$$\omega = \pm \omega_0 \pm i (1 + s_0)^{1/2} / T_2.$$

В результате функция $\chi(\omega, E_0)$ не удовлетворяет соотношениям Крамерса — Кронига (4.1.8) при $E_0 \neq 0$.

Найдем с помощью (19) и (4.1.11) поглощаемую или при $\Delta^{(0)} < 0$ излучаемую мощность:

$$\mathcal{P} = \hbar \omega \Delta^{(0)} N W_0 / [1 + s_0 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2] \equiv \mathcal{P}_{\max} s_0 / [1 + s_0 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2],$$
(4.3.20)

где $W_0 = |d_{21} \cdot E_0/\hbar|^2 T_2/2$ - скорость вынужденного перехода при

P/Pmax





F.I.r.

точном резонансе. Из этого выражения следует, что спектральная линия при насыщении сохраняет лоренцеву форму вида $1/(1 + x^2)$, однако ее ширина увеличивается в $\sqrt{1 + s_0}$ раз (рис. 4.6):

$$\Delta \omega = 2 \sqrt{1 + s_0} / T_2. \quad (4.3.21)$$

Этот эффект называется уширением излучением или полевым уширением.

Пусть $s_0 \gg 1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2$ (смльное насыщение), тогда из (20) следует

$$\mathcal{P} = \hbar \omega \Delta^{(0)} N / 2T_1 \equiv \mathcal{P}_{\text{max}}.$$
(4.3.22)

Таким образом, при сильном насыщении поглощаемая веществом мощность перестает зависеть от интенсивности и частоты поля и

here that

C-WY IF12

определяется лишь скоростью передачи энергии от молекул термостату. Действительная часть восприимчивости при сильном насыщении согласно (19) линейно зависит от частоты:

$$\chi' \sim (\omega_0 - \omega)/s_0. \tag{4.3.23}$$

Сделаем численную оценку. Пусть интенсивность волны $I = 1 \text{ Вт/см}^2$ и $\lambda = 1 \text{ мкм}$; при этом $\hbar\omega = 2 \cdot 10^{-12}$ эрг, $F = 5 \cdot 10^{18} \text{ фотон/(с \cdot см}^2)$ и $E_0 = \sqrt{8\pi I/c} = 0,1 \text{ Гс} = 30 \text{ В/см}$. Если $d_{12} = 1 \text{ Д}$, то $\Omega = 10^8 \text{ c}^{-1}$, так что $s_0 = 1 \text{ при } T_1 = T_2 = 10^{-8} \text{ c}$. Скорость перехода $W = 5 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ и

если $\Delta^{(0)}N = 10^{19}$ см⁻³ (примесный кристалл или газ при атмосферном давлении), то из (20) следует $\mathcal{P} = 50$ МВт/см³. Эта оценка показывает, что в оптическом диапазоне эффект насыщения сопровождается очень сильным нагревом вещества. С другой стороны, при электронном парамагнитном резонансе в диапазоне $\lambda = 1$ см и при $T_1 = 10^{-3}$ с из (22) следует $\mathcal{P} =$ = 0,1 Вт/см³, так что возможен стационарный режим насыщения, что и используется в парамагнитных усилителях.

Эффект насыщения имеет большое значение в квантовой электронике. Он используется для инверсии населенностей с помощью вспомога-



Рис. 4.7. Провал Беннета. Эффект насыщения при неоднородном уширении линии из-за эффекта Доплера затрагивает лишь часть молекул, имеющих подходящие проекции скорости $v_z(\omega) =$ $= (\omega_0 - \omega)/k$ на направление распространения волны k; $\Delta N(v_z)$ —распределение числа активных частиц по скоростям

тельного излучения (накачки) в лазерах на примесных конденсированных веществах и в парамагнитных усилителях, а также для получения коротких мощных импульсов света методами модуляции добротности и синхронизации мод. Эффект насыщения стабилизирует амплитуду квантовых генераторов и ограничивает сверху динамический диапазон квантовых усилителей.

В случае неоднородного уширения, например из-за эффекта Доплера, насыщается не вся линия, а лишь ее часть с шириной порядка столкновительной или естественной ширины. Этот эффект, приводящий к провалу Беннета в распределении молекул по скоростям (рис. 4.7), используют для стабилизации частоты лазеров и в методе спектроскопии насыщения (§ 6.4).

§ 4.4°. Уравнения Блоха

Кинетические уравнения для средних. В предыдущем разделе мы сначала решали кинетические уравнения для матрицы плотности, а потом с помощью найденного решения $\rho(t)$ находили по формуле $\langle f(t) \rangle = = \operatorname{Sp} \{f\rho(t)\}$ интересующее нас среднее (наблюдаемое) значение. Естественно сразу исключить ρ и попытаться найти кинетические уравнения, которым удовлетворяют сами наблюдаемые. Такие уравнения

можно вывести из уравнений для ρ, однако здесь они будут получены другим способом.

В случае замкнутой системы уравнения для наблюдаемых можно установить усреднением уравнения Гейзенберга (полагаем, что *f* не зависит от времени явно)

$$i\hbar df/dt = [f(t), \mathcal{H}(t)],$$
 (4.4.1)

определяющего временную зависимость операторов в представлении Гейзенберга. Это усреднение производят по начальной матрице плотности, которую обычно полагают равновесной:

$$i\hbar d \langle f \rangle / dt = \operatorname{Sp} \{ [f(t), \mathcal{H}(t)] \rho(t_0) \}.$$
(4.4.2)

В случае многочастичных систем производная $d\langle f \rangle/dt$ зависит, как правило, не только от самой средней величины $\langle f(t) \rangle$, но и от вторых моментов или функций корреляции $\langle f(t) g(t') \rangle$. Можно выписать уравнение Гейзенберга для вторых моментов, но они после усреднения будут содержать третьи моменты и т. д. Чтобы «расцепить» эту бесконечную цепочку уравнений для моментов, необходимо на каком-то этапе пренебречь корреляцией некоторых величин: $\langle fg \rangle \approx \langle f \rangle \langle g \rangle$.

В результате после исключения «лишних» переменных удается получить сравнительно простые кинетические уравнения для наблюдаемых одной частицы, в которых взаимодействие с другими частицами или с термостатом учитывается с помощью небольшого числа феноменологических параметров типа времен релаксации T_1 , T_2 для двухуровневой частицы или кинетических коэффициентов переноса. Примечательно, что кинетические коэффициенты для первых моментов согласно ФДТ (§ 7.7) несут информацию о равновесных вторых моментах, т. е. флуктуациях.

Конечно, подходы, основанные на уравнениях для матрицы плотности и на уравнениях для средних величин, эквивалентны и должны давать одинаковые результаты. Заметим, что в классической статистической физике также используют два основных метода описания кинетики: с помощью уравнений для функции распределения (уравнения Лиувилля, Больцмана, Фоккера — Планка) и для моментов (уравнения диффузии, переноса).

Макроскопические уравнения Максвелла являются, по существу, кинетическими для первых моментов поля $\langle E \rangle$, $\langle H \rangle$ с феноменологической функцией $\varepsilon(\omega)$. Время релаксации монохроматического поля т равно, очевидно, отношению плотности энергии $\mathscr{E} = \varepsilon' |E_0|^2/8\pi$ к мощности потерь $\mathscr{E} = \omega \varepsilon'' |E_0|^2/8\pi$, т. е. $\tau = \varepsilon'/\omega \varepsilon''$.

Этот же результат получается, если приравнять τ длине поглощения $1/\alpha$, деленной на скорость волны c/n.

Ниже мы рассмотрим уравнения для наблюдаемых двухуровневой системы в двух характерных случаях — при электродипольном и магнитодипольном взаимодействиях, когда энергия взаимодействия с полем равна соответственно — $d \cdot E$ и — $\mu \cdot H$. В последнем случае наблюдаемой величиной является магнитный момент частицы $\langle \mu \rangle$ или намагниченность $M = N \langle \mu \rangle$, и кинетические уравнения для этих величин называются *уравнениями Блоха*. При электродипольном

взаимодействии кинетические уравнения для $\langle d \rangle$ и разности населенностей Δ , т. е. энергии в единицах $\hbar\omega_0$, аналогичны уравнениям Блоха—их называют оптическими уравнениями Блоха.

Матрицы Паули и разложение операторов. При описании двухуровневых квантовых систем удобно использовать двумерные *матрицы Паули*, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathbf{y}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathbf{z}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Эти матрицы $\sigma_{\alpha mn} \equiv \langle m | \sigma_{\alpha} | n \rangle$ представляют некоторые операторы σ_{α} с собственными значениями $\lambda = \pm 1$ (напомним, что собственными значениями матрицы f_{mn} называют корни характеристического уравнения det $\{f_{mn} - \lambda \delta_{mn}\} = 0$). Матричное представление (3) является собственным для оператора σ_z . Из (3) и правил умножения матриц находим таблицу умножения операторов Паули:

$$\sigma_{x}\sigma_{y} = -\sigma_{y}\sigma_{x} = i\sigma_{x},$$

$$\sigma_{x}\sigma_{y} = -\sigma_{z}\sigma_{y} = i\sigma_{x},$$

$$\sigma_{z}\sigma_{x} = -\sigma_{x}\sigma_{z} = i\sigma_{y}.$$
(4.4.4)

Таким образом, матрицы Паули антикоммутируют между собой ($\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} + \sigma_{\beta}\sigma_{\alpha} = 2\delta_{\alpha\beta}$) и их перестановочные соотношения совпадают с таковыми для декартовых компонент момента импульса *s*.

Удобно ввести также следующие элементарные матрицы, называемые диадами (или внешними произведениями векторов):

$$\begin{array}{cccc} & (1) & = & |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^{(+)} \equiv & |1\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 0 \\ & (1)$$

В общем случае из двух произвольных векторов |*a*> и |*b*> можно составить оператор-диаду, матричные элементы которого равны произведениям соответствующих компонент векторов:

$$\sigma^{(ab)} \equiv |a\rangle \langle b|, \quad \sigma^{(ab)}_{mn} = \langle m |a\rangle \langle b |n\rangle.$$

Симметричная диада $\sigma^{(n)} \equiv |n\rangle \langle n|$ называется проекционной, так как при действии на какой-либо вектор она выделяет его проекцию на направление $|n\rangle$:

$$\sigma^{(n)} | a \rangle = | n \rangle \langle n | a \rangle = \text{const} | n \rangle,$$

обычно здесь $|n\rangle$ — единичный вектор: $\langle n | n \rangle = 1$. Отметим, что сред нее значение диады $\sigma^{(mn)}$ совпадает с соответствующим элементом транспонированной матрицы плотности:

$$\langle \sigma^{(mn)} \rangle = \operatorname{Sp} \{ \rho \mid m \rangle \langle n \mid \} = \sum_{k \mid l} \rho_{kl} \langle l \mid m \rangle \langle n \mid k \rangle = \rho_{nm}.$$

Связи операторов Паули и введенных выше диад имеют вид

$$\begin{aligned} 2\sigma^{(1)} &= I + \sigma_z, \quad 2\sigma^{(2)} = I - \sigma_z, \quad 2\sigma^{(\pm)} = \sigma_x \pm i\sigma_y, \\ \sigma_x &= \sigma^{(+)} + \sigma^{(-)}, \quad \sigma_y = i(\sigma^{(-)} - \sigma^{(+)}), \quad \sigma_z = \sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}, \\ I &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}. \end{aligned}$$

Легко найти таблицу умножения и коммутаторы диад, например:

$$\begin{split} \sigma^{(1) \ 2} &= \sigma^{(1)}, \quad \sigma^{(\pm) \ 2} = 0, \quad \sigma^{(+)} \sigma^{(-)} = \sigma^{(1)}, \\ \sigma^{(-)} \sigma^{(+)} &= \sigma^{(2)}, \quad [\sigma^{(+)}, \quad \sigma^{(-)}] = \sigma_z, \quad [\sigma^{(\pm)}, \quad \sigma_z] = \mp 2\sigma^{(\pm)}. \end{split}$$

Заметим, что $\sigma^{(\pm)}$ — неэрмитовы операторы: $(\sigma^{(\pm)})^+ = \sigma^{(\mp)}$. Эти операторы можно назвать операторами рождения и уничтожения кванта энергии. Действительно, пусть $|2\rangle$ — волновая функция основного состояния системы; под действием оператора $\sigma^{(+)}$ она превращается в волновую функцию возбужденного состояния: $\sigma^{(+)}|2\rangle = |1\rangle$. Аналогично $\sigma^{(-)}|1\rangle = |2\rangle$.

Легко убедиться, что любой эрмитов оператор, действующий в гильбертовом пространстве двухуровневой системы, можно представить в виде суммы (операторы в некоторых случаях отмечаем знаком ^)

$$\hat{f} = a\hat{I} + b\hat{\sigma}_{x} + c\hat{\sigma}_{y} + d\hat{\sigma}_{z}, \qquad (4.4.5)$$

где a, b, c, d — вещественные числа. Действительно, объединяя (3) и (5), находим связи, определяющие коэффициенты разложения (5) через матричные элементы f_{mn} :

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix}.$$
(4.4.6)

Напомним, что в квантовой механике, как и в векторном анализе, имеются три типа величин: обычные комплексные *числа* (с-числа, скаляры), комплексные *векторы* (волновые функции дискретного или непрерывного аргумента), задаваемые *n* числами, и *операторы* (матрицы, тензоры), преобразующие векторы друг в друга и задаваемые n^2 числами, где *n* — размерность векторного пространства, равная числу состояний системы. Из оператора по известным правилам можно найти соответствующие ему скаляры (собственные числа, шпур), которые являются инвариантами по отношению к смене представления, т. е. к повороту базисных векторов. Вектор Паули $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ и пропорциональный ему момент импульса \hat{s} являются одновременно векторами в реальном трехмерном пространстве и операторами в абстрактном *пространстве состояний* с двумя комплексными измерениями $|1\rangle$, $|2\rangle$.

Заметим, что коэффициенты в разложении (5) произвольного оператора 7 по матрицам Паули имеют непосредственный физический смысл — они определяют два разрешенных значения, которые принимает наблюдаемая f при отдельных измерениях. Составив уравнение для собственных значений матрицы (6), можно убедиться, что спектр $f_{nn} \equiv f_n$ состоит из следующих двух чисел:

$$f_{1,\bar{2}} = a \pm (b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}. \tag{4.4.7}$$

Пусть базисными векторами для представления (3) являются энергетические состояния системы, тогда оператор $\hat{\mathcal{H}}_0$ диагонален и при $f = \hat{\mathcal{H}}_0$ из (6) следует a = b = c = 0, $d = -\hbar\omega_0/2$. Таким образом, гамильтониан системы пропорционален оператору $\hat{\sigma}_c$:

$$\hat{\mathcal{H}}_{0} = -\hbar\omega_{0}\hat{\sigma}_{z}/2, \qquad (4.4.8)$$

где $\hbar \omega_0 = \mathcal{H}_{022} - \mathcal{H}_{011}$. Относительная разность населенностей при этом равна среднему от $\hat{\sigma}_z$:

$$\langle \sigma_z \rangle = \rho_{11} - \rho_{22} \equiv \Delta. \tag{4.4.9}$$

Пусть собственные функции $|m\rangle$ оператора $\hat{\mathcal{H}}_0$ и, следовательно, матричные элементы электродипольного момента d_{mn} вещественны: $d_{12} = d_{21} \equiv d_0$. Предположим также, что диагональные элементы отсутствуют (неполярная молекула, $d_{nn} = 0$), тогда оператор $\hat{d} = -\hat{er}$ выражается через $\hat{\sigma}_x$:

$$\hat{d} = d_0 \hat{\sigma}_x, \quad \langle \qquad \langle \simeq \rangle$$
 (4.4.10)

а энергия возмущения принимает вид

$$\hat{\mathscr{V}} = -(\boldsymbol{d}_0 \cdot \boldsymbol{E}) \,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x. \tag{4.4.11}$$

Вектор и сфера Блоха. Определим вектор Блоха **R** (его называют также *псевдоспином*) как среднее от вектора Паули **б**. С помощью (3) **R** можно выразить также через матрицу плотности:

$$\boldsymbol{R} \equiv \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \{ 2\rho'_{21}, \ 2\rho''_{21}, \ \Delta \}. \tag{4.4.12}$$

Таким образом, вектор R, как и матрица плотности ρ_{mn} , полностью определяет состояние системы. Иначе говоря, произвольное состояние двухуровневой системы задается тремя действительными числами, которым для наглядности можно поставить в соответствие точку или радиус-вектор в некотором трехмерном пространстве. В случае частицы со спином 1/2 этот вектор параллелен среднему моменту импульса, в случае же электродипольной двухуровневой системы R он не соответствует какому-либо наблюдаемому вектору, но его x- и z-компоненты согласно (8) и (10) имеют непосредственный физический смысл.

Определим длину вектора *R*. Согласно (12) и (3.1.18)

$$R^{2} = (\rho_{11} - \rho_{22})^{2} + 4 |\rho_{21}|^{2} \leq 1. \quad \text{Some } k_{m} k_{n} \quad (4.4.13)$$

В случае чистого состояния по определению (3.1.4) $|\rho_{21}|^2 = \rho_{11}\rho_{22}$ и R—единичный вектор. Итак, произвольное чистое состояние системы можно изобразить точкой на поверхности сферы, называемой сферой Блоха. Если же состояние смешанное, то (см. (3.1.18)) $|\rho_{21}|^2 < \rho_{22}\rho_{11}$ и R < 1.

В ходе временной эволюции изображающая точка (вектор R(t)) описывает какую-то траекторию внутри единичной сферы. Эту траекторию при произвольном возмущении $\mathscr{V}(t)$ (11) можно найти с помощью уравнения Гейзенберга (1) для σ_{α} и правил коммута-

ции (4). При
$$\mathcal{V} = 0$$
 из (3.3.8) сразу следует

$$R_x = R_{x0} \cos \omega_0 t + R_{y0} \sin \omega_0 t,$$

$$R_y = -R_{x0} \sin \omega_0 t + R_{y0} \cos \omega_0 t,$$

$$R_z = R_{z0}.$$
(4.4.14)

Таким образом, в случае замкнутой системы конец вектора *R* описывает круги вокруг оси *z* аналогично прецессионному движению



Рис. 4.8. Геометрическое представление состояния двухуровневой системы с помощью вектора Блоха R, компоненты которого определяют дипольный момент $\langle d \rangle = d_0 R_x$ и разность населенностей $\Delta = R_z$. Ось z направлена вниз, чтобы точки, изображающие возбужденные состояния системы, были на рисунке выше точки, изображающей основное состояние; при свободной эволюции системы R прецессирует с частотой ω₀, при этом угол прецессии в определяется начальными условиями

волчка вокруг направления силы тяжести (рис. 4.8). При этом согласно (8) и (10) энергия постоянна, а дипольный момент осциллирует с частотой перехода. В частности, в чистом когерентном состоянии, когда $c_n = \exp(i\varphi_n)/\sqrt{2}$, из (3.1.4) следует

$$R_{x} = \cos(\omega_{0}t + \varphi_{1} - \varphi_{2}),$$

$$R_{y} = -\sin(\omega_{0}t + \varphi_{1} - \varphi_{2}), \quad (4.4.15)$$

$$R_{z} = 0, \quad (4.4.15)$$

т. е. изображающая точка движется по «экватору» единичной сферы и угол прецессии $\vartheta \equiv \arctan(R_\perp/R_z) = \pi/2$. В энергетическом состоянии точка поконтся на одном из полюсов ($c_n = 0$ или 1, $\vartheta = 0$ или π). Под действием слабого резонансного возмущения к прецессии добавляется медленное изменение угла прецессии с частотой Раби — так называемая нутация (§ 5.1).

Высшие моменты и распределения. Напомним, что матрица плотности (или, в соответствии с (12), вектор $R = \langle \sigma \rangle$) несет полную статистическую информацию о системе, т. е. позволяет находить высшие моменты $\langle f^k \rangle$ и законы рас-

пределения P(f) произвольной наблюдаемой f. Моменты легко выразить через ρ или $\langle \sigma_{\alpha} \rangle$ с помощью (5) и формул умножения (4), из которых, в частности, следует

$$\sigma_{\alpha}^{2k+1} = \sigma_{\alpha}, \qquad \sigma_{\alpha}^{2k} = I.$$

Отсюда основная мера флуктуаций — дисперсия

$$\Delta \sigma_{\alpha}^{2} \equiv \langle \sigma_{\alpha}^{2} \rangle - \langle \sigma_{\alpha} \rangle^{2} = 1 - R_{\alpha}^{2}.$$
 (4.4.16)

Следовательно, в случае энергетического состояния, когда $R_z = \pm 1$ и $R_{x,y} = 0$, дисперсия энергии равна нулю, а дисперсия дипольного момента — единице (в единицах d_0). В случае же когерентного состояния согласно (15) энергия флуктуирует с единичной дисперсией (в единицах $\hbar\omega_0/2$), а дисперсия поперечных компонент $\sigma_{x,y}$ зависит от момента измерения — она осциллирует с частотой $2\omega_0$ между 0 и 1. Рассмотрим соотношения неопределенностей для компонент вектора Паули, ограничивающие точность их одновременного измерения. Согласно (16)

$$\Delta \sigma_{\alpha}^2 \Delta \sigma_{\beta}^2 = 1 + R_{\alpha}^2 R_{\beta}^2 - R_{\alpha}^2 - R_{\beta}^2,$$

$$\Delta \sigma_{\alpha}^2 + \Delta \sigma_{\beta}^2 = 2 - R_{\alpha}^2 - R_{\beta}^2.$$

В произвольном состоянии длина вектора **R** не превышает единицы (см. (13)), поэтому имеют место неравенства

$$\Delta \sigma_{\alpha}^2 \Delta \sigma_{\beta}^2 \geqslant R_{\gamma}^2 + R_{\alpha}^2 R_{\beta}^2, \qquad (4.4.17a)$$

$$\Delta \sigma_{\alpha}^2 + \Delta \sigma_{\beta}^2 \ge 1 + R_{\gamma}^2, \qquad (4.4.176)$$

где $\gamma \neq \alpha$, β . В случае $R_{\alpha} = 0$ неравенство (17а) принимает вид общего соотношения неопределенностей

$$\Delta f \Delta g \geqslant |\langle [f, g] \rangle|/2. \tag{4.4.18}$$

Определим теперь законы распределения. Пусть $P_{\alpha}(\pm 1)$ — вероятность того, что σ_{α} принимает значения ± 1 , тогда

$$\langle \sigma_{\alpha} \rangle = P_{\alpha}(1) - P_{\alpha}(-1) = 2P_{\alpha}(1) - 1.$$

Отсюда

· · · · · ·

$$P_{\alpha}(\pm 1) = (1 \pm R_{\alpha})/2.$$

Например, в когерентном состоянии (15)

$$P_{\mathbf{x}}(1) = \cos^2\left[(\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1)/2\right].$$

Аналогично для произвольной наблюдаемой в двухуровневой системе

$$P(f_1) = 1 - P(f_2) = (\langle f \rangle - f_2) / (f_1 - f_2).$$
(4.4.19)

Уравнения Блоха. Найдем уравнения движения вектора Паули. Из (1), (4), (8) и (11) следует

где $\Omega(t) = 2d_0 \cdot E(t)/\hbar$ — «мгновенная» частота Раби. Введем вектор $A = \{\Omega(t), 0, \omega_0\}$, тогда (20) можно представить в виде векторного произведения:

$$\dot{\sigma} = \sigma \times A$$
 (4.4.21)

Из (21) сразу находим аналогичное уравнение для вектора Блоха: $\dot{R} = R \times A.$ (4.4.22)

Согласно (22) вектор **R**, представляющий все свойства двухуровневой системы, прецессирует вокруг мгновенного направления вектора эф-фективного поля **A**(t).

Учтем, далее, взаимодействие частицы с окружением в простейшем приближении. Для этого постулируем экспоненциальную релаксацию с двумя положительными параметрами T_1, T_2 , характеризующими скорость установления термодинамического равновесия при снятии возмущения. В результате уравнения Гейзенберга (21) переходят в так называемые оптические уравнения Блоха:

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{R}_{\perp} / \boldsymbol{T}_{2} - \hat{\boldsymbol{z}} (\boldsymbol{R}_{z} - \Delta^{(0)}) / \boldsymbol{T}_{1}, \qquad (4.4.23)$$

где \hat{z} — единичный вектор вдоль оси z.

Легко проверить, что эти уравнения при учете (12) совпадают с уравнениями для матрицы плотности (4.3.1), (4.3.5), и поэтому все результаты § 4.3 сохраняют силу, однако теперь поведение системы приобретает наглядный геометрический образ.

Следует подчеркнуть, что уравнения Блоха (23) являются кинетическими уравнениями, описывающими лишь первые моменты наблюдаемых $\mathbf{R} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, они не дают информации о флуктуациях и



Рис. 4.9. Релаксация вектора Блоха R. После выключения возмущения поперечная составляющая со скоростью $1/T_2$ обращается в нуль, а продольная со скоростью $1/T_1$ принимает равновесное значение $\Delta^{(0)}$ о высших моментах. Последние можно найти, лишь задавшись конкретной стохастической моделью релаксации.

В случае монохроматического поля установившееся вынужденное движение R представляет прецессию с частотой поля ω вокруг оси z (рис. 4.8). При этом угол прецессии ϑ согласно (4.3.11) определяется следующим образом ($\Omega \equiv \equiv |d_0 \cdot E_0|/\hbar$):

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{R_{\perp}}{R_{z}} = \frac{2 |\rho_{21}|}{\Delta} = \frac{\operatorname{sign}(\Delta) \Omega T_{2}}{[1 + (\omega_{0} - \omega)^{2} T_{2}^{2}]^{1/2}},$$
(4.4.24)

а длина вектора **R** согласно (4.3.12) равна

$$R = \Delta/\cos\vartheta = \Delta^{(0)} / [\cos\vartheta (1 + \xi \operatorname{tg}^2 \vartheta)],$$
(4.4.25)

где $\xi \equiv T_1/T_2$. Пусть $T_1 = T_2 \equiv \tau$ и $\omega = \omega_0$, тогда вектор **R** под действием резонансного поля сокращается в

 $(1+\Omega^2\tau^2)^{1/2}$ раз и прецессирует под углом $\vartheta = \operatorname{arctg} (\Omega\tau \operatorname{sign} (\Delta)).$

Если внезапно выключить возмущение, то вектор R согласно (23) будет одновременно прецессировать с боровской частотой ω_0 и релаксировать к равновесному значению {0, 0, $\Delta^{(0)}$ }, т. е. двигаться по спирали (рис. 4.9). Если $T_1 \gg T_2$, то сначала исчезает поперечная составляющая R_{\perp} , т. е. недиагональный элемент матрицы плотности ρ_{s1} , а потом R_2 . Уравнение для поляризации. Полученные уравнения (23) полностью определяют оптические свойства вещества в рамках двухуровневого приближения, как стационарные (§ 4.3), так и нестационарные (гл. 5). Чтобы сделать это более очевидным, перейдем от переменных R_x , R_y к поляризации $P = Nd_0R_x$ [8], фигурирующей в уравнениях Максвелла. Из (23) следует

$$\dot{P} + P/T_2 = \omega_0 N d_0 R_y. \tag{4.4.26}$$

Повторно дифференцируя, получаем

ş

$$\ddot{P} + \dot{P}/T_{2} = \omega_{0} N d_{0} \left(-R_{y}/T_{2} - \omega_{0} R_{x} + \Omega(t) R_{z} \right).$$
(4.4.27)

Практически всегда $\omega_0 T_2 \gg 1$, так что при $\Omega \ll \omega \sim \omega_0$ в правой части (27) можно согласно (26) положить

$$\omega_0 N d_0 R_u \approx \dot{P}, \qquad (4.4.28)$$

в результате находим, что поляризация удовлетворяет линейному уравнению второго порядка (полагаем $d_0 || E$):

$$\ddot{P} + \frac{2}{T_2}\dot{P} + \omega_0^2 P = \frac{2\omega_0 d_0^2}{\hbar} E\Delta N, \qquad (4.4.29a)$$

где $\Delta N \equiv NR_z$ — разность населенностей единицы объема. Подставив (28) в уравнение для R_z , найдем уравнение для ΔN :

$$\Delta \dot{N} + \frac{1}{T_1} (\Delta N - \Delta^{(0)} N) = -\frac{2}{\hbar \omega_0} E \dot{P}.$$
 (4.4.296)

Это уравнение имеет простой смысл — согласно (4.1.10) ЕР равно поглощаемой в веществе мощности.

Итак, двухуровневая система ведет себя как своеобразный гармонический осциллятор с затуханием T_2 , связь которого с внешней силой Eзависит от самой силы со временем инерции T_1 . В случае слабого поля, когда фактор насыщения $\Omega^2 T_1 T_2 \ll 1$, система эквивалентна линейному осциллятору.

Магнитный резонанс. Как уже отмечалось, двухуровневое приближение лучше всего описывает частицы со спином 1/2. В магнитном поле электрон приобретает дополнительную энергию $\mathcal{H} = -\mu \cdot H$, где μ —магнитный момент электрона, антипараллельный его механическому моменту (спину) $s: \mu = -(g\mu_0/\hbar)s$. Здесь g = 2,002 -так называемый *g-фактор* свободного электрона, $\mu_0 = e\hbar/2mc = 0,927 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс—атомная единица магнитодипольного момента (магнетон Бора); спин обычно выражают в единицах $\hbar: s' = s/\hbar$. Операторы проекций спина s_{α} пропорциональны матрицам Паули, т. е. $s' = \sigma/2$. Таким образом, если пренебречь отличием g от 2, то $\mu = -\mu_0 \sigma$ и

$$\mathcal{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\sigma}. \tag{4.4.30}$$

Теперь мы с помощью правил коммутации для σ_{α} (4) можем легко найти уравнения движения любого оператора. Например,

$$i\hbar\sigma_x = \mu_0 \left(\left[\sigma_x, \sigma_y \right] H_y + \left[\sigma_x, \sigma_z \right] H_z \right) = 2i\mu_0 \left(H_y \sigma_z - H_z \sigma_y \right). \quad (4.4.31)$$

Аналогично определяют производные других проекций. В результате уравнение движения для вектора Паули примет следующий простой вид (ср. (21)):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{H}, \tag{4.4.32}$$

где $\gamma = -2\mu_0/\hbar = -2\pi \cdot 2.8$ МГц/Гс-*гиромагнитное отношение*. Так как вектор **о** пропорционален магнитному и механическому моментам электрона, то такой же вид имеют и уравнения для μ и **s**, например $\dot{s} = \gamma s \times H$.

Последнее уравнение совпадает по форме с классическим уравнением для вращательного движения, согласно которому скорость изменения момента импульса равна моменту сил $\mu \times H = -2\mu_0 s \times H/\hbar$, действующих на диполь в магнитном поле. Таким образом, электрон в магнитном поле ведет себя подобно волчку под действием пары сил. В случае постоянного магнитного поля (32) описывает *прецессию*—движение вектора момента по конусу вокруг H_0 (рис. 4.8). Частота прецессии $\omega_0 = |\gamma| H_0$ совпадает с боровской частотой перехода ($\mathcal{H}_{22} - \mathcal{H}_{11}/\hbar$. Однако в отличие от классического волчка наблюдаемый момент

Однако в отличие от классического волчка наблюдаемый момент импульса электрона может по модулю ($s = (\sum s_{\alpha}^2)^{1/2}$) принимать одноединственное значение $\hbar \sqrt{3}/2$, так как $\sigma_{\alpha}^2 = 1$, а его проекции на какую-либо ось — два значения $\pm \hbar/2$ (при отдельных измерениях). Заметим, что $s^2 \neq \langle s \rangle^2 = \sum \langle s_{\alpha} \rangle^2$; например, в смешанном состоянии с равными населенностями ($\Delta = \rho_{21} = 0$) все три средние проекции равны нулю, так что $\langle s \rangle^2 = 0$.

Пусть магнитное поле имеет кроме постоянной составляющей H_0 перпендикулярную ей переменную часть $H_{\perp}(t)$. Направим ось х параллельно H_{\perp} , а ось z—антипараллельно H_0 , тогда энергия электрона (30) будет выражаться через операторы Паули:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{0} + \mathcal{V}(t) = -\hbar \left(\omega_{0} \sigma_{z} + \Omega(t) \sigma_{x} \right) / 2, \qquad (4.4.33)$$

где теперь $\Omega(t) = \gamma H_{\perp}$. Знак H_{0z} выбран отрицательным для того, чтобы индекс 1 относился к нижнему уровню. Уравнения Гейзенберга снова принимают вид (20).

Усредним эти уравнения по начальной матрице плотности, перейдем к намагниченности $M = -\mu_0 N \langle \sigma \rangle$ и добавим релаксацию:

$$\dot{M}_{x} = -M_{x}/T_{2} + \omega_{0}M_{y},$$

$$\dot{M}_{y} = -M_{y}/T_{2} - \omega_{0}M_{x} + \gamma M_{z}H_{\perp},$$

$$\dot{M}_{z} = (M_{z}^{(0)} - M_{z})/T_{1} - \gamma H_{\perp}M_{y},$$
(4.4.34)

где $M_z^{(0)} = -\mu_0 N \Delta^{(0)}$ — статическая равновесная намагниченность. 90 Эта система уравнений, определяющая кинетику намагниченности парамагнитного вещества (электронного или ядерного) под действием постоянного и переменного полей, называется уравнениями Блоха. Уравнения Блоха описывают эффект магнитного резонанса, т. е. резонансное поглощение радиоволн. Этот эффект лежит в основе важнейших направлений радиоспектроскопии — электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и ферромагнитного резонанса. Легко убедиться, что уравнения Блоха эквивалентны уравнениям для матрицы плотности в случае двухуровневой системы, поэтому все полученные ранее выводы переносятся на случай магнитного резонанса при замене энергии возмущения — $d \cdot E(t)$ на $\mu_0 \sigma \cdot H_{\perp}(t)$.

Как уже отмечалось, часто $T_1 > T_2$, так как $\langle \sigma_z \rangle$ (т. е. энергия населенности) релаксирует в результате лишь неадиабатических взаимодействий данной частицы с окружением, например в результате неупругих столкновений частиц в газе или спин-решеточного (спин-фононного) взаимодействия в кристалле. В то же время для изменения поперечных компонент $\langle \sigma_\perp \rangle$ (или ρ_{21}) не требуется передачи энергии, и поэтому «время жизни» $\langle \sigma_\perp \rangle$ сокращается в результате и адиабатических (спинспиновых), и неадиабатических возмущений. Можно считать, что возмущения «сбивают» фазу $\varphi_1 - \varphi_2$ прецессии в (15), т. е. аргумент ρ_{21} и поэтому средние по ансамблю или времени стремятся к нулю: $\langle \sigma_\perp \rangle \rightarrow 0$.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОПТИКА

В предыдущих главах мы рассматривали в основном установившиеся, стационарные процессы взаимодействия поля с веществом. Благодаря релаксации переходные процессы при включении гармонического поля затухают и устанавливается стационарная амплитуда колебаний зарядов, определяемая восприимчивостью χ . Восприимчивость с учетом насыщения $\chi(E_0)$ (см. (4.3.19)) определяет отклик вещества (амплитуду поляризации P_0) на квазимонохроматическое возмущение при условии, что амплитуда E_0 постоянна или изменяется лишь за время, много большее времени релаксации: $\tau_F \gg T_{1,2}$.

В случае слабого поля, когда нет насыщения, время релаксации населенностей T_1 не играет роли и условие стационарности имеет вид $\tau_E \gg T_2$. Существенно, что в отсутствие насыщения уравнения движения вещества линейны, и поэтому восприимчивость $\chi(\omega)$ определяет также и нестационарные, переходные процессы. Например, отклик вещества на короткий ($\tau_E \ll T_2$) и слабый импульс пропорционален фурье-образу $\chi(\omega)$, т. е. функции Грина $\chi(t)$, и представляет собой набор затухающих со временами T_{2mn} колебаний (см. (4.2.24)). Отклик на слабый импульс произвольной формы E(t) определяется сверткой функций $\chi(t)$ и E(t).

Возникает вопрос о поведении вещества под действием сильных и коротких импульсов. В настоящей главе будет показано, что при этих условиях наблюдается ряд необычных оптических эффектов. К числу таких эффектов, называемых когерентными 1), относятся, например, явления самоиндицированной прозрачности, оптического эхо и сверхизлучения. Некоторые из этих существенно нестационарных эффектов наблюдали в радиоспектроскопии уже сравнительно давно, однако в оптическом диапазоне они были обнаружены лишь после появления лазеров. Оптические нестационарные эффекты помимо общетеоретического значения представляют большой практический интерес с точки зрения спектроскопических приложений и для оптимизации параметров лазеров, на них основана когерентная (нестационарная) спектроскопия [64, 75]. Более подробное описание нестационарных эффектов можно найти в [27, 28]. В § 5.1 с помощью уравнений Блоха найдено изменение состояния двухуровневой системы под воздействием короткого резонансного импульса света. Далее рассмотрено собственное излучение одного атома (§ 5.2) и ансамбля из N атомов (§ 5.3) при различных начальных условиях.

¹) В настоящей книге вместо многозначного термина «когерентный» используется термин «нестационарный», который точнее определяет сущность рассматриваемых явлений.

§ 5.1. Вынужденные нестационарные эффекты

Рассмотрим реакцию двухуровневой системы на действие квазигармонического возмущения конечной длительности. Для простоты примем, что огибающая импульса имеет прямоугольную форму с длительностью $\tau_E \ll T_2$, так что можно пренебречь процессами релаксации и использовать уравнения для матрицы плотности ρ_{mn} или эквивалентные уравнения Блоха для $R = \{2\rho'_{21}, 2\rho''_{21}, \rho_{11}-\rho_{22}\}$ при $T_{1,2} = \infty$. При этом уравнения Блоха (4.4.22) совпадают по форме с уравнениями Гейзенберга для оператора σ (4.4.21). Иначе говоря, на интервалах времени, много меньших характерных времен взаимодействия системы с окружением, ее можно считать изолированной и описывать не с помощью кинетических уравнений, а с помощью уравнения Шредингера для волновой функции, уравнения Неймана для $\rho(t)$ или уравнений Гейзенберга для операторов.

Мы уже решали эту задачу с помощью уравнения Шредингера в гл. 2, где определили амплитуды возмущенных состояний $c_{mn}(t)$ и вероятность перехода $P_{mn} = |c_{mn}|^2$ для многоуровневой системы в первом порядке теории возмущения. Однако в случае двухуровневой системы нет необходимости представлять решение в виде ряда теории возмущения.

Атом как гироскоп. Используем наглядное геометрическое представление мгновенного состояния системы с помощью вектора Блоха *R*, который согласно (4.4.22) ведет себя аналогично моменту импульса тела с закрепленной точкой:

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{A}; \quad (5.1.1)$$

здесь $A = \{2d_0E(t)/\hbar, 0, \omega_0\}$ —вектор эффективного поля, $d_0 = d_{21} = d_{12}$ дипольный момент перехода, который полагаем вещественным и параллельным полю E(t), ω_0 —частота перехода. Уравнение (1) сохраняет длину вектора R, которая в случае чистого состояния равна единице. При этом конец вектора R движется по поверхности единичной сферы.

Рассмотрим траекторию этого движения под действием квазимонохроматического поля

$$E(t) = (1/2) E_0(t) e^{-i\omega t + i\varphi_0} + \kappa c.$$

Перейдем к системе координат, вращающейся с частотой поля ю вокруг оси z:

$$\rho_{21} = \rho_0 e^{-i\omega t},$$

$$R_x = R_{0x} \cos \omega t + R_{0y} \sin \omega t,$$

$$R_y = -R_{0x} \sin \omega t + R_{0y} \cos \omega t.$$
(5.1.2)

Пусть выполнены условия $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, $d_0 E_0 \ll \hbar \omega_0$, тогда применимо приближение вращающейся волны и функции $\rho_0(t)$, $R_0(t)$ медленные (по сравнению с $e^{-i\omega t}$). Эти функции имеют простой физический смысл—они определяют амплитуду и фазу среднего дипольного момента: $\langle \boldsymbol{d} \rangle = 2\boldsymbol{d}_0 \boldsymbol{\rho}_{21} = \boldsymbol{d}_0 \boldsymbol{R}_x$. Поглощаемая из внешнего поля мощность пропорциональна $\boldsymbol{R}_{0y}(t)$ (см. (12)). Нетрудно убедиться, что в приближении вращающейся волны

Нетрудно убедиться, что в приближении вращающейся волны уравнение движения (1) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{0} = \boldsymbol{R}_{0} \times \tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \qquad (5.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{0} \equiv \{2\rho_{0}^{\prime}, 2\rho_{0}^{\prime}, \Delta\}, \\ & \tilde{\Omega} \equiv \{\Omega\cos\varphi_{0}, \Omega\sin\varphi_{0}, \omega_{0}-\omega\}, \\ & \Delta \equiv \rho_{11}-\rho_{22}, \Omega \equiv d_{0}E_{0}/\hbar, \end{aligned}$$
(5.1.4)

 φ_0 — начальная фаза поля в центре атома; в случае плоской волны $\varphi_0 = kz + \varphi_1$. Напомним, что мы для простоты полагаем матричный элемент перехода вещественным. В общем же случае $\varphi_0 = \arg(d_{z1} \cdot E_0)$.

Таким образом, под действием гармонического поля вектор \vec{R}_0 , представляющий состояние системы, вращается с частотой $\vec{\Omega} = [\Omega^2 + (\omega_0 - \omega)^2]^{1/2}$ вокруг направления «эффективного» поля $\vec{\Omega}$



Рис. 5.1. Нутация вектора Блоха *R*. Под действием монохроматического поля *R* одновременно с прецессией вращаетс_я вокруг направления эффективного поля $\tilde{\Omega}$ с частотой нутации $\tilde{\Omega}$: *a*) система координат вращается с частотой поля ω ; *б*) неподвижная система координат; сплошная линия — точный резонанс, штриховая — $\omega \neq \omega_0$

рис. 5.1). Это медленное вращение называется нутацией; оно добавляется к быстрой вынужденной прецессии с частотой поля ω . Иначе говоря, угол прецессии $\vartheta(t)$ (см. (4.4.24)) медленно меняется в течение действия импульса, так что изображающая точка описывает спираль на сфере с постоянным радиусом $R = (\Delta^2 + 4 |\rho_{21}|^2)^{1/2}$.

В резонансном случае, когда $|\omega_0 - \omega| \ll \Omega$, ось нутации $\hat{\Omega}$ лежит в экваториальной плоскости. Если при этом начальное состояние – энергетическое, т. е. R(0) лежит на одном из полюсов и $\vartheta(0) = 0$

или π , то **R** движется под действием поля по меридиану с долготой $\varphi_0 \pm \pi/2$.

В нерезонансном же случае ($|\omega_0 - \omega| \ge \Omega$) ось нутации почти параллельна оси *z*, так что вектор **R** движется примерно по широтам с угловой скоростью $\tilde{\Omega} \approx \omega_0 - \omega$ во вращающейся системе координат, т. е. со скоростью ω_0 в неподвижной системе.

Практически, конечно, огибающая поля $E_0(t)$ нарастает и убывает постепенно, поэтому частоты Ω и Ω являются медленными функциями времени. При точном резонансе ($\omega = \omega_0$) изменение угла прецессии определяется «площадью» импульса [27]:

$$\vartheta(t) - \vartheta(0) = \int_{0}^{t} \Omega dt = d_{0} \int_{0}^{t} E_{0} dt / \hbar.$$
(5.1.5)

Фаза поля ϕ_0 считается постоянной, т. е. предполагается, что имеет место лишь амплитудная модуляция.

Отметим, что уравнение (3) дает рецепт приготовления произвольного чистого состояния системы (с заданными «долготой» и «широтой») с помощью когерентного поля — сперва надо охладить систему, т. е. перевести изображающую точку на южный полюс, а затем подействовать на нее резонансным импульсом с определенными площадью и фазой.

Аналитическое решение. В случае E_0 = const процесс нутации нетрудно представить в алгебраическом виде. Пусть, например, начальное состояние — стацьонарное (т. е. изображающая точка при t=0находится на одном из полюсов) и $\varphi_0=0$, тогда (3) удовлетворяется следующими функциями времени [27]:

$$R_{0x} = \Delta (0) \frac{2\Omega (\omega_0 - \omega)}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2 (\tilde{\Omega}t/2), \qquad (5.1.6)$$

$$R_{0y} = \Delta (0) \frac{I\Omega}{\tilde{\Omega}} \sin (\tilde{\Omega}t), \qquad (5.1.6)$$

$$R_z = \Delta (0) \left[1 - \frac{2\Omega^2}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2 (\tilde{\Omega}t/2) \right].$$

Последнее равенство можно интерпретировать в терминах вероятности перехода. Пусть система находилась на нижнем уровне ($\Delta(0) = = +1$), тогда вероятность перехода вверх *P* равна $\rho_{22} = (1 - R_z)/2$ и из (6) получаем формулу Раби:

$$P = \left[\frac{\Omega}{\bar{\Omega}}\sin\left(\bar{\Omega}t/2\right)\right]^2.$$
(5.1.7)

Отметим, что при Ω «|ω₀--ω| (7) совпадает с вероятностью перехода (2.2.8), найденной с помощью теории возмущения:

$$P = \left[\frac{\Omega}{\omega_0 - \omega} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\right]^2, \qquad (5.1.8)$$

и что если найти из (7) скорость перехода W = dP/dt и усреднить ее по экспоненциальному распределению времен взаимодействия (ср. конец § 2.2), то получится выражение, эквивалентное формуле (4.3.20), описывающей стационарное поглощение с учетом насыщения (при $T_1 = = T_2$).

Йтак, квантовая система под действием резонансного возмущения периодически переходит с нижнего уровня на верхний и обратно



Рис. 5.2. Зависимость вероятности перехода от времени согласно формуле Раби в случае точного резонанса (сплошная линия) и при $\omega - \omega_0 = \sqrt{3} \Omega$ (штриховая линия) (рис. 5.2). Время перехода согласно (7) составляет

$$t_{\pi} \equiv \pi/\Omega = \pi \hbar/d_0 E_0.$$

Эту картину следует сравнить с представлением о мгновенных «квантовых скачках», принятым на первых этапах развития квантовой теории.

Пусть переход с $d_0 = 1$ Д вызывается мощной плоской волной с пиковой интенсивностью 1 ГВт/см², тогда $E_0 =$ = 1 МВ/см и из (9) следует $t_{\pi} = 1$ пс. Это время в ряде случаев много меньше времени ре-

лаксации, так что используемое приближение $T_{1,2} = \infty$ оправдывается.

В случае же обычных оптических экспериментов $t_{\pi} \gg T_{1,2}$ и вектор R(t), изображающий состояние двухуровневой частицы на сфере, не успевает далеко отойти от южного полюса до очередного «столкновения» с соседними частицами, которое возвращает R обратно в равновесное положение с $R_{\perp} = 0$. В результате в среднем устанавливается динамическое равновесие с определенным стационарным углом прецессии (4.4.24).

Заметим, что амплитуда поля, необходимая для стационарного насыщения $E_0 \ge \hbar/d_0 \sqrt{T_1 T_2}$ (см. (4.3.15)), не превышает по порядку амплитуды импульса, необходимой для наблюдения когерентных эффектов:

Иначе говоря, поле, успевающее вызвать переход за время, много меньшее времени релаксации, при длительном воздействии вызывает сильное насыщение.

Ниже будет рассмотрен ряд экспериментальных методов наблюдения нестационарных эффектов.

[°]Эффект нутации. Пусть на равновесную двухуровневую систему падает электромагнитная волна с амплитудой E_0 и резонансной частотой $\omega = \omega_0$. На интервалах времени $t \ll T_2$ отклик системы описывается

уравнением (3), согласно которому вектор Блоха R, изображающий мгновенное состояние системы, испытывает аналогично волчку нутационное движение, т. е. периодическое изменение угла прецессии ϑ с частотой Раби $\Omega = d_0 E_0/\hbar$. При точном резонансе R движется по ме-

ридиану от южного полюса (состояние равновесия) через экватор (когерентное состояние) к северному полюсу (инверсия населенностей) и обратно с угловой частотой Ω.

Очевидно, при движении вектора R вверх, к северу, средняя по ансамблю энергия системы увеличивается за счет энергии волны, и в момент, когда $\vartheta =$ $= \Omega t = \pi$, волна в среднем теряет ровно один квант энергии $\hbar \omega$. При последующем движении R вниз, к югу, система излучает запасенную энергию обратно. В результате волна оказывается промодулированной



Рис. 5.3. Эффекты переходной оптической нутации и затухания свободной поляризации. Передний фронт резонансного импульса (штриховая линия) вызывает в веществе переходной процесс — нутацию, которая приводит к модуляции интенсивности прошедшего света I(t) (сплошная линия) с частотой Раби (α — коэффициент поглощения с учетом насыщения, l — толщина слоя, T_2 — время поперечной релаксации). На заднем фронте выходного импульса наблюдается «хвост», вызванный свободной прецессией поляризации

по амплитуде с частотой нутации Ω (рис. 5.3). В случае достаточно большого числа атомов модуляция прошедшей через вещество волны достигает 100%. Это явление периодического изменения мгновенной оптической плотности вещества называется эффектом оптической нутации.

Найдем поглощаемую веществом мощность. Согласно (4.3.18) поляризация вещества с плотностью двухуровневых атомов N равна

$$P = 2d_0 N \dot{\rho_{21}} = d_0 N \left(R_{0x} \cos \omega t + R_{0y} \sin \omega t \right) \equiv P_c \cos \omega t + P_s \sin \omega t,$$
(5.1.11)

где мы ввели синфазную P_c и квадратурную P_s амплитуды поляризации (полагаем $\varphi_0=0$ и $E=E_0\cos\omega t$). Из (4.1.10) следует, что средняя за период $2\pi/\omega$ мощность потерь в единице объема вещества определяется квадратурной компонентой поляризации:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{2} \omega E_0 P_s(t) = \omega d_0 E_0 N R_{0y}(t)/2.$$
 (5.1.12)

Отсюда с помощью (6) находим

$$\mathcal{P}(t) = \hbar \omega \Delta(0) N\Omega \sin(\Omega t)/2. \qquad \forall \qquad (5.1.13)$$

Этот результат согласуется с проведенным выше качественным рассмотрением — поле и атомы периодически обмениваются квантами энергии. Подчеркнем, что поскольку при $t \ll T_{1,2}$ релаксация не успе-

4 Д. Н. Клышко

вает проявиться, то истинное поглощение — необратимая диссипация энергии в термостате — здесь отсутствует.

В дальнейшем, при $t > T_{1,2}$, амплитуда нутации атомов из-за процессов релаксации уменьшается и устанавливается стационарный угол прецессии (4.4.24). При этом поле испытывает обычное поглощение, описываемое по формуле (4.1.12) мнимой частью восприимчивости, модуляция прошедшей волны исчезает, и ее амплитуда соответствует закону Бугера с учетом насыщения (см. рис. 5.3 и § 6.4).

Если теперь резко выключить поле, то вещество продолжает в течение некоторого времени светиться (рис. 5.3) из-за свободной прецессии вектора **R**; при этом вещество находится в когерентном *сверхизлу*чающем состоянии (§ 5.3). Этот эффект называется затуханием свободной поляризации.

В случае неоднородного, например доплеровского, уширения приведенные формулы относятся лишь к небольшой группе атомов с определенной проекцией скорости. Для нахождения общей поляризации их необходимо проинтегрировать по распределению Максвелла.

Эффект оптической нутации можно использовать для определения дипольного момента перехода по наблюдаемой частоте модуляции Ω и для изучения процессов релаксации по скорости затухания модуляции.

Самоиндуцированная прозрачность. Рассмотрим далее взаимодействие с двухуровневыми атомами коротких резонансных импульсов с длительностью $\tau_E \ll T_{1,2}$. Согласно (13) такие импульсы передают единице объема вещества энергию

$$\mathscr{E} = \int_{0}^{\tau_{E}} \mathscr{P} dt = \hbar \omega \Delta(0) N \sin^{2}(\Omega \tau_{E}/2).$$
 (5.1.14)

The matrice is the mapping

Пусть, например, $\tau_E = 2\pi/\Omega$, т. е. $E_0 \tau_E = 2\pi \hbar/d_0$ — так называемый «2л-импульс», тогда $\mathscr{E} = 0$ и импульс должен проходить через вещество без поглощения! Это предсказание теории кажется парадоксальным совершенно непрозрачное в обычном смысле вещество свободно пропускает достаточно короткие и мощные импульсы.

Рассмотренный эффект, получивший название самоиндуцированной прозрачности (СИП) или самопросветления, действительно наблюдается в эксперименте (его надо отличать от эффекта насыщения, при котором также наблюдаются отклонения от закона Бугера). Влияние вещества на поле здесь проявляется лишь в уменьшении скорости распространения и искажении формы импульса. Существенно, однако, что при этом «площадь» импульса $\vartheta = \Omega \tau_F$ (см. (5)) остается равной 2π .

Качественно СИП можно объяснить следующим образом: первая половина падающего на вещество импульса ($\vartheta = \pi$) поглощается атомами, которые переходят в возбужденное состояние с инверсией населенностей, однако вторая половина импульса «снимает» эту инверсию, так что поглощенная энергия когерентно возвращается полю. Отметим здесь, что облучение вещества короткими π -импульсами является примером нестационарного метода создания инверсии населенностей в двухуровневых атомах.

Для количественного описания СИП необходимо рассматривать совместно неоднородное волновое уравнение и уравнение вещества, т. е. уравнения Максвелла и Блоха (см., например, [27]). Из такого рассмотрения следует, что скорость распространения 2л-импульса и определяется его «длиной» ст = и коэффициентом обычного поглощения а₀ следующим образом:

$$c/u = 1 + \alpha_0 l/2. \tag{5.1.15}$$

Таким образом, чем длиннее импульс, тем больше его задержка; например, при $\tau_E = 1$ нс (l = 30 см) и $\alpha_0 = 10^2$ см⁻¹ импульс замедляется на три порядка.

Интересным результатом теории волн в нелинейных средах является предсказание существования солитонов — стабильных импульсов, форма и амплитуда которых не изменяются в процессе распространения [73]. В случае двухуровневой нелинейности солитоны имеют форму гиперболического секанса:

$$E_0(\tau) = (2\hbar/d_0\tau_E)\operatorname{sech}(\tau/\tau_E), \quad \tau \equiv t - z/u. \quad (5.1.16)$$

Легко проверить, что (16) является 2*л*-импульсом, т. е. $\int dt E_0 =$ $=2\pi\hbar/d_{a}$

Из (14) следует, что 4л- или, вообще, 2лл-импульсы также не испытывают поглощения. Согласно волновой теории такие импульсы в процессе распространения распадаются на отдельные стабильные 2π-солитоны.

Отметим, что СИП имеет место и при неоднородном уширении перехода (например, из-за эффекта Доплера в газах или неоднородных статических полей в твердых телах), когда $2/\Delta\omega = T_2^* \ll T_2$. Существенно, что выполнение условия $\tau_E \ll T_2^*$ не является необходимым. СИП наблюдается также в полупроводниках при межзонных переходах.

§[5.2. Собственное излучение атома

Пусть на равновесную двухуровневую систему подействовал резонансный $\pi/2$ -импульс, имеющий длительность $\tau_r = \pi/2\Omega$. В соответствии с (5.1.3) к концу импульса система перейдет в когерентное состояние с координатами $\vartheta = \varphi = \pi/2$ на сфере Блоха (полагаем начальную фазу поля $\phi_0 = 0$). Напомним, что в когерентном состоянии энергия квантового ансамбля не имеет определенного значения, при измерении она принимает значения 0 или ħω, случайным образом при среднем значении в половину кванта: Е $==\langle \mathcal{H}_{a}\rangle = \hbar\omega_{a}/2$, если отсчитывать энергию от нижнего уровня.

Согласно (5.1.6) матрица плотности атома после прохождения л/2-импульса имеет следующие элементы:

$$\rho_{21}(t) = i\Delta(0) e^{-i\omega_0 t}/2, \quad \Delta(t) = \rho_{11} - \rho_{22} = 0. \quad (5.2.1)$$

Отсюда следует, что средний дипольный момент атома осциллирует (см. рис. 2.1) с частотой перехода $\omega_0 = \omega_{s1}$ и амплитудой, равной **∆***

матричному элементу перехода $d_0 \equiv d_{21}$ (полагаем $d_{21} = d_{12}$ и $\Delta(0) = 1$): $\langle \boldsymbol{d}(t) \rangle = 2\boldsymbol{d}_0 \wp_{21}'(t) = \boldsymbol{d}_0 \sin \omega_0 t.$ (5.2.2)

Излучение диполя. Учтем теперь собственное излучение атома, которым мы до сих пор пренебрегали. Как уже отмечалось в § 2.5, спонтанную передачу энергии атома электромагнитному вакууму можно рассматривать как релаксацию с характерным временем $T_1 = T_2/2 = 1/A$, где A — скорость спонтанного перехода и 1/A — излучательное время жизни возбужденного состояния. При этом вакуум играет роль термостата с нулевой температурой и бесконечной теплоемкостью. Спонтанное излучение является простейшей квантовой моделью необратимого процесса.

Рассмотрим спонтанное излучение осциллирующего диполя (2), исходя из полуклассических представлений. Из уравнений Максвелла следует, что средняя по времени мощность, излучаемая движущимися зарядами, в дипольном приближении равна [26]

$$\mathcal{P} = 2 \overline{d}_{\kappa_n}^2 / 3c^3. \tag{5.2.3}$$

Если отождествить здесь $d_{\kappa\pi}$ и $\langle d \rangle$, то мы получим заниженную в два раза мощность (по сравнению с предсказанием квантовой электродинамики—см. ниже). Поэтому будем полагать $d_{\kappa\pi} = \sqrt{2} \langle d \rangle$, тогда

$$\mathcal{P}_{\rm Kor} = 4 \overline{\langle \ddot{d} \rangle^2} / 3c^3 = 2\omega_0^4 d_0^2 / 3c^3.$$
 (5.2.4)

Полуклассическая теория предсказывает кроме порядка величины общей мощности спонтанного излучения также его поляризацию и диаграмму направленности. Например, для электродипольного перехода поле в волновой зоне равно

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\langle \boldsymbol{\ddot{d}}_{\perp}(t') \rangle / c^2 r, \qquad (5.2.5)$$

где d_{\perp} —проекция дипольного момента на перпендикулярную r плоскость и $t' \equiv t - r/c$. Отсюда диаграмма направленности имеет обычный «дипольный» вид $\mathcal{P} \sim \sin^2 \vartheta$, где ϑ — угол между r н $\langle d \rangle$.

Отметим, что атом в исходном когерентном состоянии излучает поле с определенной фазой. Это означает, что второй, невозбужденный атом на расстоянии r от первого может с некоторой вероятностью, пропорциональной r^{-2} , перейти в когерентное состояние с фазой прецессии, сдвинутой на $\omega_0 r/c$.

Вероятность спонтанного перехода. Излучение (4) приведет к постепенному уменьшению запасенной энергии и амплитуды осцилляций дипольного момента, так что система в конце концов перейдет в основное состояние. При этом вектор Блоха R будет описывать сходящуюся к южному полюсу спираль (в неподвижной системе координат) и амплитуда осцилляций дипольного момента $\langle d \rangle$ в (2) и (4) будет медленно, так как $A \ll \omega_0$, затухать (рис. 4.9). Аналогичная картина имеет место и после возбуждения системы любым импульсом, кроме πn - и $2\pi n$ -импульсов, которые дают $\langle d \rangle = 0$. Итак, *атом в нестационарном состоянии* обладает осциллирующим дипольным моментом и согласно классической электродинамике спонтанно излучает квазимонохроматическую волну с частотой, равной частоте перехода ω₀. При этом угол прецессии из-за излучательных потерь энергии постепенно стремится к нулю.

Полуклассическое выражение (4) для излучаемой в когерентном состоянии мощности $\mathcal{P}_{\text{ког}}$ позволяет оценить вероятность спонтанного перехода в единицу времени A. Для этого постулируем, что мощность излучения атома затухает по экспоненциальному закону:

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(0) e^{-At}, \qquad (5.2.6)$$

тогда полная энергия будет

$$\mathbf{\mathfrak{G}} = \int_{0}^{\infty} \mathcal{P}(t) \, ds = \mathcal{P}(0)/A. \tag{5.2.7}$$

Приравняв ее исходной энергии атома $\hbar\omega_0/2$, найдем с помощью (4) следующее выражение:

$$A = 4\omega_0^3 d_0^2 / 3\hbar c^3, \tag{5.2.8}$$

которое совпадает с результатом более последовательного расчета (§ 7.7).

Проведенное рассуждение, кроме произвольного численного коэффициента¹), обладает двумя более существенными недостатками оно не дает экспоненциального закона распада и предсказывает устойчивость возбужденного энергетического состояния ($\Delta = -1$, $\rho_{21} = 0$), в котором $\langle d(t) \rangle = 0$.

Можно попытаться исправить положение, подставив в (3) $\langle d^2 \rangle$ вместо $\langle d \rangle^2$. Но оператор d^2 пропорционален единичному оператору:

$$d^{2} = \begin{pmatrix} 0 & d_{0} \\ d_{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d_{0} \\ d_{0} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{2}_{0} & 0 \\ 0 & d^{2}_{0} \end{pmatrix} = d^{2}_{0}I, \qquad (5.2.9)$$

поэтому $\langle d^2 \rangle = d_0^2$ независимо от состояния атома — это следует также сразу из (4.4.4). Например, атом при этом должен излучать, даже находясь в основном состоянии, что противоречит закону сохранения энергии. Вместо устойчивого возбужденного состояния мы получили неустойчивое основное. Этим же недостатком обладает и распространенная интерпретация спонтанных переходов как вынужденных нулевыми флуктуациями вакуума.

Последовательная теория спонтанного излучения, как и вообще статистическая оптика, должна исходить из квантового описания поля (гл. 7).

[°]Нормально-упорядоченное излучение. Однако правильное описание спонтанного излучения можно получить и в рамках полуклассики, заменив в (3) квадрат дипольного момента на среднее от *нормально*-

¹) Напомним, что мы произвольно положили отношение $d_{\kappa\pi}/\langle d \rangle = \sqrt{2}$.

упорядоченного квадрата (§ 7.7):

$$\mathcal{P} = (2/3c^3) \langle :(\vec{d}):^2 \rangle = (4/3c^3) \langle \vec{d}^{(-)}\vec{d}^{(+)} \rangle.$$
(5.2.10)

Двоеточия означают процедуру нормального упорядочения, в результате которой положительно-частотные операторы $f^{(+)}$ располагаются в произведениях правее отрицательно-частотных $g^{(-)}$. По определению оператор $f^{(+)}$ в представлении Гейзенберга содержит лишь гармоники с положительной частотой:

$$f^{(+)}(t) = \sum_{n} f_n \exp(-i\omega_n t), \quad \omega_n > 0.$$

Аналогично фурье-образ оператора $g^{(-)}(t)$ отличен от нуля лишь для отрицательных частот.

Любой оператор можно представить в виде суммы положительнои отрицательно-частотных частей (постоянную составляющую исключаем из рассмотрения): $d = d^{(+)} + d^{(-)}$, причем в случае эрмитовых операторов $d^{(+)} = (d^{(-)})^+$. Отсюда

$$:d^{2}:=d^{(+)_{2}}+2d^{(-)}d^{(+)}+d^{(-)_{2}}=2d^{(-)}d^{(+)}, \qquad (5.2.11)$$

в то время как согласно (9)

$$d^{2} = d^{(+)_{2}} + d^{(-)}d^{(+)} + d^{(+)}d^{(-)} + d^{(-)_{2}} = d_{0}^{2}I \qquad (5.2.12)$$

(ниже будет показано, что $d^{(\pm)2} = 0$).

В процессе спонтанного перехода можно приблизительно полагать зависимость d(t) в представлении Гейзенберга невозмущенной, так как $A \ll \omega_0$:

$$d(t) = d_0 \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\omega_0 t) \\ \exp(i\omega_0 t) & 0 \end{pmatrix},$$
 (5.2.13)

где $d_0 = d_{21} = d_{12}$, $\omega_0 = \omega_{21} > 0$. Отсюда $\ddot{d} = -\omega_0^2 d$ и по определению

$$d^{(+)}(t) = d_{0} \exp(-i\omega_{0}t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv d_{0}\sigma^{(+)}(t), d^{(-)}(t) = d_{0} \exp(i\omega_{0}t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv d_{0}\sigma^{(-)}(t),$$
(5.2.14)

где $\sigma^{(\pm)} \equiv \sigma_x \pm i\sigma_y$ (§ 4.4). Перемножая эти матрицы, находим

$$:d^{2}:=2d_{0}^{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=d_{0}^{2}(I-\sigma_{z}); \qquad (5.2.15)$$

напомним, что $d = d_0 \sigma_x$. В оправдание введенной здесь процедуры укажем, что именно нормально-упорядоченный квадрат поля $E^{(-)}E^{(+)} \sim d^{(-)}d^{(+)}$ определяет «полезную» энергию, которая может быть поглощена другим атомом (§ 7.7). Заметим также, что эта процедура исключает необходимость временного усреднения по высокочастотным осцилляциям мощности (см. (3)).

Из (10) с учетом (15) следует $\mathcal{P} = 2\omega_0^4 d_0^2 \langle I - \sigma_z \rangle / 3c^3$, или

$$\mathcal{P} = \hbar \omega_0 A \rho_{22}. \tag{5.2.16}$$

Подчеркнем, что этот результат справедлив для любого состояния атома, в том числе чисто энергетического или когерентного. В последнем случае $\rho_{22} = 1/2$ и (16) совпадает с (4). Итак, мощность спонтанного излучения двухуровневого атома в данный момент времени пропорциональна населенности верхнего уровня¹).

В силу закона сохранения энергии должно, очевидно, выполняться равенство

$$\hbar\omega_{0}\dot{\Delta} = 2\mathcal{P}. \tag{5.2.17}$$

Коэффициент 2 учитывает то, что разность населенностей изменяется при каждом переходе на 2. Отсюда, заменив в (16) ρ_{22} на (1— Δ)/2, находим кинетическое уравнение

$$\Delta = (1 - \Delta)T/_{1\text{ecr}}, \quad T_{1\text{ecr}} \equiv 1/A.$$
 (5.2.18)

Таким образом, мы подтвердили экспоненциальный закон распада (6) возбужденного состояния:

$$\Delta(t) = 1 + [\Delta(0) - 1] e^{-At}.$$
 (5.2.19)

Более строгое описание взаимодействия двухуровневой системы с вакуумом можно получить, подставляя в уравнения Гейзенберга для вектора Паули (4.4.21) в качестве внешнего поля собственное поле излучения нулевого приближения—поле реакции (подробнее см. [27]). Такие уравнения описывают известный из классической электродинамики эффект торможения излучением [26]. При этом для σ_z получается уравнение вида (18), а для $\sigma^{(\pm)}$ —уравнения гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega_0 + \delta\omega \mp iA/2$, где $\delta\omega$ —поправка к частоте перехода, называемая сдвигом Лемба: $\delta\omega \sim A$; например, для резонансной линии L_{α} атома водорода $\delta\omega/2\pi \sim 10^{\circ}$ Гц. Мнимая часть поправки к частоте перехода имеет смысл обратного времени $1/T_2$ поперечной релаксации за счет реакции излучения. Таким образом, для изолированного атома $T_{2ecr} = = 2T_{1ecr} = 2/A$.

Связь спонтанного и теплового излучений. Согласно полуклассической теории атомы при спонтанных переходах излучают экспоненциальные «цуги» волн. Поле при этом имеет вид

$$E(t) = \theta(t) E_0 e^{-At/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (5.2.20)$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Фурье-образ (20), определяющий спектральный состав излучения, имеет лоренцеву (или *дисперсионную*) форму:

$$E(\omega) = \frac{iE_0}{4\pi} \left(\frac{\exp\left(-i\varphi_0\right)}{\omega - \omega_0 + iA/2} + \frac{\exp\left(i\varphi_0\right)}{\omega + \omega_0 + iA/2} \right).$$
(5.2.21)

¹) Этот вывод очевиден в обозначениях Дирака: $\sigma^{(+)} = |1\rangle \langle 2|, \sigma^{(-)} = |2\rangle \langle 1|, \sigma^{(-)}\sigma^{(+)} = |2\rangle \langle 2|, \langle \sigma^{(-)}\sigma^{(+)} \rangle = \rho_{22}$.

Аналогичный результат получается из квантовой теории. Ширина спектральной линии $\Delta \omega_{ecr} = A$, обу словленная спонтанным излучением, называется естественной.

Реально наблюдаемые спектры излучения создаются обычно большим количеством атомов, возбуждаемых в случайные моменты времени в состояния со случайной фазой (противоположный случай, приводящий к эффекту сверхизлучения, будет рассмотрен ниже). Например, в нагретом газе при низком давлении атомы возбуждаются в результате столкновений друг с другом. В момент столкновения на атом действует импульсное поле соседнего атома, которое изменяет его состояние в соответствии с общими формулами теории возмущения (§ 2.1). После столкновения атомы согласно полуклассической теории излучают экспоненциальные цуги волн вида (20) со случайными начальными фазами. Средняя длина цугов определяется спонтанным временем жизни 1/А или временем между столкновениями т.

Обычно радиационное охлаждение газа компенсируется внешним подогревом, так что суперпозиция множества цугов образует стационарное поле теплового излучения. В случае малой оптической толщины газа ($\alpha l \ll 1$) его интенсивность будет пропорциональна населенности верхнего уровня. Если же $\alpha l \ge 1$, то надо учитывать кроме спонтанных также и вынужденные переходы, приводящие к поглощению и последующему переизлучению фотонов (эффект *пленения излучения*). В пределе $\alpha l \ge 1$ внутри газа устанавливается равновесное планковское излучение. В § 7.1 будет дана простая количественная модель этого процесса, охватывающая также случай усиленного спонтанного излучения при $\alpha < 0$.

Об излучении дробных долей фотона. Отметим здесь любопытный парадокс — кажущееся противоречие между нашей теорией и привычными фотонными представлениями. В когерентном состоянии с углом прецессии ϑ согласно (5.1.14) запасенная атомом энергия $\mathscr{E} = -\hbar\omega_0 \sin^2(\vartheta/2)$. В результате спонтанного излучения эта энергия через какое-то время будет передана полю. Но на фотонном языке это означает излучение атомом доли фотона, равной $\mathscr{E}/\hbar\omega_0 = \sin^2(\vartheta/2)$. Например, после возбуждения атома $\pi/2$ -импульсом в когерентное состояние на экваторе атом излучит экспоненциальный цуг с энергией в полфотона (в противоречии с исходными постулатами Планка и Бора).

Этот вывод, однако, нисколько не противоречит квантовой электродинамике, согласно которой *поле лишь в чистых энергетических состояниях содержит целое число фотонов* N. Этот класс состояний с определенным числом фотонов является весьма частным и даже экзотическим с точки зрения его экспериментального изготовления, если исключить состояние вакуума с N=0. В случае же когерентных, а также смешанных состояний поля $\langle N \rangle = \langle \mathcal{H} \rangle / \hbar \omega_0$ может быть любым неотрицательным числом.

Парадокс, как обычно, возникает из-за терминологической путаницы: величина $\mathscr{E} = \hbar \omega_0/2$ есть средняя по ансамблю атомов энергия при $t=0: \langle \mathscr{H}(0) \rangle = \mathscr{E}$, она не имеет отношения к результату однократного измерения энергии \mathscr{E}_i , которое даст с равной вероятностью $\mathscr{E}_1 = 0$ или $\mathscr{E}_2 = \hbar \omega_0$. При $t \gg 1/A$ энергия поля равна $\hbar \omega_0/2$ лишь в среднем, от-

дельное же измерение числа фотонов, т. е. энергии поля, даст, согласно основному постулату квантовой механики, лишь целое число фотонов 0, 1, 2, ...

Итак, обмен энергией между атомами и полем долями квантов все же возможен с оговоркой, что под словом «энергия» понимается средняя по ансамблю энергия $\mathscr{E} = \langle \mathscr{H} \rangle$. Энергия же, передаваемая в одиночном акте, не определена, так как начальное состояние атома практически всегда неэнергетическое.

[°]Квантовые биения. В случае многоуровневой системы естественную ширину линий можно объяснить тем, что все возбужденные уровни имеют конечное время жизни

$$\Delta t_m = 1/A_m \equiv 1/\sum_{n < m} A_{nm} \tag{5.2.22}$$

вследствие спонтанных переходов на все нижележащие уровни (вероятности A_{nm} определяются формулой (8) при $\omega_0^3 d_0^2 \longrightarrow \omega_{mn}^3 |d_{nm}|^2$. Время жизни системы на уровне Δt_m , вследствие соотношения неопределенностей $\Delta \mathscr{E} \Delta t = \hbar$, приводит к уширению уровня, равному в единицах круговой частоты обратному времени жизни:

$$\Delta \omega_{m} \equiv \Delta \mathscr{E}_{m}/\hbar = 1/\Delta t_{m}! = \sum_{n < m} A_{nm}. \qquad (5.2.23)$$

Наконец, ширина линии излучения или поглощения, связанная с какой-либо парой уровней, определяется, очевидно, суммой ширин обоих комбинирующих уровней:

$$\Delta \omega_{mk} = \Delta \omega_m + \Delta \omega_k. \tag{5.2.24}$$

Отсюда следует, что слабая линия с $d_{23} \approx 0$ может иметь большую естественную ширину за счет больших d_{12} и d_{13} .

Спонтанное излучение многоуровневой системы в случае ее когерентного возбуждения имеет интересную особенность — его мощность осциллирует во времени. Рассмотрим зависимость мощности дипольного излучения от времени.

Согласно «усовершенствованной» полуклассической формуле (10) мощность, излучаемая атомом в данный момент времени, пропорциональна среднему от нормально-упорядоченного квадрата второй производной дипольного момента (для простоты обозначений полагаем все дипольные моменты переходов параллельными):

$$\mathcal{P}(t) = \frac{4}{3c^3} \sum_{|k|m} \rho_{kl} \, \vec{d}_{lm}^{(-)}(t) \, \vec{d}_{mk}^{(+)}(t).$$
 (5.2.25)

Здесь ρ_{kl} — матрица плотности атома в начальный момент времени $t_0 \equiv 0$. Она определяется условиями возбуждения, которое для наблюдения эффекта квантовых биений должно иметь импульсный характер (длительность возбуждающего импульса много меньше периода биений $2\pi/\omega_{32}$), что в случае газа достигается с помощью импульсного разряда или лазера, а в случае атомного пучка — пропусканием его через тонкую фольгу. В результате значительное число атомов оказывается в одном и том же чистом неэнергетическом состоянии $\rho(0)$, так что сигнал биений имеет определенную фазу и большую мощность.

После окончания импульса возбуждения динамика данного атома определяется его невозмущенным гамильтонианом \mathcal{H}_0 (релаксацию не учитываем, что допустимо при достаточно большой частоте биений: $\omega_{32}T_2 \ll 1$). При этом матричные элементы в энергетическом представлении зависят от времени гармонически:

$$d_{mn}(t) = d_{mn} \exp(i\omega_{mn}t), \quad \ddot{d}_{mn}(t) = -\omega_{mn}^2 d_{mn}(t). \quad (5.2.26)$$

Будем нумеровать уровни в порядке возрастания энергии, тогда матрицы положительно- и отрицательно-частотных операторов имеют «треугольный» вид:

$$d_{mn}^{(+)}(t) = d_{mn}(t)\theta_{nm}, \quad d_{mn}^{(-)}(t) = d_{mn}(t)\theta_{mn}, \quad (5.2.27)$$

где $\theta_{mn} \equiv 1$ при m > n и 0 при m < n (см. (14) для случая двухуровневой системы). В результате в сумме (25) остаются лишь слагаемые с m < k, m < l:

$$\mathcal{P}(t) = (4/3c^3) \sum_{\substack{m < k \\ m < l}} \omega_{lm}^2 \omega_{mk}^2 \rho_{kl} d_{lm} d_{mk} \exp(i\omega_{lk} t).$$
(5.2.28)

В частности, мощность, излучаемая трехуровневой системой, содержит четыре слагаемых:

$$\mathcal{P}(t) = \hbar \left(\omega_{31} A_{13} + \omega_{32} A_{23} \right) \rho_{33} + \hbar \omega_{21} A_{12} \rho_{22} + 2\hbar \left(\omega_{31} \omega_{21} A_{13} A_{12} \right)^{1/2} |\rho_{32}| \cos \left(\omega_{32} t + \varphi \right),$$
(5.2.29)

где

$$A_{nm} = 4\omega_{mn}^3 |d_{mn}|^2 / 3\hbar c^3, \quad \varphi = \arg(\rho_{23} d_{31} d_{12}).$$

Первые три слагаемых в (29) пропорциональны населенностям возбужденных уровней и соответствуют обычному спонтанному излучению



Рис. 5.4. Квантовые биения: *a*) дипольный момент трехуровневой системы, находящейся в когерентном состоянии с неопределенной энергией (штриховая линия), осциллирует с частотами ω₂₁ и ω₃₁; б) в результате мощность спонтанного излучения *У* промодулирована с частотой биений ω₃₂==ω₃₁--ω₂₁

с постоянной в рамках нашего приближения мощностью; для учета излучательной потери энергии в эти слагаемые надо добавить множители $\exp(-A_{ma}t)$. Последнее слагаемое в (29) описывает при $A_{mn} \ll \omega_{32} \ll \omega_{21} \sim \omega_{31}$ эффект *квантовых биений* — периодическую модуляцию с разностной частотой $\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21}$ мощности суммарного спонтанного излучения с двух близких уровней 2 и 3 (рис. 5.4)¹).

Представим (29) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \mathcal{P}_{0} \left[1 + m \cos\left(\omega_{32}t + \varphi\right) \right], \\ \mathcal{P}_{0} &= \hbar \omega_{21} A_{12} \rho_{22} + \hbar \omega_{31} A_{13} \rho_{33}, \\ m &= 2\hbar \left(\omega_{31} \omega_{21} A_{13} A_{12} \right)^{1/2} |\rho_{32}| / \mathcal{P}_{0}, \end{aligned}$$
 (5.2.30)

где мы пренебрегали слабым излучением на разностной частоте ω_{32} (обычно она лежит в радиодиапазоне). Если состояние атома чистое, то $\rho_{mn} = c_m c_n^*$ и

$$m = 2/(\varepsilon + 1/\varepsilon), \quad \varepsilon \equiv |\omega_{31}^2 c_3 d_{31}/\omega_{21}^2 c_2 d_{21}|.$$
 (5.2.31)

Таким образом, коэффициент модуляции *m* достигает единицы при $A_{31} \approx A_{21}$ и возбуждении атома в когерентное состояние $|t_0\rangle = = (|2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{2}$. С классической точки зрения атом излучает две синусоидальные волны, которые интерферируют, и в результате в некоторые моменты времени излучение прекращается полностью, а в другие — удваивается. Однако следует помнить, что наблюдать картину биений в случае одного атома невозможно (измеряя энергию поля) — нужно многократное повторение опыта с различными *t*. Практически используется много атомов в одинаковом состоянии.

Обычно уровни 2, 3 соответствуют тонкой или сверхтонкой структуре, а также зеемановским подуровням, так что частота биений лежит в радиодиапазоне и модуляция может быть обнаружена радиоэлектронными методами (ФЭУ позволяют обнаруживать модуляцию до частот порядка 100 МГц). Существенно, что квантовые биения — одноатомный эффект, и поэтому эффект Доплера практически не изменяет частоту биений, что позволяет измерять малые расщепления уровней [29].

Заметим, что в последнее время — начиная с середины шестидесятых годов — был разработан еще один метод, также использующий спектральный анализ фототока (вместо прямого анализа света), но в стационарном режиме. Этот метод называется спектроскопией *опти*ческого смешения или спектроскопией *флуктуаций интенсивности* и позволяет наблюдать крайне малые частотные расщепления в диапазоне около 1 Гц [57].

°Резонансная флуоресценция. Рассмотрим теперь случай холодного газа, в котором $\pi T \ll \hbar \omega_0$ и атомы возбуждаются падающим извне направленным излучением. Суммарное вторичное поле макроскопического образца можно разделить на две части — когерентную с падающим полем и рассеянную.

Когерентная часть обусловлена средней по пространству плотностью числа атомов, она интерферирует с падающим первичным полем, и в результате образуется общее результирующее поле, которое распространяется в среде без изменения направления распространения.

¹) Отметим, что если в (25) опустить индексы «±», то в (29) появятся биения с частотой ω₂₁, которые в эксперименте не наблюдаются.

Однородное вещество, т. е. постоянная составляющая в пространственном фурье-разложении массы вещества, лишь замедляет скорость распространения волны и — при учете диссипации энергии — уменьшает ее амплитуду. Эти эффекты описываются макроскопической восприимчивостью вещества (гл. 4).

Рассеянное в стороны вторичное излучение обусловлено атомной неоднородностью вещества. Поля отдельных атомов некогерентны друг с другом, и поэтому суммарная мощность рассеянного излучения аддитивна, т. е. равна произведению числа атомов на мощность излучения \mathcal{P} одного атома (при условии, что можно пренебречь повторным, многократным рассеянием — это приближение называется борновским). Оптический ангармонизм вещества (§ 6.2) приводит к появлению в спектре вторичного излучения кроме упругой (несмещенной) компоненты ряда новых составляющих, несущих ценную информацию о структуре вещества (эффекты люминесценции, рамановского рассеяния и др.).

Здесь мы рассмотрим с помощью гироскопической модели эффект *резонансной флуоресценции* (резонансного рассеяния), при которой наблюдается излучение в окрестности какого-либо перехода с частотой ω_0 при возбуждении светом с частотой ω , также близкой к ω_0 . Это явление, которое было обнаружено еще в начале века Вудом в парах натрия, в последнее время вновь привлекло к себе внимание в связи с открытием двух его интересных особенностей.

Во-первых, при резонансной флуоресценции одиночных атомов поле переходит в состояния с необычной статистикой, не описываемой классической статистической оптикой, а именно в состояния с антигруппировкой фотонов и в сжатые состояния (подробнее см. гл. 7).



Рис. 5.5. Резонансная флуоресценция. Монохроматическое внешнее поле модулирует волновую функцию двухуровневой системы с частотами ω и ω±Ω, поэтому спектр поля рассеяния состоит из трех компонент: а) малая расстройка и сильное поле; б) большая расстройка; в) при большой расстройке появление сателлитов объясняется четырехфотонным процессом, при котором два фотона накачки (жирные стрелки) превращаются в два фотона с частотами ω₀ и 2ω—ω₀

Во-вторых, при большой интенсивности падающего света (накачки) в спектре рассеянного света рядом с упругой (рэлеевской) компонентой появляются два сателлита с частотами $\omega \pm \tilde{\Omega}$ (рис. 5.5). Здесь $\tilde{\Omega} \equiv [\Omega^2 + (\omega_0 - \omega)^2]^{1/2}$ — обобщенная частота Раби и $\Omega \equiv d_0 E_0 / \hbar$. Кроме
того, наблюдается усиление слабого зондирующего света на этих частотах за счет энергии накачки.

Спектр рассеянного света наблюдается в стационарных условиях, при этом количественная теория требует учета релаксации и квантования поля (см., например, [72]), однако качественно появление сателлитов легко объяснить в рамках полуклассической теории при пренебрежении релаксацией. Согласно (5.1.3) монохроматическое поле вызывает, кроме прецессии вектора R(t) с частотой поля ω , также и его нутацию с частотой $\tilde{\Omega}$ (рис. 5.1). В результате средний дипольный момент атома $\langle d(t) \rangle \sim R_x(t)$ и излучаемое им поле должны содержать частоты ω и $\omega \pm \tilde{\Omega}$. Таким образом, нелинейность двухуровневой системы приводит к модуляции рассеиваемого ею поля с обобщенной частотой Раби $\tilde{\Omega}$ (ср. с эффектом комбинационного рассеяния, при котором частота модуляции совпадает с одной из частот системы, так что сателлиты имеют частоты $\omega \pm \omega_0$, и с эффектом оптической нутации — см. § 5.1).

Рассмотрим два крайних случая. Пусть $|\omega_0-\omega|\ll\Omega$, тогда $\tilde{\Omega}\approx\Omega$ и спектр резонансной люминесценции представляет собой симметричный относительно частоты перехода триплет ω_0 , $\omega_0\pm d_0E_0/\hbar$ (рис. 5.5, *a*). При обратном неравенстве $\tilde{\Omega}\approx|\omega_0-\omega|$ и спектр состоит из центральной упругой компоненты ω , излучения на частоте перехода ω_0 и «зеркальной» компоненты $2\omega-\omega_0$ (рис. 5.5, *б*). С фотонной точки зрения излучение на частотах ω_0 и $2\omega-\omega_0$ представляет собой результат единого четырехфотонного элементарного процесса — поглощения двух фотонов падающего света и излучения двух вторичных фотонов по схеме $2\hbar\omega \rightarrow \hbar\omega_0 + \hbar (2\omega-\omega_0)$ (рис. 5.5, *в*).

Заметим, что в нерезонансном случае излучение в области перехода происходит не точно на частоте ω_0 , а со сдвигом. Пусть $\Omega \ll \omega_0 - \omega > 0$, тогда частота антистоксова сателлита (правого на шкале частот) будет равна

$$\omega_{0} = \omega + [\Omega^{2} + (\omega_{0} - \omega)^{2}]^{1/2} \approx \omega_{0} + (d_{0}E_{0}/\hbar)^{2}/2(\omega_{0} - \omega). \quad (5.2.32)$$

Этот сдвиг наблюдаемой частоты перехода, зависящий от интенсивности возмущающего излучения, называется высокочастотным или оптическим эффектом Штарка. Как следует из (32), он по порядку равен квадрату энергии возмущения Ω в частотных единицах, деленному на расстройку.

Оценим общую мощность излучения. Согласно (5.1.7) и (16)

$$\mathcal{P}(t) \approx \hbar \omega_0 A \rho_{22}(t) = \hbar \omega_0 A \left(\Omega/\bar{\Omega}\right)^2 \sin^2(\bar{\Omega}t/2). \qquad (5.2.33)$$

Таким образом, при пренебрежении релаксацией \mathcal{P} осциллирует с частотой $\tilde{\Omega}$, т. е. процесс нестационарен и понятие спектральной мощности неприменимо. Характерно, что в нерезонансном случае \mathcal{P} пропорциональна $d_0^4/(\omega_0 - \omega)^2$.

Выше не учитывалась релаксация. Интуитивно ясно, что она должна привести к уширению дискретных спектральных компонент до величины порядка $2/T_2$ (рис. 5.5). Отсюда следует, что условие наблюдения сателлитов в случае $\omega = \omega_0$ имеет вид $\Omega > 2/T_2$, т. е. должно иметь место сильное насыщение, что практически возможно лишь при использовании лазеров (эффект был обнаружен в 1974 г. [31]). Заметим, что согласно уравнениям Блоха с учетом релаксации (§ 4.4) нутация вектора R в стационарных условиях исчезает, так что приведенное выше объяснение эффекта, казалось бы, неверно. Однако кинетические уравнения Блоха не описывают флуктуации R, вызванные термостатом и содержащие частоту $\tilde{\Omega}$.

Если отказаться от приближения вращающейся волны, то двухуровневая модель будет описывать ряд других нелинейных эффектов, например излучение на частоте З ω . В случае поляризованного атома (или молекулы) с отличными от нуля диагональными моментами $d_{nn} \neq 0$ (а также в случае магнитного резонанса) добавятся двухфотонное поглощение и эффект Рамана — излучение на частотах $\omega \pm \omega_0$. Итак, согласно простейшей двухуровневой модели атома вещество при рассеянии изменяет спектральный состав падающего света, что является проявлением его нелинейных свойств — оптического ангармонизма (другой простой нелинейный эффект — насыщение — был рассмотрен в § 4.3).

§ 5.3. Коллективное излучение

Как уже отмечалось, характер излучения макроскопического вещества резко зависит от условий его возбуждения. При обычном хаотическом (некогерентном) возбуждении состояния отдельных атомов статистически независимы, вещество описывается диагональной матрицей плотности, и в результате мощность излучения \mathcal{P} линейно зависит от общего числа атомов N (полагаем, что линейные размеры образца много меньше длины пробега фотона: $\alpha l \ll 1$). В случае же когерентного возбуждения все N атомов находятся в одинаковых состояниях и можно описывать образец общей волновой функцией. При этом, как легко убедиться с помощью полуклассической теории, \mathcal{P} может зависеть от N квадратично, что должно качественно изменить картину. Ниже мы рассмотрим два необычных оптических эффекта, обязанных своим возникновением установлению квантовой когерентности в макроскопическом образце.

Эффект сверхизлучения. Пусть в начальный момент времени имеется N одинаковых атомов, находящихся в независимых когерентных состояниях

$$\psi_j = \{|1\rangle_j + |2\rangle_j \exp\left[-i\left(\omega_0 t + \varphi_j\right)\right]\} / \sqrt{2}.$$
 (5.3.1)

Это частный случай возможного состояния системы из N различимых (по координатам r_j) частиц, когда волновая функция системы факторизована:

$$\psi = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_N = \prod_{j=1}^N \psi_j. \qquad (5.3.2)$$

Найдем средний дипольный момент системы

$$\langle d \rangle = \langle \psi | \sum_{j} d_{j} | \psi \rangle = \sum_{j} \langle \psi_{j} | d_{j} | \psi_{j} \rangle = d_{0} \sum_{j} \cos (\omega_{0} t + \psi_{j}), \quad (5.3.3)$$

считаем моменты перехода $d_0 = d_{12}$ вещественными и ориентированными вдоль определенной оси. Здесь фаза когерентного состояния φ_j для *j*-го атома имеет наглядный смысл — это фаза прецессионного движения вектора Блоха (при приготовлении состояния с помощью $\pi/2$ -импульса она определяется фазой поля в точке нахождения атома r_j). Если N=2, то согласно (3) амплитуда осцилляций общего дипольного момента удваивается при $\varphi_1 = \varphi_2$ и обращается в нуль при $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$. В случае N атомов с одинаковыми φ_j имеем

 $\langle d \rangle = N d_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$

Предположим далее, что линейные размеры системы много меньше длины волны, $l \ll \lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$, так что применима формула (5.2.3) для мощности дипольного излучения. Если заменить в ней $d_{\mathbf{k}\pi}$ на $\langle d \rangle$, то при одинаковых фазах получим $\mathcal{P}_{\mathbf{k}\sigma\mathbf{r}} \sim N^2$ — мощность, излучаемая осциллирующими с одинаковыми фазами диполями, пропорциональна квадрату их числа. Этот эффект когерентного (коллективного, кооперативного) спонтанного излучения многоатомной системы называется сверхизлучением. Хотя его классическая интерпретация тривиальна, квантовая теория была впервые рассмотрена лишь в 1954 г. Дике [7, 27].

Близкое по существу явление наблюдалось до этого в радиодиапазоне в экспериментах по ядерному магнитному резонансу — ЯМР. При этом парамагнитный образец помещается внутри двух скрещенных катушек индуктивности (метод магнитной индукции). Резонансный ток в одной из катушек возбуждает вынужденную прецессию макроскопического магнитного момента образца *M* вокруг направления постоянного магнитного поля (см. (4.4.34)). Вращающийся момент *M* наводит во второй, приемной, катушке ЭДС индукции. В результате мощность наблюдаемого сигнала пропорциональна квадрату числа ядер в образце.

Когерентное излучение сфазированных диполей наблюдается и во многих эффектах нелинейной оптики типа генерации гармоник. Однако здесь, как и в явлении ядерной индукции, излучение происходит на частоте внешней силы, которая может в оптике сильно отличаться от собственных частот переходов. Существенно, что условие $l \ll \lambda$ необязательно — при подходящем набеге фазы вынужденной или свободной прецессии вдоль какого-то направления, когда $\varphi_j = kz_j$ (условие *пространственного синхронизма*), излучение в этом направлении будет когерентным (здесь k — волновой вектор и z_j — координата *j*-го атома). Таким образом, сверхизлучение протяженных систем неизотропно, оно максимально в направлении синхронизма z^{1}).

Полуклассический подход, использующий формулу (5.2.3) для мощности когерентного излучения с заменой $d_{\kappa\pi}$ на $\langle d \rangle$, дает точный результат лишь при $N \gg 1$. Напомним, что при N = 1 пришлось ввести дополнительный множитель 2 в формулу (5.2.4). Как уже говорилось выше, в общем случае надо вместо $d_{\kappa\pi}^2$ использовать нормально упорядоченный квадрат $2 \langle d^{(-)} d^{(+)} \rangle$, что приводит

¹) Мы уже встречали в § 5.1 пример такого явления — затухание свободной поляризации.

к замене N^2 на N(N+1):

 $\langle d^{(-)} d^{(+)} \rangle =$

$$= \sum_{jk} \langle d_{j}^{(-)} d_{k}^{(+)} \rangle = \sum_{j} \langle \psi_{j} | d_{j}^{(-)} d_{j}^{(+)} | \psi_{j} \rangle + \sum_{j \neq k} \langle \psi_{j} | d_{j}^{(-)} | \psi_{j} \rangle \langle \psi_{k} | d_{k}^{(+)} | \psi_{k} \rangle = d_{0}^{2} \left[N + \sum_{j < k} \cos(\varphi_{j} - \varphi_{k}) \right] / 2 = d_{0}^{2} N (N+1) / 4. \quad (5.3.4)$$

Подставляя (4) в (5.2.10), получаем следующее выражение для мощности сверхизлучения N атомов, находящихся в когерентных состояниях:

$$\mathcal{P}_{\mu \sigma r} = \hbar \omega_0 A N \left(N + 1 \right) / 4.$$
(5.3.5)

Последнее равенство в (4) предполагает равенство всех фаз φ_j — взаимную когерентность состояний.

Если же фазы прецессии являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в интервале $0-2\pi$, то все косинусы после усреднения обратятся в нуль и в (4) останутся лишь N диагональных слагаемых

$$\mathcal{P}_{\mathbf{H} \in \mathbf{K} \mathbf{O} \mathbf{\Gamma}} = \hbar \omega_0 A N/2. \tag{5.3.6}$$

Здесь буквенный индекс подчеркивает взаимную некогерентность излучения отдельных атомов, каждый из которых находится в когерентном состоянии на экваторе сферы Блоха.

Ясно, что кроме рассмотренных крайних случаев (4) и (6) возможно множество других состояний *N*-атомной системы. В частности, как видно из приведенного выше примера для двух атомов, возможны *безызлучательные состояния*, когда коллективные эффекты подавляют дипольное спонтанное излучение.

При учете теряемой на излучение энергии спонтанное сверхизлучение будет быстро затухать. Длительность импульса сверхизлучения можно оценить, разделив запасенную системой энергию $\hbar\omega_0 N/2$ на начальную мощность когерентного излучения (5):

$$\tau_{\rm ROF} \approx 2/A \ (N+1).$$
 (5.3.7)

Итак, при $N \gg 1$ и $l \ll \lambda$ излучательное время жизни когерентного состояния N-атомной системы сокращается в N/2 раз вследствие коллективного эффекта. Однако, как уже отмечалось, в протяженных системах сверхизлучение направленно, т. е. эффективно «работает», забирает энергию лишь часть мод поля, и поэтому $\tau_{\kappa or}$ возрастает (примерно в $4\pi/\Delta\Omega$ раз, где $\Delta\Omega$ — эффективный телесный угол, в который происходит излучение). При вытянутой форме образца с числом Френеля $a^2/\lambda l \sim 1$ это замедление сверхизлучения имеет порядок $(a/\lambda)^2 \sim l/\lambda \gg 1$, где a^2 — сечение образца, l — длина.

Рассмотрим теперь случай энергетического начального состояния *N*-атомной системы: $\psi(0) = \Pi | 2 \rangle_j$. Вектор Блоха каждого атома направлен вверх, на северный полюс. В первые моменты времени атомы излучают независимо,

$$p^{2} \sim 2 \langle \psi | d^{(-)} d^{(+)} | \psi \rangle = N d_{0}^{2},$$
 (5.3.8)

и постепенно переходят из энергетического состояния в когерентные с какими-то углами ϑ_i и фазами φ_i прецессии.

Однако можно ожидать, что атомы влияют друг на друга через поперечное поле, и поэтому фазы прецессии должны взаимно синхронизоваться (при достаточной плотно-

низоваться (при достаточной плотности атомов [30]). В результате через какое-то время задержки t₀ система самопроизвольно перейдет в сверхизлучающее когерентное состояние со сфазированными диполями. В этот момент медленное спонтанное излучение перейдет в короткий мощный импульс сверхизлучения с определенной фазой поля (рис. 5.6).

Аналогия с фазовыми переходами. Последовательная теория, а также эксперимент (см. [30]), впервые проведенный в 1973 г., подтверждают рассмотренную качественную картину. Часто именно этот удивительный эффект называют сверхизлучением. Спонтанное установление упорядоченного когерентного состояния из хаотического со-



Рис. 5.6. Зависимость от времени мощности излучения атомов, возбужденных в момент времени t=0: 1 — обычное (некогерентное) спонтанное излучение, наблюдаемое при малой плотности атомов; 2 — сверхизлучение при когерентном начальном состоянии атомов; 3 — сверхизлучение при энергетическом начальном состоянии происходит с характерной задержкой t₀

стояния в макросистемах вообще представляет большой интерес для физики. Отметим аналогию между процессом спонтанного формирования сверхизлучающего состояния в системе возбужденных атомов и фазовыми переходами в равновесном веществе. Другой пример такого фазового перехода в неравновесной системе --- установление автоколебаний с определенной фазой и макроскопической амплитудой при достижении порога в лазере [32, 50, 52]. Здесь также в результате взаимодействия атомов (через поле резонатора) хаотическое шумовое поле сменяется упорядоченным и устанавливается регулярная переменная макроскопическая поляризация. Заметим, что в равновесных системах причиной фазовых переходов также является взаимодействие атомов или молекул через поле, но только статическое. Грубое описание сегнетоэлектрического перехода дает модель Лоренца — согласно (4.2.11) при достаточной плотности атомов частота резонанса поляризации обращается в нуль. При этом восприимчивость на нулевой частоте стремится к бесконечности и в системе самопроизвольно устанавливается макроскопическая статическая поляризация.

Сверхизлучение в инвертированной системе следует отличать от сверхлюминесценции (стационарной или импульсной) — усиленного спонтанного излучения (§ 7.1). В режиме сверхлюминесценции процессы безызлучательной релаксации (например, столкновения в газах, взаимодействие с фононами в твердых телах) препятствуют установлению когерентности в макроскопических объемах, и поэтому излучение определяется числом частиц в первой, а не второй степени.

Оптическое эхо. В случае неоднородного уширения различные атомы имеют слегка различные собственные частоты (из-за эффекта Доплера, неоднородных статических полей и др.). При этом наблюдаемая ширина линии Δω=2/T₂^{*} какого-либо перехода много больше столкновительной или радиационной ширины 2/Т.



Рис. 5.7. Эффект оптического эхо. После возбуждения вещества двумя короткими световыми импульсами (штриховые линии на верхнем рисунке) оно излучает вспышку света (сплошная линия) спустя время to, равное интервалу между импульсами. Эффект объясняется совпадением фаз колебаний зарядов отдельных молекул в момент $2t_0$ (нижний рисунок)

Пусть под действием короткого ($\tau_E \ll T_2^*$) резонансного $\pi/2$ -импульса атомы образца перешли из основного состояния в одинаковые когерентные состояния на экваторе сферы Блоха (рис. 5.7). При этом возникает поляризация

$$P(t) = \sum_{j=1}^{N} \langle d_j(t) \rangle = d_0 \sum_j R_x^{(j)}(t) = d_0 \sum_j \sin(\omega_{21}^{(j)}t). \quad (5.3.9)$$

Здесь *N*—плотность числа частиц, $d_0 \equiv d_{12}^{(j)}$ —момент перехода, $R^{(j)}$ — вектор Блоха *j*-го атома с компонентами $2\rho_{21}^{(j)'}$, $2\rho_{21}^{(j)''}$, $\rho_{11}^{(j)}$ — $\rho_{22}^{(j)}$. В первые моменты времени—при $t \ll T_2^*$ —можно пренебречь

разбросом собственных частот $\omega_{21}^{(j)}$, так что

$$P(t) = Nd_0 \sin(\omega_0 t),$$
 (5.3.10)

где $\omega_0 = \omega_{21}^{(j)}$ — средняя частота переходов. Макроскопическая поляризация (10) сопровождается мощным сверхизлучением. Однако через короткое время T_2^* диполи в (9) расфазируются, P(t) практически обратится в нуль и будет происходить лишь медленное спонтанное излучение с характерным временем $T_1 = 1/A$.

Процесс расфазировки наглядно представляется с помощью векторной модели (§ 5.1). Во вращающейся с частотой ω, системе коор-

динат векторы $\mathbf{R}_{0}^{(j)}$ будут прецессировать по или против часовой стрелки с угловыми скоростями $\Delta \omega_{j} \equiv \omega_{21}^{(j)} - \omega_{0}$, лежащими в интервале $-\Delta \omega - +\Delta \omega$. До действия импульса $\pi/2$ все $\mathbf{R}_{0}^{(j)}$ были направлены вниз вдоль оси *z*, а непосредственно после его окончания — вдоль оси *y* сферы Блоха (длительностью импульса пренебрегаем): $R_{0y}^{(j)}(0) = 1$.

Пусть T_2^* много меньше времени сверхизлучения $\tau_{\text{ког}}$ и $t \ll T_1$, тогда можно пренебречь излучательными потерями энергии и векторы Блоха будут прецессировать каждый со своей скоростью в экваториальной плоскости, которую они при $t > T_2^*$ равномерно заполнят. Начальная стадия этого процесса подобна разворачиванию сложенного веера (рис. 5.7).

Аналитически прецессия *j*-го атома во вращающейся системе координат описывается формулой

$$\rho_0^{(j)} = (i/2) \exp(-i\Delta\omega_j t), \qquad (5.3.11)$$

где $\rho_{21}^{(j)} \equiv \rho_{21}^{(j)} \exp(i\omega_0 t)$ — «медленная» амплитуда недиагонального элемента матрицы плотности.

На первый взгляд этот распад макроскопической упорядоченности необратим. Однако существует остроумный метод восстановления когерентного состояния системы при условии $t < T_2$, где T_2 характерное время необратимого сбоя фазы прецессии из-за столкновений. Для этого на систему в некоторый момент t_0 действуют вторым резонансным импульсом с «площадью» π .

Согласно гироскопическому уравнению Блоха (5.1.3) л-импульс поворачивает вектор $\mathbf{R}_{0}^{(j)}$ на 180° вокруг оси *x* (рис. 5.7). Поскольку $\mathbf{R}_{0}^{(j)}$ лежит в экваториальной плоскости, то это эквивалентно зеркальному отражению в плоскости *xz* или изменению знака $R_{0y}^{(j)}$, т. е. комплексному сопряжению $\rho_{0y}^{(j)}(t_{0})$.

Легко убедиться, что после этой операции «веер» из векторов $R_0^{(j)}$ начинает складываться обратно и в момент $t = 2t_0$ все векторы будут снова параллельны (рис. 5.7)—на этот раз они ориентированы в направлении $-y: R_{0y}^{(j)}(2t_0) = -1$, $\rho_0^{(j)}(2t_0) = -i/2$ (длительностью импульса пренебрегаем).

В этот момент опять возникает импульс сверхизлучения с длительностью порядка T_2^* (рис. 5.7). Этот импульс собственного излучения образца, появляющийся через время t_0 после второго внешнего импульса, и называется оптическим или спиновым эхом. При увеличении интервала t_0 амплитуда эхо-сигнала падает как $\exp(-2t_0/T_2)$.

Появление эхо при $t = 2t_0$ можно образно объяснить по аналогии с бегунами на стадионе, которые при t = 0 начинают бежать с разными скоростями. При $t = t_0$ они одновременно поворачиваются и бегут обратно с теми же скоростями. Ясно, что при $t = 2t_0$ они одновременно пересекут линию старта.

Аналитически восстановление когерентности под действием л-импульса также описывается очень просто. Перед приходом импульса

$$\rho_0^{(j)}(t_0 - 0) = (i/2) \exp(-i\Delta\omega_j t_0), \qquad (5.3.12)$$

а непосредственно после¹)--

$$\rho_0^{(j)}(t_0+0) = \rho_0^{(j)}(t_0-0)^* = -(i/2) \exp(i\Delta\omega_j t_0). \quad (5.3.13)$$

Далее при $t > t_0$ снова происходит свободная прецессия с начальной амплитудой (13):

$$\rho_0^{(j)}(t) = \rho_0^j(t_0 + 0) \exp\left[-i\Delta\omega_j(t - t_0)\right] = -(i/2) \exp\left[-i\Delta\omega_j(t - 2t_0)\right].$$
(5.3.14)

Следовательно, при $t = 2t_0$ все $\rho_0^{(j)}$ приобретают одинаковые значения.

Это одно из наиболее красивых явлений квантовой электроники было открыто Ханом в 1950 г. в экспериментах по ЯМР (здесь неоднородность уширения вызывается неоднородностью постоянного магнитного поля) и названо спиновым эхо. В оптическом диапазоне оно впервые наблюдалось в рубине Курни и др. в 1964 г. с помощью рубинового лазера. Спиновое и оптическое эхо используют для измерения релаксационных параметров и тонкой структуры переходов (эхо-спектроскопия — см. [75]).

¹) Отметим, что аналогичная операция комплексного сопряжения амплитуды (или обращения знака времени) лежит в основе эффекта обращения волнового фронта (§ 6.5).

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

С некоторыми нелинейно-оптическими явлениями мы уже встречались выше (эффект насыщения, резонансная флуоресценция). В настоящей главе будет проведено более систематическое описание этих явлений.

Хотя большинство нелинейных оптических явлений хорошо описывается полуклассической теорией излучения и не требует квантования поля, многие эффекты наглядно объясняются и классифицируются на фотонном языке. Например, эффект удвоения частоты света можно представлять как результат элементарных трехфотонных процессов, в каждом из которых в результате взаимодействия поля с веществом уничтожаются два фотона падающего света (накачки) и рождается один фотон с двойной энергией $2\hbar\omega$ (рис. 6.1, *a*). Из рисунка ясно, что поскольку вещество в результате процесса не изменяет исходной энергии (такие процессы называются *параметрическими*), то энергия рождающегося фотона ровно в два раза превышает энергию фотонов накачки.

В случае бигармонической накачки с частотами ω_1 , ω_2 вещество излучает фотоны с комбинационной частотой: $\omega_0 = \omega_1 \pm \omega_2$ (эффекты сложения и вычитания частоты — см. рис. 6.1, б и в). Аналогично описываются четырехфотонные процессы и процессы более высокого порядка. В параметрическом генераторе света и при соответствующем спонтанном процессе — параметрическом рассеянии света — происходят процессы, обратные сложению двух частот. Здесь фотон накачки распадается на два фотона с дробными частотами: $\omega_0 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ (рис. 6.1, г).

Эффективность параметрических процессов в случае макроскопического вещества резко увеличивается при выполнении закона сохранения импульса для фотонов: $k_1 + k_2 = k_0$. Это равенство называется условием пространственного синхронизма или фазового согласования.

При непараметрических процессах вещество изменяет свою энергию, переходит на другие уровни. Например, при двухфотонном поглощении два фотона накачки уничтожаются, а атом переходит на возбужденный уровень (рис. 1.6, ∂). Такие процессы приводят к нелинейному поглощению, пропорциональному квадрату интенсивности поля. При рамановском двухфотонном переходе уничтожается и рождается по одному фотону с различной энергией (рис. 6.1, π , 3).

Все эти эффекты, как параметрические, так и непараметрические, широко используются в нелинейной спектроскопии, а также для изменения частоты когерентного лазерного излучения. Большую роль играют нелинейно-оптические эффекты в проблемах лазерного термоядерного синтеза, лазерного разделения изотопов, лазерной химии и в многих других областях квантовой электроники. Заметим также, чт возмож ность квантового усиления принципиально связана с нелинен ностью вещества, так как в линейной системе уровни эквидистантн и вынужденное излучение всегда компенсируется поглощением.



Рис. 6.1. Элементарные многофотонные процессы. Сплошные горизонтальные лини изображают реальные уровни энергии вещества, штриховые — виртуальные уровни стрелки, направленные вверх, — поглощаемые фотоны, вниз — излучаемые, жирны стрелки — фотоны первичного излучения (накачки), тонкие — вторичного или спотанного излучения; верхний ряд — трехфотонные параметрические (когерентны процессы, нижний — двухфотонные непараметрические; а) генерация второй гарм ники; б, в) сложение и вычитание частоты; г) параметрическое рассеяние; д) нер зонансное и резонансное (каскадное) двухфотонное поглощение; е) двухфотонное излучение (вынужденное, вынужденно-спонтанное и чисто спонтанное); ж, з) стосовы и антистоксовы рамановские процессы

При количественном описании эффектов нелинейной оптики, ка и в линейной оптике, используется разделение теории на две части – микро- и макроскопическую. Целью микротеории является вычисле ние поляризации вещества P(E), возникающей под действием задан ного поля E (в общем случае надо учитывать и магнитное поле H) Уравнения движения заряженных частиц нелинейны, поэтому функци или, точнее, функционал P(E) при разложении в ряд содержит квадра тичное по полю слагаемое $\chi^{(2)}E^3$, кубичное $\chi^{(3)}E^3$ и т. д. На макроско пическом этапе вычислений функция P(E) подставляется в уравнени Максвелла и отыскивается самосогласованное решение E, H при за данных источниках поля или граничных значениях. В соответстви с этой схемой в § 1 обсуждаются общие свойства $\chi^{(n)}$, в § 2 рассмат

AL AND ADDRESS

риваются различные модели оптического ангармонизма вещества, позволяющие оценить $\chi^{(n)}$, а в § 3—5 — основные задачи (и методы их решения) макроскопической нелинейной оптики, здесь же описываются некоторые наблюдаемые эффекты.

Надо отметить, что нестационарные задачи нелинейной оптики необходимо решать с помощью совместных уравнений для поля и вещества (без использования восприимчивостей). Например, количественный анализ эффекта самоиндуцированной прозрачности (§ 5.1) требует совместного решения уравнений Максвелла и Блоха.

Более подробно с нелинейной оптикой можно познакомиться с помощью работ [2, 3, 7, 14, 22, 33—41, 66—70]. В последнее время быстро развивается новое направление — нелинейная оптика поверхности [76]. Одно из наиболее интересных явлений этой области — гигантское комбинационное рассеяние света молекулами, адсорбированными на шероховатой поверхности металлов. Сечение такого рассеяния на несколько порядков превосходит сечение обычного объемного рассеяния (в расчете на одну молекулу).

§ 6.1. Нелинейные восприимчивости — определения и общие свойства

Прежде чем анализировать различные механизмы оптического ангармонизма, целесообразно выяснить общие свойства (например, симметрию нелинейного отклика вещества), не зависящие от выбранной конкретной модели. Для этого обобщим понятие феноменологической восприимчивости вещества (§ 4.1) на нелинейный случай.

Нелинейные восприимчивости. Пусть на вещество действует поле с дискретным спектром:

$$E(t) = (1/2) \sum_{n} E_{n} \exp(-i\omega_{n}t) + \kappa. c., \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.1)$$

Уравнения движения заряженных частиц вещества нелинейны. В результате индуцированные полем (1) смещения зарядов и, следовательно, поляризация P(t) будут содержать фурье-компоненты не только с частотами действующей силы ω_n , но и с комбинациями этих частот $\omega_n \pm \omega_m$, в том числе с кратными частотами $2\omega_n$ и с нулевой частотой $\omega_n - \omega_n = 0$.

Ограничимся сперва квадратичной по внешнему полю нелинейностью; тогда феноменологическая связь спектральных компонент поляризации вещества и напряженности электрического поля имеет вид

$$\boldsymbol{P}_{0}^{(2)} = \boldsymbol{\chi}^{(2)}(\omega_{1}, \omega_{2}) \boldsymbol{E}_{1} \boldsymbol{E}_{2}, \qquad (6.1.2)$$

где P_0 — комплексная амплитуда колебаний поляризации с частотой $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, причем пока полагаем $\omega_1 \neq \omega_2$. Определенная этим равенством квадратичная восприимчивость (или квадратичная поляризуемость) $\chi^{(2)}$ связывает три вектора и поэтому является тензором третьего ранга. Форма записи (2) не связана с определенной системой координат (часто используют также обозначение с двоеточием: $P_0 = \chi^{(2)}: E_1E_2$).

Если же фиксировать какую-либо декартову систему координат, то (2) примет вид

$$P_{0\alpha}^{(2)} = \sum_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} (\omega_1, \ \omega_2) E_{1\beta} E_{2\gamma}.$$
(6.1.3)

В дальнейшем знак суммирования по «немым» индексам β, γ будет, как это принято, опускаться.

Каждая из 27 компонент $\chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega, \omega')$ тензора $\chi^{(2)}$ является функцией двух независимых аргументов ω , ω' , принимающих значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку фурье-компоненты поля и поляризации комплексны, то $\chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$ — также комплексная величина и всего имеется 54 действительных функции от двух переменных. Однако, как будет показано ниже, между этими функциями существует целый ряд связей, уменьшающих число независимых величин.

Аналогично (3) определяют нелинейную восприимчивость произвольного порядка:

$$P_{\mathfrak{o}\alpha}^{(m)} = \chi_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_m}^{(m)} (\omega_1, \dots, \omega_m) E_{1\alpha_1}\dots E_{m\alpha_m},$$

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m.$$
(6.1.4)

Например, кубическая восприимчивость $\chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ является тензором четвертого ранга, каждая из 81 комплексных компонент которого зависит от трех непрерывных аргументов. Заметим, что декартовы индексы α , β , ... можно также рассматривать как аргументы функции $\chi^{(m)}$, принимающие по три дискретных значения.

Символически связь поляризации и поля можно записать в виде степенного ряда:

$$P(E) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi^{(m)} E^{m}.$$
 (6.1.5)

В спектральном представлении эта связь — алгебраическая, а во временном под $\chi^{(m)}$ следует понимать интегральные операторы. Ядра этих операторов $\chi^{(m)}(t_1, \ldots, t_m)$ (многовременные функции Грина или функции отклика вещества) определяют через спектральную восприимчивость $\chi^{(m)}(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ с помощью *m*-кратного преобразования Фурье (для m=1 см. (4.1.7)), причем, как и в линейном случае (§ 4.1), принцип причинности приводит к интегральным связям между вещественными и мнимыми частями $\chi^{(m)}$ типа соотношений Крамерса — Кронига.

Для учета действия магнитного поля вместо (5) следует писать двойной степенной ряд $\sum \chi^{(mn)} E^m H^n$. В некоторых эффектах нелинейной оптики проявляется пространственная дисперсия, которую можно описывать зависимостью $\chi^{(m)}$ не только от $\omega_1, \ldots, \omega_m$, но и от волновых векторов k_1, \ldots, k_m .

°Различные определения. Часто используют определение спектральных амплитуд \tilde{E}_n , отличающееся от принятого здесь (1) коэф-120 фициентом 1/2:

. . . .

$$\boldsymbol{E}(t) = \sum_{n} \tilde{\boldsymbol{E}}_{n} \exp\left(-i\omega_{n}t\right) + \kappa. c. \quad \tilde{\boldsymbol{E}}_{n} = \boldsymbol{E}_{n}/2. \quad (6.1.6)$$

Аналогично при $\omega_0 \neq 0$ $\tilde{P}_0 = P_0/2$, так что из (2) следует для квадратичной нелинейности:

$$\tilde{P}_{0}^{(2)} = (1/2) \chi^{(2)} E_{1} E_{2} = 2 \chi^{(2)} \tilde{E}_{1} \tilde{E}_{1} \equiv \tilde{\chi}^{(2)} \tilde{E}_{1} \tilde{E}_{2}.$$
(6.1.7)

Таким образом, двум различным определениям спектральных амплитуд поля и поляризации соответствует следующая связь между восприимчивостями *m*-го порядка:

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(m)} = 2^{m-1} \boldsymbol{\chi}^{(m)}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}} \neq 0.$$
(6.1.8)

Исключением из правила (8) являются восприимчивости четного порядка при $\omega_0 = 0$, описывающие эффект оптического выпрямления. Для них $\tilde{P}_0 = P_0$ и

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(m)} = 2^m \boldsymbol{\chi}^{(m)}, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = 0.$$

Предположим теперь, что можно пренебречь инерционностью отклика среды (безынерционное или клейнмановское приближение, допустимое в случае, когда частоты поля и их комбинации лежат в окнах прозрачности вещества). При этом поляризация мгновенно следует за полем и в случае m=2

$$P_{\alpha}^{(2)}(t) = \overline{\chi}_{\alpha\beta\gamma} E_{\beta}(t) E_{\gamma}(t), \qquad (6.1.9)$$

где $\overline{\chi}$ — некоторый вещественный постоянный тензор. В частности, $P_x^{(2)}(t) = \overline{\chi}_{xxx} E_x^2(t) + \overline{\chi}_{xxy} E_x(t) E_y(t) + \overline{\chi}_{xyx} E_y(t) E_x(t) + \overline{\chi}_{xyy} E_y^2(t) + \dots$ (6.1.10)

Из этого примера видно, что физический смысл имеет лишь сумма $\overline{\chi}_{\alpha\beta\gamma} + \overline{\chi}_{\alpha\gamma\beta}$, по отдельности эти компоненты не измеримы, поэтому тензор $\overline{\chi}$ симметричен по последним индексам, а тензор $\overline{\chi}^{(m)}$ — по всем индексам, кроме первого¹). Полагая в (9) поле бигармоническим, получим

$$P_{\alpha}^{(2)}(t) = (1/2) \overline{\chi}_{\alpha\beta\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1,2} \left[E_{n\beta} E_{n\gamma}^{*} + E_{n\beta} E_{n\gamma} \exp\left(-2i\omega_{n}t\right) \right] + 2E_{1\beta} E_{2\gamma} \exp\left[-i\left(\omega_{1} + \omega_{2}\right)t\right] + 2E_{1\beta} E_{2\gamma}^{*} \exp\left[-i\left(\omega_{1} - \omega_{2}\right)t\right] \right\}. \quad (6.1.11)$$

Первое слагаемое описывает здесь оптическое выпрямление, второе — генерацию гармоник, третье и четвертое — сложение и вычитание двух частот.

¹⁾ Ниже из энергетических соображений показано, что тензоры $\overline{\chi}^{(m)}$ полностью симметричны.

С другой стороны, из определения восприимчивости (3) (индекс порядка восприимчивости будем иногда опускать)

$$P_{\alpha}^{(2)}(t) = \sum_{n=1,2} \chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_n, -\omega_n) E_{n\beta} E_{n\gamma}^* + + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1,2} \chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_n, \omega_n) E_{n\beta} E_{n\gamma} \exp\left(-2i\omega_n t\right) + + \chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_1, \omega_2) E_{1\beta} E_{2\gamma} \exp\left[-i\left(\omega_1 + \omega_2\right) t\right] + + \chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_1, -\omega_2) E_{1\beta} E_{2\gamma}^* \exp\left[-i\left(\omega_1 - \omega_2\right) t\right] \right\}.$$

Сравнивая (11) и (12), находим, что в бездисперсионне ближении имеют место связи

$$\boldsymbol{\chi}(\omega, \omega') = 2\boldsymbol{\chi}(\omega, \omega) = 2\boldsymbol{\chi}(\omega, -\omega) = \overline{\boldsymbol{\chi}}$$

(здесь $\omega' \neq \omega \neq 0$). Аналогично можно показать, что $\chi(\omega, Первое равенство в (13) сохраняется, очевидно, и при уче персии, если только <math>\omega$ и ω' достаточно близки. Итак, кажб понента тензора $\chi(\omega, \omega')$, рассматриваемая как функция дв менных ω и ω' , имеет на прямых $\omega' = \pm \omega$ особенность — за вдвое меньше соседних значений.

Аналогичные особенности при совпадающих частотных арг имеют и высшие восприимчивости. Соответствующие коэффи можно найти, повторяя вывод (13).

[°]Перестановочная симметрия. Из определений (3), (4) след вариантность тензоров $\chi^{(m)}$ к перестановкам частотных арг вместе с соответствующими им декартовыми индексами:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_1, \ \omega_2) \equiv \chi_{\alpha\gamma\beta}(\omega_2, \ \omega_1), \qquad ($$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3) \equiv \chi_{\alpha\beta\delta\gamma}(\omega_1, \ \omega_3, \ \omega_2) \equiv \dots \qquad ($$

Действительно, (3) можно переписать в следующих эквивал формах:

$$P_{0\alpha}^{(2)} = \chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\mathbf{2}}, \omega_{\mathbf{1}}) E_{2\beta} E_{\mathbf{1}\gamma} = \chi_{\alpha\gamma\beta}(\omega_{\mathbf{2}}, \omega_{\mathbf{1}}) E_{2\gamma} E_{\mathbf{1}\beta}.$$

Сравнение последнего выражения с (3) дает (14а).

Из (14) следует, что тензоры, описывающие генерацию га симметричны по всем индексам, кроме первого.

Другое общее свойство восприимчивостей следует из веш ности поляризации и поля, которая требует, чтобы амплитуды менении знаков частот заменялись на комплексно сопряженны чины. Заменяя в (4) одновременно знаки всех частот и беря комп сопряженное выражение, получаем

$$\boldsymbol{P}_0 = \chi (-\omega_1, \ldots, -\omega_m)^* \boldsymbol{E}_1 \ldots \boldsymbol{E}_m.$$

122

Сравнивая с (4), находим (ср. (4.1.5))

$$\chi (-\omega_1, \ldots, -\omega_m)^* = \chi (\omega_1, \ldots, \omega_m).$$
 (6.1.15)

°Прозрачное вещество. Заметим, что пространственно частотные перестановочные соотношения (14) не затрагивают первого индекса. Покажем на примере $\chi^{(2)}$, что его перестановка возможна в нерезонансном случае, когда все частоты лежат вне резонансов вещества. Введем для симметрии в обозначение восприимчивости третий частотный аргумент:

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \equiv \boldsymbol{\chi}(-\boldsymbol{\omega}_0; \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \equiv \boldsymbol{\chi}^{\overline{0}12} = \boldsymbol{\chi}^{\overline{0}\overline{1}2*}, \qquad (6.1.16)$$

где знак перед комбинационной частотой $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ обеспечивает равенство нулю суммы всех трех аргументов восприимчивости (в последнем равенстве учтена связь (15)). Заметим, что иногда удобно использовать также такое обозначение:

$$\chi(-\omega_0; \omega_1, \omega_2) \equiv \chi(\omega_0 = \omega_1 + \omega_2).$$

Найдем мощность, поглощаемую в единице объема вещества за счет квадратичной нелинейности в случае трехчастотного поля. Согласно (4.1.10)

$$\mathcal{P}^{(2)} = \overline{\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{P}}^{(2)}} = (1/2) \sum_{n=0}^{2} \omega_n \operatorname{Im} \boldsymbol{E}_n^* \cdot \boldsymbol{P}_n^{(2)} \equiv \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2. \quad (6.1.17)$$

Отсюда в соответствии с определением (3) парциальные мощности равны

$$\mathcal{P}_{0} = (1/2) \omega_{0} \operatorname{Im} \chi_{\alpha\beta\nu}^{\overline{0}} E_{1\beta} E_{\alpha\alpha} E_{1\beta} E_{2\gamma},$$

$$\mathcal{P}_{1} = (1/2) \omega_{1} \operatorname{Im} \chi_{\beta\alpha\nu}^{\overline{1}} E_{1\beta}^{\overline{1}} E_{\alpha\alpha} E_{2\gamma}^{*},$$

$$\mathcal{P}_{2} = (1/2) \omega_{2} \operatorname{Im} \chi_{\gamma\beta\alpha}^{\overline{2}} E_{2\gamma}^{*} E_{1\beta}^{*} E_{0\alpha}.$$

(6.1.18)

Отметим, что знаки и величины мощностей \mathcal{P}_n зависят от фаз полей. Из (18) с помощью (15) находим

$$\mathcal{P}^{(2)} = (1/2) \operatorname{Im} \left[\omega_1 \left(\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\overline{0}} + \chi_{\beta\alpha\gamma}^{\overline{10}} + \chi_{\beta\alpha\gamma}^{\overline{10}} \right) + \omega_2 \left(\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\overline{0}} + \chi_{\gamma\beta\alpha}^{2} + \chi_{\gamma\beta\alpha}^{2} \right) \right] E_{0\alpha}^* E_{1\beta} E_{2\gamma}. \tag{6.1.19}$$

Если все три частоты лежат вне резонансов, то поглощение отсутствует и вещество лишь перераспределяет энергию между тремя частотными компонентами поля, причем доля *n*-й компоненты согласно (18) про-порциональна ω_n .

В прозрачной среде $\mathcal{P}=0$, и так как комплексные амплитуды $E_{n\alpha}$ произвольны, то выражение в квадратных скобках в (19) должно обращаться в нуль. При этом частоты из-за слабой дисперсии также можно считать произвольными, так что коэффициенты при ω_1 и ω_2 по отдельности равны нулю. Итак, в прозрачной для всех трех частот среде к автоматической симметрии (14), не затрагивающей первого индекса, добавляются следующие связи:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\overline{\mathbf{0}}_{12}} = \chi_{\beta\alpha\gamma}^{1\overline{\mathbf{0}}_{2}} = \chi_{\gamma\beta\alpha}^{21\overline{\mathbf{0}}}.$$
(6.1.20)

В общем случае нерезонансной восприимчивости произвольног порядка $\chi^{(m)}$ имеет место полная перестановочная симметрия по всел индексам. Возможность перестановки первых индексов приводи к соотношениям Менли—Роу (§ 6.3): $\mathcal{P}_0/\omega_0 = \mathcal{P}_1/\omega_1 + \mathcal{P}_2/\omega_2$. Резо нансные нелинейные восприимчивости обладают более ограниченной чем (20), симметрией (§ 6.3). Например, рамановская восприимчи вость удовлетворяет соотношению

$$\chi_{xxxx}^{\bar{1}\bar{2}12} = \chi_{xxxx}^{\bar{2}\bar{1}12*}.$$

В бездисперсионном приближении $\chi^{(m)}$ вообще не зависят от частоты, и поэтому тензоры восприимчивости симметричны по всел индексам.

В качестве примера использования соотношения (20) рассмотрим случай $\omega_2 = -\omega_1$. При этом с учетом (13)

$$4\chi_{\alpha\beta\gamma}(0=\omega_1-\omega_1)=\chi_{\gamma\beta\alpha}(\omega_1=\omega_1+0). \qquad (6.1.21)$$

Здесь добавлен множитель 4, в необходимости которого можно убедиться, повторив вывод формулы (13) при наличии постоянного поля. Восприимчивость слева описывает оптическое выпрямление, а справа линейный электрооптический эффект (эффект Покельса), т. е. изменение показателя преломления $n(\omega_1)$ на частоте ω_1 , пропорциональное статическому полю E_0 . Действительно, поляризация на частоте ω_1 при учете линейной и квадратичной восприимчивости равна

$$P_{1\alpha} = [\chi_{\alpha\beta}(\omega_1) + \chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega_1 = \omega_1 + 0) E_{0\gamma}] E_{1\beta} = (\chi_{\alpha\beta} + \Delta\chi_{\alpha\beta}) E_{1\beta}. \quad (6.1.22)$$

Приращение восприимчивости $\Delta \chi$ будет проявляться в анизотропном изменении $\Delta n(\omega_1)$. Таким образом, (21) связывает количественно два различных эффекта — давно известный эффект Покельса и обнаруженный лишь с помощью лазеров эффект выпрямления света. Другой пример такой пары связанных явлений — *прямой и обратный эффекты* Фарадея (обратный эффект — появление статической намагниченности пропорциональной интенсивности световой волны с круговой поляризацией).

Итак, согласно (14) и (20) тензоры нелинейной восприимчивости $\chi^{(m)}$ прозрачного вещества инвариантны ко всем (m+1)! перестановкам своих частотно пространственных аргументов.

Отсутствие диссипации в окнах прозрачности позволяет определить энергию поляризации вещества v (§ 4.1). Если полностью пренебречь диссипацией, т. е. запаздыванием отклика, то по аналогии с (4.1.25)

$$\boldsymbol{v}^{(2)}(t) = - (1/3) \, \overline{\boldsymbol{\chi}}_{\alpha\beta\gamma}^{\dagger} \boldsymbol{E}_{\alpha} \boldsymbol{E}_{\beta} \boldsymbol{E}_{\gamma}, \qquad (6.1.23)$$

где E = E(t). При термодинамическом описании эта энергия должна быть добавлена к плотности свободной энергии вещества F и к другим термодинамическим потенциалам (§ 4.1). При этом P, $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$ определяются соответственно первой, второй и третьей производными F(E) в точке E = 0 (см. (4.1.29), (4.1.30)). Пусть поле содержит три гармоники:

$$E(t) = (1/2) \sum_{n} E_{n} \exp(-i\omega_{n}t), \qquad (6.1.24)$$

где

ž

A MARK STREET

$$n = \pm 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \ \omega_1 \neq \omega_2, \ \omega_n \neq 0, \omega_{-n} \equiv -\omega_n, \ E_{-n} \equiv E_n^*,$$

тогда средняя по времени энергия поляризации будет

$$v^{(2)} \equiv \overline{v^{(2)}(t)} = -(3!/3 \cdot 2^3) \, \overline{\chi}_{\alpha\beta\gamma} E^*_{0\alpha} E_{1\beta} E_{2\gamma} + \text{k.c.} \qquad (6.1.25)$$

Для учета дисперсии следует заменить χ на $\chi(\omega, \omega')$, что возможно благодаря симметрии (15), (20). В результате

$$v^{(2)}(\{E_n\}) = -(1/4)(\chi^{\overline{0}}_{\alpha\beta\gamma}E^*_{0\alpha}E_{1\beta}E_{2\gamma} + \chi^{0}_{\alpha\beta\gamma}E^{\dagger}_{0\alpha}E^*_{1\beta}E^*_{2\gamma}). \quad (6.1.26)$$

Это выражение позволяет определять нелинейную поляризацию, а также $\chi^{(2)}$ через $v^{(2)}$ (ср. (4.1.33)):

$$P_{n\alpha}^{(2)} = -4 \, \partial v^{(2)} / \partial E_{n\alpha}^*. \tag{6.1.27}$$

Роль симметрии среды. В различных системах координат компоненты векторов поля E, поляризации P и связывающих их тензоров $\chi^{(m)}$ принимают, конечно, различные значения. Правило преобразования при вращении декартовой системы координат имеет вид

$$\tilde{\chi}_{\alpha'\beta'\dots}^{(m)} = \sum_{\alpha, \beta,\dots} a_{\alpha'\alpha} a_{\beta'\beta} \dots \chi_{\alpha\beta\dots}^{(m)}$$
(6.1.28)

знак «~» отличает новые компоненты тензора). Здесь a — матрица перехода от старых координат к новым; в понятие вращения мы включаем и изменение знаков всех или части координатных осей, т. е. инверсию и отражения. Например, при инверсии $a_{\alpha'\alpha} = -\delta_{\alpha'\alpha}$, так что

$$\tilde{\chi}_{\alpha\beta...}^{(m)} = (-1)^{m+1} \chi_{\alpha\beta...}^{(m)!}, \qquad [(6.1.29)]$$

где m+1 — ранг тензора. Таким образом, при инверсии координатной системы компоненты тензоров нечетного ранга (в том числе векторов и тензоров квадратичной восприимчивости) меняют знаки на обратные: $\tilde{E}_{\alpha} = -E_{\alpha}, \ \tilde{\chi}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = -\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, \ldots$

Для тензоров, описывающих физические свойства вещества, существует определенная система координат, в которых тензор принимает простейший вид, с максимальным числом нулевых и одинаковых компонент. В кристаллах эта «естественная» система совпадает с кристаллографическими осями. Например, вещественные тензоры второго ранга в естественной системе диагональны, $\chi^{(1)}_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$.

Любая безграничная среда — аморфная или кристаллическая — обладает определенной симметрией в расположении частиц, усредненном по тепловому движению. Формально эта симметрия среды опреде-

ляется набором (*группой*) из некоторого числа элементов симметрии. В частности, элементами точечной ¹) группы симметрии являются все вращения системы координат *a* (включая отражения и инверсию), оставляющие неизменной структуру вещества. Так, многие кристаллы, а также оптически неактивные жидкости и газы инвариантны относительно инверсии — такие среды называются центросимметричными.

Своей группой из элементов симметрии обладает и каждое макроскопическое свойство среды, характеризуемое каким-либо тензором. Элементами симметрии тензора являются все вращения $a^{(i)}$, действующие по правилу (28) и не изменяющие при этом компоненты тензора. Например, согласно (29) все тензоры четного ранга инвариантны относительно инверсии.

Кажется очевидным, что симметрия макроскопического свойства среды не может быть ниже симметрии ее структуры (принцип Неймана [42]). Иначе говоря, группа симметрии свойства должна включать в себя все элементы симметрии структуры, т. е. последняя является подгруппой группы симметрии свойства. Следовательно, если a — элемент точечной симметрии структуры среды, то в равенстве (28) можно опустить знак «~». При этом оно становится уравнением, связывающим компоненты тензора $\chi^{(m)}$ друг с другом. Подставляя в (28) поочередно все элементы симметрии среды $a^{(i)}$, получаем однородную систему уравнений для $\chi^{(m)}_{\alpha\beta}$..., которая в изотропных средах и в кристаллах с высокой симметрией резко сокращает число ненулевых компонент, а также делает многие компоненты равными, иногда с точностью до знака.

Наиболее яркий пример этого следует из (29) в случае центросимметричных сред. Согласно принципу Неймана все тензоры, описывающие физические свойства таких сред, должны также быть центросимметричными, т. е. в (29) можно опустить знак ~. Следовательно, при четных *m* должно выполняться равенство $\chi_{\alpha\beta\ldots}^{(m)} = -\chi_{\alpha\beta\ldots}^{(m)}$, что возможно, лишь если $\chi^{(m)} = 0$. Итак, все восприимчивости четного порядка равны нулю в центросимметричных средах.

Заметим, что приведенный вывод неверен в случае восприимчивостей, описывающих магнитные эффекты. Дело в том, что магнитное поле и намагниченность — *псевдовекторы* (или аксиальные векторы, т. е. они при инверсии координат не меняют знака), и поэтому соответствующие восприимчивости являются псевдотензорами и при инверсии преобразуются не по правилу (29). В частности, эффект Фарадея, который описывается связью $P_1 = \eta(\omega_1 = \omega_1 + 0) E_1 H_0$, возможен и в центросимметричных средах.

§ 6.2. Модели оптического ангармонизма

В зависимости от особенностей вещества, его состояния, частот действующих полей и других условий эксперимента основной вклад в наблюдаемые нелинейные эффекты могут давать различные механизмы.

¹) Термин «точечный» связан с тем, что при вращениях одна точка (начало координат) неподвижна — в отличие от *трансляционных* преобразований координат.

Ниже будут рассмотрены несколько частных классических моделей оптического ангармонизма, а затем будет дана общая квантовая схема расчета нелинейных восприимчивостей.

Ангармонизм свободного электрона. Пусть на электрон (или на любую заряженную частицу) действует плоская монохроматическая волна E с линейной поляризацией вдоль оси x и направлением распространения вдоль оси z. При учете магнитной части силы Лоренца нерелятивистские уравнения движения электрона имеют вид (e < 0)

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} = \frac{e}{m} \left(E_x - \frac{1}{c} \dot{Z} H_y \right) = \frac{e}{m} \left(1 - \frac{1}{c} \dot{Z} \right) E,$$

$$\ddot{Z} + 2\gamma \dot{Z} = \frac{e}{mc} \dot{X} E,$$
 (6.2.1)

где ү— феноменологическая константа затухания, которая обеспечивает установление стационарной амплитуды после включения периодического поля, и

$$E = E_{\mathbf{x}}(Z, t) = \operatorname{Re} E_{1} \exp\left[ikZ(t) - i\omega t\right] = H_{y}(Z, t) \qquad (6.2.2)$$

— поле в точке нахождения частицы. Затухание может вызываться столкновениями, а также реакцией излучения — потерями на излучение (радиационное трение). Предположим, что продольное смещение электрона Z мало, тогда в (2) можно полагать Z=0 (дипольное приближение, т. е. приближение нулевого порядка по kZ).

Будем искать установившееся решение (1) в виде ряда Фурье методом последовательных приближений по амплитуде поля:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)} + \ldots = \operatorname{Re}(\mathbf{R}_{1}e^{-i\omega t} + \mathbf{R}_{2}e^{-2i\omega t} + \ldots), \quad (6.2.3)$$

где $R = \{X, Y, Z\}$. В первом приближении можно пренебречь действием магнитного поля, так что отклик электрона линеен:

$$X_{1}^{(1)} = -\frac{e/m}{\omega^{2} + 2i\omega\gamma} E_{1}.$$
 (6.2.4)

Отсюда тензор линейной поляризуемости электрона, связывающий амплитуды дипольного момента $d_1 = eR_1$ и поля E_1 , равен

В нашей модели нейтрализующий положительный заряд отсутствует и мы определяем дипольный момент относительно начала координат R = 0. Умножив α на плотность электронов N, найдем линейную восприимчивость $\chi^{(1)}$ холодной (эффект Доплера мал) плазмы (ср. (4.2.13)).

Итак, при ω≫γ линейная поляризуемость электрона

$$\alpha = -\frac{e^2}{m\omega^2} = -r_e \lambda^2, \qquad (6.2.6)$$

где $r_e \equiv e^2/mc^2 \approx 3 \cdot 10^{-13}$ см—классический радиус электрона. Заметим, что r_e связан с другими характерными масштабами с размер.

ностью длины через постоянную тонкой структуры $e^2/\hbar c^2 \approx 1/137$:

$$\lambda_0/2 = 137a_0 = 137^2 \lambda_c = 137^3 r_e, \qquad (6.2.7)$$

где $\lambda_0 \equiv 2\pi \lambda \equiv 1/R \approx 10^{-5}$ см—длина волны, соответствующая потениналу ионизации атома водорода 13,6 эВ ($R \equiv me^4/4\pi \hbar^3 c$ —постоянная Ридберга), $a_0 \equiv \hbar^2/me^2 \approx 5 \cdot 10^{-9}$ —боровский радиус и $\lambda_c \equiv \hbar/mc \approx \approx 4 \cdot 10^{-11}$ см—комптоновская длина волны. Пусть $\lambda = \lambda_0$, тогда

 $-\alpha = 4a_0^3 \approx 6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^3 \tag{6.2.8}$

— поляризуемость свободного электрона в УФ-диапазоне имеет порядок объема атома водорода, т. е. порядок поляризуемости связанного электрона в отсутствие резонанса.

Чтобы найти второе приближение, следует вместо R в левые части (1) подставить $R^{(2)}$, а в правые — $R^{(1)}$. При этом сила Лоренца имеет компоненты с нулевой и двойной частотой:

$$F_{z}^{(2)} = (e/c) \dot{X}^{(1)}E = (1/2) k \operatorname{Im} \alpha \left(|E_{1}|^{2} + E_{1}^{2}e^{-2t\omega t} \right).$$
(6.2.9)

Под действием силы с двойной частотой возникают продольные колебания электрона с частотой 2ω. Амплитуда этих колебаний согласно (1) и (9) равна

$$Z_{2_{1}}^{(2)} = \frac{e^{2}E_{1}^{2}}{8im^{2}c\omega (\omega + i\gamma) (\omega + i2\gamma)} = \frac{1}{e}\beta_{zxx}E_{1}^{2}.$$
 (6.2.10)

В последнем равенстве мы ввели тензор квадратичной поляризуемости свободной частицы β , связывающий амплитуды поля и дипольного момента $eZ_2^{(2)}$ на двойной частоте. Итак, квадратичная поляризуемость свободного электрона при $\omega \gg \gamma$ имеет порядок

$$|\beta| \approx e^3/m^2 c\omega^3 = (e\hbar/mc^2) \alpha \equiv \alpha/E_{NL}^{\text{cBob}}.$$
 (6.2.11)

Здесь E_{NL} — характерный параметр, равный амплитуде поля, при которой линейный и квадратичный отклики одинаковы: $Z^{(2)} = X^{(1)}$. При $\lambda = \lambda_0$

 $E_{NL}^{\text{cbo6}} = e/r_e \lambda_0 \approx 10^9 \text{ }\Gamma\text{c}, \qquad (6.2.12)$

что соответствует интенсивности 10²⁰ Вт/см² ¹). Ниже будет показано, что в случае связанного электрона даже в отсутствие резонанса ангармонизм на два порядка больше:

 $E_{NL}^{\text{связ}}/E_{NL}^{\text{своб}} \approx \omega_0/137\omega$,

где

$$E_{NL}^{c_{BR3}} \approx e/2a_0^2 \approx 10^7 \ \Gamma c.$$
 (6.2.13)

128

¹) В гауссовой системе единиц E и H имеют одинаковые размерности, и поэтому E можно измерять в гауссах (1 Гс=300 В/см).

Умножив β на плотность электронов, получаем квадратичную восприимчивость плазмы:

$$\chi^{(2)} = e^{3} N / m^{2} c \omega^{3} = |\chi^{(1)}| / E_{NL}^{cBOG}.$$
(6.2.14)

Итак, один из фундаментальных источников ангармонизма вещества — сила Лоренца. Отметим наличие в знаменателе (14) скорости света, что характерно для магнитных эф-

Согласно (11) отношение $Z^{(2)}/X^{(1)}$ имеет порядок E_1/E_{NL} , в то время как $kZ^{(2)} \sim (E_1/E_{NL})^2$. Следовательно, при $E_1 \ll E_{NL}$ использование дипольного приближения для расчета β оправдано.

Если не учитывать статической силы светового давления, то согласно (4) и (10) электрон под действием монохроматического поля описывает в плоскости xz «восьмерку» (рис. 6.2). Вынужденные колебания электрона вдоль поля $X^{(1)}(t)$ сопровождаются дипольным излучением во все стороны (кроме точного направления оси x) — это томсоновское или, при учете отдачи, комптоновское рассеяние. В то же время продоль-



Рис. 6.2. Электрон под действием плоской монохроматической волны описывает фигуру Лиссажу.

ные колебания электрона $Z^{(2)}(t)$ дают дипольное излучение на частоте второй гармоники падающего поля, т. е. эффект удвоения частоты света. Максимум излучения второй гармоники происходит в поперечной плоскости xy, а излучение вдоль направления распространения первичного поля отсутствует. Такая структура тензора квадратичной поляризуемости свободного электрона препятствует когерентному сложению амплитуд поля второй гармоники в случае макроскопического образца — плазмы или полупроводника.

Итак, электроны в плазме, металле или полупроводнике дают, кроме томсоновского, еще некогерентное рассеяние с двойной частотой и интенсивностью, пропорциональной $\beta^2 N$. Связанные электроны в атомах и молекулах также обладают квадратичной поляризуемостью, которая приводит к некогерентному рассеянию на двойной частоте, называемому гиперрэлеевским. С квантовой точки зрения оно объясняется элементарным процессом поглощения двух фотонов падающего света и излучением фотона с двойной энергией (рис. 6.1, *a*). При равенстве фазовых скоростей падающей волны и ее второй гармоники ($n(\omega) = = n(2\omega)$ — так называемое условие пространственного синхронизма) и при подходящей структуре тензора $\chi^{(2)}$ кроме слабого, почти изотропного гиперрэлеевского излучения имеется гораздо более интенсивное продольное излучение, пропорциональное $\beta^2 N^2 = \chi^{(2)2}$ (§ 6.5).

[°]Давление света. Постоянная составляющая силы Лоренца (9) определяет статическую силу F_0 светового давления, действующего на электрон со стороны бегущей волны. Согласно (9) F_0 пропорциональна мнимой части линейной поляризуемости электрона α'' , т. е. рассеиваемой им мощности $\mathcal{P}=\omega\alpha''|E_1|^2/2$ (см. 4.1.12)) или сечению

5 Д. Н. Клышко

взаимодействия

$$\sigma \equiv \mathcal{P}/I = 4\pi k \alpha'', \qquad (6.2.15)$$

где $I = c |E_1|^2 / 8\pi$ — интенсивность плоской волны. Поэтому силу давления света можно представить в виде

$$F_0 = k\alpha'' |E_1|^2 / 2 = \mathcal{P} / c = \sigma I / c.$$
 (6.2.16)

Под действием этой силы электрон будет ускоряться, однако в плазме столкновения приводят к установлению постоянной дрейфовой скорости $\dot{Z}_0 = F_0/m\tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma} = 1/\tau$ и τ —время между столкновениями (напомним, что γ —скорость затухания колебательного движения, которая может превышать $\tilde{\gamma}$). Возникающий вдоль луча света постоянный ток, пропорциональный $|E_1|^2$, можно рассматривать как эффект оптического выпрямления (в диэлектриках эффектом выпрямления или *dc-эффектом* называют появление статического поля $E_0 \sim |E_1|^2$).

Пусть $\dot{\omega} \gg \dot{\gamma}$, тогда согласно (5) $\alpha'' = 2\gamma e^2/m\omega^3$. Оценим F_0 в случае, когда единственная причина затухания колебаний электрона — потери на излучение (радиационное трение). Согласно (1) сила трения в первом порядке равна — $2\gamma m \dot{X}^{(1)}$. Умножая ее на скорость $\dot{X}^{(1)}$ и усредняя по периоду, находим мощность потерь: $\mathcal{P} = \gamma m\omega^2 |X_1^{(1)}|^2$. Приравнивая это выражение мощности дипольного излучения (5.2.3), получаем

$$2\gamma/\omega = \alpha''/\alpha' = 2r_{\rho}/3\lambda. \tag{6.2.17}$$

Этот же результат следует из (5.2.8) в случае единичной силы осциллятора (4.2.23). Теперь (16) принимает вид

$$F_0 = r_e^2 |E_1|^2 / 3. \tag{6.2.18}$$

Сравнивая (16) и (18), находим томсоновское сечение для рассеяния на свободном электроне:

$$\sigma_{\rm r} = 8\pi r_e^2/3. \tag{6.2.19}$$

С фотонной точки зрения давление света возникает в результате передачи электрону импульса поглощаемых фотонов и симметричного томсоновского (или комптоновского) их переизлучения во все стороны. Подчеркнем, что мы рассмотрели лишь среднее значение силы, которая испытывает квантовые флуктуации [43].

Мы нашли силу светового давления на свободный электрон в случае бегущей волны. Аналогичный анализ можно провести и для более сложной пространственной конфигурации светового поля (отклонение электрона в поле стоячей волны называют эффектом Капицы — Дирака). Существенно, что в неоднородном поле средняя по периоду сила Лоренца возникает и при $\alpha''=0$. В этом случае F_0 определяется

много большей величиной α' и можно полагать $\alpha''=0$. Эта сила связана с обменом между различными плоскими волнами и называется вынужденной (в отличие от спонтанной силы (16)).

Смещение электрона $\Delta R(t)$ под действием монохроматического поля равно $\alpha E(R_0, t)/e$, где $\alpha = -me^2/\omega^2 - поляризуемость и <math>R_0 -$ невозмущенная координата электрона. Отсюда находим среднюю силу Лоренца:

$$\boldsymbol{F}_{0} = \alpha \dot{\boldsymbol{E}} \times \boldsymbol{H}/c = k \operatorname{Im} \alpha \boldsymbol{E}_{\omega} \times \boldsymbol{H}_{\omega}^{*}/2 \qquad (6.2.20)$$

(последнее выражение применимо и при комплексной поляризуемости). Заметим, что в плоской бегущей волне $\dot{E}H \sim \sin \omega t \cos \omega t \rightarrow 0$ и что в общем случае сила F_0 не пропорциональна среднему вектору Пойнтинга $S_0 = c \operatorname{Re} E_{\omega} \times H_{\omega}^*/8\pi$.

Рассмотрим случай двух плоских волн:

$$E_{\omega} = \sum_{n=1}^{2} E_n \exp(i\boldsymbol{k}_n \cdot \boldsymbol{R}_0 + i\boldsymbol{\varphi}_n),$$

$$H_n = \hat{\boldsymbol{k}}_n \times E_n, \quad \boldsymbol{k}_n = \hat{\boldsymbol{k}}_n \boldsymbol{\omega}/c.$$

При а" = 0 в (20) остаются лишь «перекрестные» компоненты:

$$F_{0} = (1/2) \alpha k \operatorname{Im} (E_{1} \times H_{2}^{*} - E_{2}^{*} \times H_{1}) e^{i\psi} = = (1/2) \alpha \operatorname{Im} [-\Delta k (E_{1} \cdot E_{2}^{*}) + E_{1} (E_{2}^{*} \cdot k_{1}) - E_{2}^{*} (E_{1} \cdot k_{2})] e^{i\psi}, \quad (6.2.21)$$

где $\psi \equiv \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0 + \varphi$, $\Delta \mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$.

Легко убедиться, что часть F_0 , пропорциональную Δk , можно представить в «градиентном» виде с эффективным потенциалом — $\alpha \overline{E}^2/2$ (происхождение множителя 1/2 ясно из (4.1.25)):

$$\boldsymbol{F}_{M} = \alpha \nabla | \boldsymbol{E}_{\omega} |^{2}/4. \tag{6.2.22}$$

Заметим, что эта часть F_0 , называемая силой Миллера, исчезает согласно (21) при ортогональных поляризациях волн. В случае встречных волн ($k_2 = -k_1$) с одинаковой линейной поляризацией $F_0 = F_M$:

$$\boldsymbol{F}_{0} = -\alpha \boldsymbol{k}_{1} \boldsymbol{E}_{1} \boldsymbol{E}_{2} \sin\left(2\boldsymbol{k}_{1} \cdot \boldsymbol{R}_{0} + \boldsymbol{\varphi}\right). \tag{6.2.23}$$

Под действием этой силы заряженные частицы стремятся сгруппироваться в узлах стоячей волны.

В общем случае поле состоит из непрерывного множества плоских волн и силу светового давления можно найти интегрированием (21) по k_1 и k_2 (при этом градиентная часть (22) сохраняет свой вид). Отметим, что при учете отдачи электрона частоты взаимодействующих волн различны. Соответствующее явление называется вынужденным эффектом Комптона.

Рассмотрим далее силу давления света на связанные в атоме или молекуле электроны, т. е. на нейтральные поляризующиеся частицы. Будем исходить из эффективного потенциала вида $\mathscr{V} = -d \cdot E(r)$,

5*

где *d* — индуцированный дипольный момент и *r* — координата центра масс частицы. Отсюда (см. (4.1.36))

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{d} (t) \cdot \boldsymbol{E} (\boldsymbol{r}, t)$$
(6.2.24)

или $F_{\alpha} = d_{\beta} \partial E_{\beta} / \partial x_{\alpha}$. Полагая здесь

$$E_x = (1/2) E_1 e^{i (kz - \omega t)} + \kappa. c. \equiv E^{(+)} + E^{(-)},$$

$$d_x = \alpha (\omega) E^{(+)} + \kappa. c.$$

и выделяя постоянную составляющую, получаем снова (16).

Рассмотрим сперва резонансное давление. Пусть затухание опять обусловлено лишь собственным излучением частицы, т. е. резонансной люминесценцией (§ 5.2), тогда резонанс имеет минимальную (естественную) ширину $2\gamma_{pag} = A$. При этом согласно (2.3.9) $\sigma = 2\pi\lambda^2$ и из (15), (16) следует $\alpha'' = \lambda^3/2$ и

$$F_0 = \hbar^2 |E_1|^2 / 4 \qquad (6.2.25)$$

Таким образом, резонансное давление света на связанный электрон в $\lambda^2/r_e^2 \sim 137^6$ раз больше, чем на свободный (при радиационном затухании). Это различие определяется отношением сечений резонансного и томсоновского рассеяний.

Оценка (25) относится к случаю, когда заселен только нижний уровень, вообще же

$$\alpha'' = (1/2) \lambda^3 \Delta = \lambda^3 \Delta^{(0)} / 2 (1 + 2W_0 T_1), \qquad (6.2.26)$$

где Δ и $\Delta^{(0)}$ — относительные разности населенностей с учетом насыщения и без него (§ 4.3), W_0 — вероятность перехода и T_1 — время продольной релаксации. При радиационной релаксации $T_1 = 1/A$. Согласно (26) при инверсии населенностей сила давления направлена навстречу лучу света, что на фотонном языке объясняется отдачей фотонов, излучаемых при вынужденных переходах вперед.

При сильном насыщении поглощаемая атомом мощность \mathcal{P} согласно (4.3.22) равна $\hbar\omega\Delta^{(0)}/2T_1$, так что из (16) следует

$$F_0 = \hbar k \Delta^{(0)} / 2T_1 \tag{6.2.27}$$

— сила пропорциональна импульсу падающих фотонов и числу рассеиваемых за единицу времени фотонов. Пусть $\lambda = 1$ мкм и $A = 10^6$ с⁻¹, тогда $F_0 = 3 \cdot 10^{-17}$ дин и при $m = 3 \cdot 10^{-23}$ г ускорение достигает 10^6 см/с² (интенсивность насыщающего света при этом много больше 10^{-4} BT/см²).

Резонансное давление лазерного света предоставляет необычные возможности: с его помощью можно ускорять, отклонять, фокусировать пучки нейтральных молекул, разделять изотопы, «пленять» молекулы в ограниченной области пространства, уменьшать их тепловые скорости [43]. Стрикционный ангармонизм. Пусть теперь все частоты поля лежат в области прозрачности вещества, тогда можно пренебречь дисперсией и полагать поляризуемость частиц вещественной константой. При этом сила принимает вид

$$\boldsymbol{F} = \alpha \nabla \overline{E}^2 / 2 = \alpha \nabla \boldsymbol{E}^{(+)} \cdot \boldsymbol{E}^{(-)}. \tag{6.2.28}$$

Здесь черта означает усреднение по высокочастотным компонентам — ведь нас интересует статическая или медленно, по сравнению с частотами поля и молекулы, меняющаяся часть силы, которая действует на молекулу в целом (обозначения $E^{(\pm)}$ см. в § 7.2).

Градиентной силе (28) соответствует эффективный потенциал молекулы $\mathcal{V} = -\alpha \overline{E}^2/2$.

Плотность дополнительной энергии вещества и плотность силы в оптическом поле будут в N раз больше (см. (4.1.32)):

$$v = -\chi \overline{E^2}/2 = -(n^2 - 1)\overline{E^2}/8\pi,$$
 (6.2.29a)

$$j = \chi \nabla E^2 / 2,$$
 (6.2.296)

где $\chi \equiv \chi^{(1)} \approx \alpha N$, N—плотность молекул, которая предполагается однородной, и $n = \sqrt{\epsilon}$ —показатель преломления.

Мы здесь пренебрегли взаимодействием молекул, что допустимо лишь в случае достаточно малой N. Можно показать, что в общем случае (см. [22], с. 361) следует в (296) сделать замену

$$\chi \longrightarrow \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho}\right)_T = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right)_T, \qquad (6.2.30)$$

где ρ —плотность вещества. Например, из формулы Клаузиса—Мозотти, которую легко получить из (4.2.9):

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi\alpha}{3m} \rho, \qquad (6.2.31)$$

следует

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} \right)_T = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \varepsilon} \right)_T = \frac{3}{(\varepsilon - 1) (\varepsilon + 2)},$$

так что в случае плотной среды (296) надо умножить на поправку Лоренца ($\varepsilon + 2$)/3.

В бегущей плоской волне $\nabla \overline{E^2}$ не имеет постоянной составляющей, поэтому F = 0 (мы рассматриваем сейчас область, где $\alpha'' = 0$ и связанная с диссипацией спонтанная сила (16) исчезает). Однако в стоячей плоской волне $E = 2E_1 \cos(kz) \cos(\omega t)$, и из (28) следует (ср. (23)):

$$F_{z} = -\alpha k E_{1}^{2} \sin(2kz). \qquad (6.2.32)$$

Таким образом, при $\alpha > 0$ частицы будут собираться в пучностях волны. Силу (32), пропорциональную поляризуемости, называют вынужденной.

В ограниченных пучках света существует статический поперечный градиент квадрата поля и частицы при α>0 стремятся к оси пучка.

В стационарных условиях плотность силы (29б) должна компенсироваться повышением давления Δp и плотности частиц ΔN в центральной части пучка:

$$\Delta p = -v = \chi \overline{E^2}/2, \qquad (6.2.33)$$

$$\Delta N/N = \Delta \rho/\rho = \beta_T \,\Delta p, \qquad (6.2.34)$$

где β_r —изотермическая сжимаемость вещества. Эти формулы описывают эффект электрострикции в световом поле.

Приращение плотности частиц в луче света вызовет изменение восприимчивости вещества

$$\Delta \chi = \alpha \,\Delta N = \beta_T \chi^2 \,|\, E_1 \,|^2 / 4. \tag{6.2.35}$$

С другой стороны, по определению

$$P_{1}^{(3)} = \chi^{(3)} \left(\omega = \omega - \omega + \omega \right) |E_{1}|^{2} E_{1} = \Delta \chi E_{1},$$

так что мы получаем для вклада электрострикции в кубическую восприимчивость выражение

$$\chi^{(3)} = \beta_T \chi^{(1) 2}/4. \tag{6.2.36}$$

Отсюда находим характерный нелинейный параметр

$$E_{NL}^{2} \equiv \chi^{(1)} / \chi^{(3)} = 4 / \beta_{T} \chi^{(1)}.$$
(6.2.37)

В жидкостях $n \approx 1.5$ ($\chi \approx 0.1$) и $\beta_T \approx 10^{-10}$ см²/дин (напомним, что $\beta \approx 1/\rho v^2$, где v—скорость звука), так что $\chi^{(3)} \approx 10^{-13}$ см³/эрг, $E_{NL} \approx \approx 10^6$ Гс.

Градиентная сила (28) и соответствующее давление (33) имеют большое прикладное значение: они позволяют генерировать мощные ультразвуковые волны с помощью бигармонических лазерных полей. Этой же силой объясняется эффект вынужденного рассеяния Мандельитама — Бриллюэна (см. ниже). Стрикционная нелинейность (36) является одной из причин самофокусировки света (другой важный механизм — оптический эффект Керра, т. е. ориентация анизотропных молекул в жидкостях в луче света с линейной поляризацией — см. ниже).

Ангармонический осциллятор. В классической теории дисперсии Лоренца (§ 4.2) электроны в атомах полагают гармоническими осцилляторами. Естественно рассмотреть оптическую нелинейность вещества с помощью модели ангармонического осциллятора. Пусть частица находится в потенциале

$$\mathcal{T}^{\sigma}(x) = m\omega_0^2 x^2 / 2 - m\eta x^3 / 3 - eEx, \qquad (6.2.38)$$

где *е* — заряд частицы и η — малый параметр, определяющий отклонение формы потенциальной ямы от параболической (для простоты берем одномерную модель). Из (38) находим уравнение движения:

$$\hat{D}x = \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = eE/m + \eta x^2.$$
 (6.2.39)

Пусть внешнее поле *Е* — бигармоническое. Будем искать стационарное решение в виде ряда теории возмущений:

$$x(t) = \sum_{m} x^{(m)}(t), \quad x^{(m)} \sim \eta^{m-1} E^{m}, \quad (6.2.40)$$

где m = 1, 2, 4, 8, ... Подставив (40) в (39) и приравняв слагаемые одного порядка малости, получим решение с помощью итераций:

$$\hat{D}x^{(1)} = eE/m, \quad \hat{D}x^{(2m)} = \eta x^{(m) 2}.$$
 (6.2.41)

В первом порядке

$$x^{(1)} = \operatorname{Re} \left(x_1 e^{-i\omega_1 t} + x_2 e^{-i\omega_2 t} \right),$$

$$x_n = \alpha \left(\omega_n \right) E_n / e, \quad \alpha \left(\omega \right) = e^2 / m D \left(\omega \right),$$
(6.2.42)

где

$$D(\omega) \equiv \omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma \omega = D^*(-\omega).$$

Во втором порядке согласно (41) возникают компоненты x(t) с частотами 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 \pm \omega_2$. Рассмотрим отклик x_3 на частоте $\omega_3 \equiv \omega_1 + \omega_2$. Из (41) при m = 1 следует

$$x_3 = \eta x_1 x_2 / D(\omega_3) = \beta (\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) E_2 E_1 / e,$$

где

$$\beta \left(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1\right) = \eta e^3 / m^2 D\left(\omega_3\right) D\left(\omega_2\right) D\left(\omega_1\right).$$
(6.2.43)

При $\omega_1 = \pm \omega_2 \beta$ содержит дополнительный множитель 1/2 (см. (6.1.13)). В соответствии с (6.1.14), (6.1.15) поляризуемость β инвариантна к перестановке местами двух последних аргументов, а также к одновременному изменению знака всех трех частот и мнимой единицы. Однако согласно (43) переставлять первый аргумент со вторым или третьим можно лишь при отсутствии резонанса на переставляемых частотах, когда $|\omega_n - \omega_0| \gg \gamma$ (ср. (6.1.20)). Переход от поляризуемости одного осциллятора β к восприимчивости среды $\chi^{(2)}$ осуществляется умножением на плотность частиц N.

Итак, модель ангармонического осциллятора предсказывает резкое увеличение квадратичной поляризуемости β (в $Q \equiv \omega_0/2\gamma$ раз) вблизи резонансов — когда один из трех ее аргументов приближается к собственной частоте ω_0 . При этом β становится комплексной величиной. Из сравнения (43) и (42) следует, что β пропорциональна произведению линейных поляризуемостей на соответствующих частотах:

$$\beta(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) \sim \eta \alpha(\omega_3) \alpha(\omega_2) \alpha(\omega_1). \qquad (6.2.44)$$

Отметим, что квадратичные восприимчивости многих диэлектрических кристаллов в области прозрачности (между собственными частотами решетки и электронов) удовлетворяют соотношению

$$\chi^{(2)} \sim n(\omega_3) n(\omega_2) n(\omega_1) \tag{6.2.45}$$

с одной и той же константой пропорциональности для разных кристаллов (эмпирическое правило Миллера).

Наша модель не учитывает отличия действующего (локального) поля $E_{\rm лок}$ от макроскопического, усредненного по атомным неоднородностям поля E. Согласно Лоренцу в кубическом кристалле $E_{\rm док}/E = (\varepsilon + 2)/3$ (эту поправку нужно вводить лишь в случае диэлектриков, а в металлах или полупроводниках $E_{\rm лок} = E$). Поляризация среды P, вызываемая заданной сторонней поляризацией $P_{\rm ст}$, также в $(\varepsilon + 2)/3$ раз превышает $P_{\rm ст}$. В результате квадратичная восприничивость $\chi^{(2)}$, определяемая по отношению к макроскопическим величинам, равна

$$\chi^{(2)} = \frac{\varepsilon(\omega_3) + 2}{3} \frac{\varepsilon(\omega_2) + 2}{3} \frac{\varepsilon(\omega_1) + 2}{3} \chi^{(2)}_{\pi_{\text{OK}}}, \qquad (6.2.46)$$

где $\chi^{(2)}_{nok}$ определена для локальных величин. В некубических кристаллах поправка имеет тензорный характер. Формулы (44)—(46) указывают на тесную связь линейных и нелинейных свойств среды.

Пусть при смещении $x = a_0$ линейная $eE_0 = m\omega_0^2 a_0$ и нелинейная $\eta m a_0^2$ силы в (39) сравниваются, тогда $\eta = \omega_0^2/a_0$ (здесь E_0 —характерное поле, удерживающее заряд около положения равновесия). Отсюда при γ , $\omega_n \ll \omega_0$ следует оценка

$$E_{NL} \equiv \alpha/\beta \sim m\omega_0^4/\eta e \sim m\omega_0^2 a_0/e = E_0. \tag{6.2.47}$$

Таким образом, отношение квадратичной поляризации к линейной имеет порядок E_1/E_0 (ср. (12)). Для атома водорода под a_0 следует понимать радиус Бора \hbar^2/me^2 , а под ω_0 —граничную частоту ионизации $e^2/2\hbar a_0$. При этом $E_0 = e/2a_0^2 \approx 10^7$ Гс.

Кубический потенциал (38) приводит согласно (41) к появлению лишь четных гармоник 2 ω , 4 ω , 8 ω ... Для образования нечетных гармоник потенциал должен иметь слагаемое порядка x^4 . Отметим, что потенциал (38) даже при E=0 не центросимметричен: он изменяет знак при инверсии координаты $x \rightarrow -x$. Полезно рассмотреть трехмерную модель с помощью потенциала [33]:

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}) = m\omega_0^2 \alpha x_\alpha x_\alpha/2 - \eta_{\alpha\beta\gamma} m x_\alpha x_\beta x_\gamma. \tag{6.2.48}$$

Рамановский ангармонизм. Спонтанный эффект Рамана, или спонтанное комбинационное рассеяние (СКР), был обнаружен Мандельштамом и Ландсбергом и, независимо от них, Раманом в 1928 г.— задолго до создания лазеров. Соответствующий вынужденный эффект (ВКР) впервые наблюдался лишь в 1962 г.

При СКР падающий на вещество монохроматический свет (накачка) поляризует молекулы с оптической частотой ω₁. В результате они приобретают дипольный момент

$$d(t) = \alpha_1 E_1 \cos \omega_1 t, \qquad (6.2.49)$$

для простоты линейную поляризуемость молекулы α₁==α(ω₁) полагаем вещественной скалярной величиной. Излучение молекулярных диполей (49) дает *рэлеевское рассеяние*.

Учтем теперь внутримолекулярные колебания ядер с собственной частотой Ω₀≪ω₁, которые возбуждаются в результате столкновений.

Колебания ядер около положений равновесия Q(t) медленно модулируют окружающее их электронное «облако». При этом модулируются и все электронные параметры молекулы, включая ее оптическую поляризуемость: $\alpha(t) = (\partial \alpha / \partial Q) Q(t)$. Эта картина основана на так называемом *адиабатическом приближении*, использующем сильное превышение собственных частот электронов ω_0 над Ω_0 (обычно $\omega_0/2\pi c \sim 10^5$ см⁻¹, $\Omega_0/2\pi c \ll 10^3$ см⁻¹). При учете колебаний ядер (49) принимает вид модулированного по амплитуде колебания

$$d(t) = \left(\alpha_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial Q} Q_0 \cos \Omega_0 t\right) E_1 \cos \omega_1 t, \qquad (6.2.50)$$

где Q₀--- амплитуда колебаний ядер.

В результате рассеянное диполями излучение содержит кроме «несущей» (рэлеевской) компоненты ω_1 еще две боковые составляющие — стоксову $\omega_1 - \Omega_0$ и антистоксову $\omega_1 + \Omega_0$. В случае многоатомной молекулы рамановский спектр содержит нормальные частоты молекулы (некоторые колебания из-за симметрии не влияют на α). При учете анизотропии α и вращения молекул индуцированный дипольный момент d(t) будет промодулирован также и с характерными вращательными частотами молекулы.

Рассмотренная модуляционная картина основана на единственном нелинейном параметре $\partial \alpha / \partial Q$, введенном Плачеком, и наглядно описывает спонтанный эффект (термин «спонтанный» относится здесь к компонентам поля с частотами $\omega_1 \pm \Omega_0$, которые отсутствуют в падающем поле и возникают «спонтанно»).

Чтобы описать *вынужденные* нелинейные эффекты, обусловленные параметрической связью ядер и электронов, полезно рассмотреть модель двух связанных осцилляторов, определяемую потенциалом

$$\mathcal{V}(x, Q) = m\omega_0^2 x^2/2 + M\Omega_0^2 Q^2/2 - \eta x^2 Q - eEx. \quad (6.2.51)$$

Здесь x и ω_0 — координата и собственная частота электрона, Q и Ω_0 — то же для колебаний ядер, η — параметр связи, пропорциональный $\partial \alpha / \partial Q$. Из (51) следует

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = eE/m + 2\eta Qx/m,$$
 (6.2.52a)

$$\ddot{Q} + 2\Gamma\dot{Q} + \Omega_0^2 Q = \eta x^2 / M.$$
 (6.2.526)

Эту модель для описания ВКР предложили Платоненко и Хохлов в 1964 г. Согласно (526) на ядра действует сила, пропорциональная квадрату смещения электрона, поэтому ядра будут сильно раскачиваться в случае, когда разность двух частот поля близка к Ω_0 . Пусть падающее поле — бигармоническое, причем $\omega_1 - \omega_2 \equiv \Omega \sim \Omega_0$.

В линейном по полю приближении $Q^{(1)} = 0$ и

$$x_n^{(1)} = eE_n/mD_n, \quad D_n \equiv \omega_0^2 - \omega_n^2 - i2\gamma\omega_n, \quad n = 1, 2.$$
 (6.2.53)

Оставим в силе ηx^2 лишь резонансные слагаемые с частотой Ω , пропорциональные $x_1^{(1)}x_2^{(2)*}$, тогда амплитуда вынужденных молекулярных колебаний с частотой Ω будет равна

$$Q_{\Omega} = \frac{\eta x_1^{(1)} x_2^{(1)*}}{2M \left(\Omega_0^2 - \Omega^2 - i \, 2\Gamma\Omega\right)} = \frac{(\eta/M) \, (e/m)^2}{2D_0 D_1 D_2^*} \, E_1 E_2^*. \tag{6.2.54}$$

Итак, оптическое бигармоническое поле с подходящей разностью частот «раскачивает» через посредство электронной оболочки внутримолекулярные колебания ядер. Эти когерентные с падающим светом колебания добавляются к равновесным тепловым колебаниям и вызывают дополнительное когерентное рассеяние на антистоксовой частоте $\omega_3 = = \omega_1 + \Omega = 2\omega_1 - \omega_2$ и на второй стоксовой частоте $\omega_4 = \omega_2 - \Omega = 2\omega_2 - \omega_1$. Кроме того, появляется кубическая поляризация на исходных частотах поля, вызывающая усиление поля с меньшей частотой E_2 и ослабление поля с большей частотой E_1 . Эффект рамановского усиления и лежит в основе вынужденного комбинационного рассеяния.

Подставив (53) и (54) в (52), найдем

$$\begin{aligned} x_{1}^{(3)} &= \frac{\eta x_{2}^{(1)} Q_{\Omega}}{m D_{1}} = \frac{\eta^{2} e^{3} / 2 M m^{4}}{D_{0} D_{1}^{2} D_{2} D_{2}^{*}} |E_{2}|^{2} E_{1}, \\ x_{2}^{(3)} &= \frac{\eta x_{1}^{(1)} Q_{\Omega}^{*}}{m D_{2}} = \frac{\eta^{2} e^{3} / 2 M m^{4}}{D_{0} D_{1} D_{1}^{*} D_{2}^{*}} |E_{1}|^{2} E_{2}, \\ x_{3}^{(3)} &= \frac{\eta x_{1}^{(1)} Q_{\Omega}}{m D_{3}} = \frac{\eta^{2} e^{3} / 2 M m^{4}}{D_{0} D_{1}^{2} D_{2}^{*} D_{3}} E_{1}^{2} E_{2}^{*}. \end{aligned}$$
(6.2.55)

Умножив $x_n^{(3)}$ на eN, найдем кубическую поляризацию. Как правило, в эксперименте частоты поля ω_n (n = 1, 2, 3) много меньше частот электронных переходов ω_0 , поэтому $D_n \approx \omega_0^{-2}$ (нерезонансное KP). В этом приближении из (55) следует

$$\chi^{(3)}(\omega_1 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_2) = \chi^{(3)}(\omega_2 = \omega_2 - \omega_1 + \omega_1)^* = \chi^{(3)}(\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2) = C/[\Omega_0^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2 - i\,2\Gamma(\omega_1 - \omega_2)], \quad (6.2.56)$$

где $C \equiv \eta^2 e^4 N / M m^4 \omega_0^8$.

Эти нелинейные восприимчивости описывают соответственно рамановское поглощение (так как $\chi^{(3)}(\omega_1)'' > 0$ при $\omega_1 > \omega_2$), рамановское усиление ($\chi^{(3)}(\omega_2)'' < 0$) и когерентное антистоксово рассеяние (КАРС) с интенсивностью, пропорциональной $|\chi^{(3)}(\omega_3)|^2 I_1 I_2$. Кроме того, из (56) следует, что монохроматическая волна с изменяемой частотой ω при наличии второй волны с фиксированной частотой ω_L испытывает в области линейной прозрачности резонансную дисперсию в двух областях $\omega_L \pm \Omega_0$ (рис. 6.3). Ширина этих резонансов 2Г определяется скоростью затухания молекулярных колебаний, причем в стоксовой области *рамановская* (или индуцированная) дисперсия имеет аномальный характер.

Найдем связь нелинейных параметров η и $\partial \alpha / \partial Q$. Подставим $Q = Q_0 \cos \Omega_0 t$ в уравнение (52a). В первом порядке по η из него следует $x_2 = \eta e E_1 Q_0 / m^2 D_1 D_2$. Сравнение с (50) дает

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q} = \frac{2e^2}{m^2 D_1 D_2} \approx \frac{2e^2}{m^2 \omega_0^4} \,\eta. \tag{6.2.57}$$

С помощью двухосцилляторной модели можно описывать и СКР. Для этого правую часть (526) следует заменить на стохаспическую ланжевенову силу f(t), вызывающую равновесные тепловые (и квантовые) флуктуации Q(t). Эта сила δ -коррелирована, причем ее спектральную плотность можно найти, приравнивая энергию флуктуаций Q



Рис. 6.3. Комбинационная (рамановская) восприимчивость. Под действием накачки с частотой ω_L восприимчивость вещества приобретает дополнительные резонансы на частотах ω_L±Ω₀ (Ω₀ — собственные частоты молекул). Существенно, что стоксов резонанс обладает отрицательными потерями (внизу слева) и аномальной дисперсией показателя преломления (вверху слева)

равновесной энергии осциллятора. Другой метод описания СКР использует рамановский аналог ФДТ (§ 7.7), согласно которому флуктуации поляризации вещества на частоте ω определяются мнимой частью кубической восприимчивости [7. 37]:

$$\langle P^*(\omega) P(\omega') \rangle = \\ = (\hbar/\pi) \,\delta(\omega - \omega') \,\mathcal{N}(-\Omega) \,\chi^{(3)}(\omega = \omega - \omega_L + \omega_L)'' \,|\, E_L\,|^2, \quad (6.2.58)$$

где

$$\mathscr{N}(\Omega) \equiv [\exp(\hbar\Omega/\kappa T) - 1]^{-1} = -\mathscr{N}(-\Omega) - 1, \quad \Omega \equiv \omega_L - \omega. \quad (6.2.59)$$

Здесь \mathscr{N} при $\Omega < 0$ (антистоксова область) имеет смысл равновесного числа фононов \mathscr{N}_0 , а при $\Omega > 0$ (стоксова область) $\mathscr{N} = -(\mathscr{N}_0 + 1)$. Единица в последнем выражении соответствует квантовым флуктуациям ядерной координаты Q, вызывающим стоксово рассеяние даже при T = 0 (антистоксово рассеяние при этом отсутствует). Элементарный процесс, соответствующий стоксову рассеянию, является двухфотонным. Он включает уничтожение фотона накачки и рождение стоксова фотона и фонона (рис. 6.1, \mathscr{R}).

Конечно, рассмотренная двухосцилляторная модель, как и модель ангармонического осциллятора, имеет чисто качественный характер. Количественный расчет восприимчивости (даже линейной) весьма сложен и требует знания волновых функций и собственных частот системы (см. ниже).

Неупругое рассеяние света может быть связано также с возбуждением других степеней свободы вещества, например электронных. При этом частота света изменяется на частоту какого-либо электронного перехода атома или молекулы: $\omega_1 - \omega_2 = \omega_{mn} \equiv (\mathscr{C}_m - \mathscr{C}_n)/\hbar$. Если падающее поле содержит две частоты такие, что $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{mn} > 0$ и молекула находится на нижнем уровне *n*, то может произойти одновременное поглощение двух фотонов. При обратном процессе возбужденная молекула излучает два фотона (спонтанно или вынужденно).

В макроскопическом веществе свет взаимодействует не только с локальными внутренними колебаниями частиц, но и с коллективными возбуждениями вещества, например с акустическими, температурными, спиновыми, плазменными волнами, с колебаниями ориентации молекул.

Равновесная хаотическая часть этих волн модулирует показатель преломления (ср. (35)), и в спектре рассеянного света появляются соответствующие боковые компоненты $\omega_2 = \omega_1 \pm \Omega$. Наглядно рассеяние можно представлять как результат дифракции падающего света на бегущей решетке, образованной волнами давления, температуры и т. д. С квантовой точки зрения происходит рассеяние фотона падающего света (накачки) ħω₁ с рождением или уничтожением кванта возбуждения вещества ħΩ (фонона, магнона, плазмона, экситона, поляритона и т. д.). Для рассеяния на распространяющихся возбуждениях характерна зависимость частоты модуляции от направления наблюдения, т. е. от угла рассеяния: $\Omega = \Omega(\vartheta)$. Эта зависимость является следствием условия Брегга при дифракции или, иначе, условия синхро*низма* (закона сохранения импульса) $k_1 - k_2 \pm q = 0$ и закона дисперсии рассеивающей волны $q = q(\Omega)$, где q — волновой вектор возбуждения вещества. Формально влияние синхронизма на рамановский ангармонизм можно учесть, полагая, что кубичная восприимчивость зависит не только от частот, но и от волновых векторов (пространственная дисперсия).

Для описания вынужденного рассеяния на акустических волнах (РМБ — рассеяние Мандельштама — Бриллюэна) и других коллективных возбуждениях надо учесть неравновесную когерентную часть этих возбуждений, вызываемую бигармонической накачкой. Механизм возбуждения звука светом ясен из (33) — из-за электрострикции в веществе возникает источник переменного давления с разностной частотой Ω:

$$\Delta \rho(\mathbf{r}, t) = (1/2)\chi^{(1)} \left[\sum_{n} (E_n/2) \exp(-i\omega_n t) + \kappa \cdot c \right]^2 = (1/8)\chi^{(1)} E_1 E_2^{\bullet} \exp(-i\Omega t) + \dots \quad (6.2.60)$$

Этот источник порождает волны плотности $\Delta \rho$, распространяющиеся со скоростью звука v. Если волны накачки плоские, то $\Delta \rho \sim \\ \sim \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2\right)\cdot\boldsymbol{r}\right]$ и вынужденная звуковая волна будет иметь максимальную интенсивность при $|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|=q=\Omega/v$. Это условие синхронизма «выбирает» из непрерывного спектра акустических возбуждений, занимающего область от нуля примерно до 10^{11} Гц, одну (или две, при учете различия v для продольных и поперечных волн в аморфном твердом теле) дискретную компоненту с частотой

- v

$$\Omega = v | \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 | \approx 2vk \sin(\vartheta/2) |$$

(6.2.61)

и шириной, определяемой коэффициентом поглощения звука.

°Температурный ангармонизм. Из (61) следует, что при $\vartheta \neq 0$ рассеяние на акустических волнах, т. е. на волнах давления Δp и плотности $\Delta \rho$ является неупругим: $\Omega \sim v \neq 0$ (точнее, максимум рассеяния происходит при Ω≠0). Согласно (61) рассеяние с максимумом при Ω=0 может вызываться лишь нераспространяющимися возбуждениями, для которых v=0 или которые достаточно быстро затухают. Такое рассеяние происходит на флуктуациях температуры ΔT (или энтропии $\Delta S \sim \Delta T$), а также на флуктуациях концентрации ΔC в смесях и растворах. Величины x = p, T, C, ... (или $\rho, S, ...$) являются термодинамическими параметрами, задающими макроскопическое состояние вещества, и их колебания — тепловые («спонтанные») или вынужденные (когерентные) — приводят к нарушению оптической однородности среды $\Delta n = (\partial n / \partial x) \Delta x$ и к рассеянию света — спонтанному или вынужденному. Все эти рассеяния происходят с небольшим смещением частоты (по сравнению с рассеянием на молекулярных колебаниях) и объединяются под общим названием рэлеевское или молекулярное рассеяние [36] (последний термин подчеркивает отличие от рассеяния на макронеоднородностях — пылинках и других включениях).

Интегральная по спектру интенсивность спонтанного рассеяния на параметре x пропорциональна среднему квадрату $\overline{\Delta x^2}$, и ее можно рассчитывать термодинамически, однако форма спектра рассеянного света определяется кинетическими уравнениями, описывающими эволюцию поля x(r, t). Например, при x=T таким уравнением является уравнение диффузии

$$\dot{T} - a\nabla^2 T = \mathcal{P}/c_p 0, \qquad (6.2.62)$$

в котором a — температуропроводности, \mathscr{P} — мощность сторонних источников теплоты на единицу объема, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении (вообще, надо одновременно с ΔT учитывать колебания давления Δp при нагреве, но мы для простоты пренебрежем связью волн температуры и давления).

Решение (62) при $\mathcal{P}=0$, которое описывает спонтанное температурное рассеяние, можно представить как сумму плоских волн, экспоненциально затухающих во времени:

$$\Delta T(\mathbf{r}, t) = \sum_{q} T_{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\gamma t}, \qquad (6.2.63)$$

где $\gamma \equiv aq^2$. Как и в случае рассеяния на акустических волнах, рассеяние света с волновым вектором \boldsymbol{k}_1 в направлении \boldsymbol{k}_2 обусловлено «температурной решеткой» с $\boldsymbol{q} = \pm (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)$, однако согласно (63) эта решетка неподвижна, и поэтому дифракция на ней приводит к появлению в спектре рассеянного света *упругой* (несмещенной)

линии с шириной

$$\Delta \omega = 2\gamma = 8ak^2 \sin^2(\vartheta/2) \tag{6.2.64}$$

(в жидкостях $\Delta \omega \sim 10^8 \,\mathrm{c}^{-1}$ при $\vartheta = 90^\circ$). Обратная полуширина линии температурного (энтропийного) рассеяния $\tau_T \equiv 1/\gamma = \lambda^2/a$ имеет смысл времени диффузии температуры на расстояние длины волны $\lambda \equiv |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^{-1}$, т. е. времени релаксации температурной решетки.

Механизм вынужденного температурного рассеяния (ВТР) и соответствующего ангармонизма очевиден при наличии некоторого поглощения (ВТР-2). Действительно, в случае бигармонического поля вынуждающая сила в (62) имеет переменную составляющую:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{r}, t) = \omega \chi'' \overline{E^2(\boldsymbol{r}, t)} = \omega \chi'' \operatorname{Re} \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 e^{i(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r} - \Omega t)}, \quad (6.2.65)$$

которая порождает волну температуры

$$\Delta T = \operatorname{Re} T_{\Omega} e^{i (q \cdot r - \Omega t)}. \tag{6.2.66}$$

Ее амплитуда определяется подстановкой (65), (66) в (62):

$$T_{\Omega} = \frac{\omega \chi''/c_p \rho}{\gamma - i\Omega} \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^*; \qquad (6.2.67)$$

здесь $\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 \gg |\Omega|$ и $\chi'' \equiv \chi''(\omega)$.

Бегущая когерентная волна температуры (66) модулирует восприимчивость χ (в основном за счет падения плотности при тепловом расширении)¹):

$$\Delta \chi = \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_{p} \Delta T \approx -\chi \frac{\Delta T}{T}, \qquad (6.2.68)$$

поэтому волна восприимчивости имеет амплитуду

$$\chi_{\Omega} = \frac{\omega \chi''/c_p \rho}{\gamma - i\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p E_1 \cdot E_2^*.$$
 (6.2.69)

В результате возникает кубическая поляризация с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \equiv 2\omega_1 - \omega_2, \omega_4 \equiv 2\omega_2 - \omega_2$:

$$P^{(3)}(t) = \Delta \chi(t) E(t) = \operatorname{Re} \chi_{\Omega} (E_2 e^{-i\omega_1 t} + E_1^* e^{i\omega_2 t} + E_1 e^{-i\omega_3 t} + E_2^* e^{i\omega_4 t})/2.$$
(6.2.70)

Пусть E_1 , E_2 параллельны оси x, тогда из определения кубической восприимчивости находим

$$\chi_{xxxx}^{\frac{1}{2}12} = \chi_{xxxx}^{\frac{2}{12}1} = \chi_{xxxx}^{\frac{3}{3}112} = \chi_{xxxx}^{\frac{4}{22}1} = \frac{\omega\chi''}{2\rho c_p \left[aq^2 + i\left(\omega_2 - \omega_1\right)\right]} \left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)_p.$$
 (6.2.71)

Отметим интересную особенность ВТР-2: здесь усиливаются антистоксовы компоненты (ср. (56)), т. е. в процессе распространения энергия поля перекачивается из низкочастотных компонент в высокочастотные (так как $(\partial \chi/\partial T)_p < 0$).

¹⁾ В идеальном газе $N = p/\kappa T$, поэтому $\chi = \alpha p/\kappa T$, и если пренебречь завнсимостью α от T, то $(\partial \chi/\partial T)_p = -\chi/T$.

Для оценки температурного ангармонизма положим

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)_p = -\frac{\chi}{T}, \quad c_p \rho = \frac{5}{2} \varkappa N, \quad \omega \chi'' \equiv \frac{n^2}{4\pi \tau_E}, \quad aq^2 \equiv \frac{1}{\tau_T}, \quad (6.2.72)$$

где $\tau_E = n/\alpha c$ —время релаксации поля. Тогда при $|\omega_1 - \omega_2| \tau_T \ll 1$

$$E_{NL}^{2} \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(3)}} \approx \frac{40\pi U\tau_{E}}{3n^{2}\tau_{T}}, \qquad (6.2.73)$$

где $U = 3 \varkappa T N/2$ — плотность внутренней энергии. Таким образом, если $\tau_T = \tau_E$ (что при $\tau_E = 10^{-8}$ с соответствует $\alpha = 0,003$ см⁻¹), то нелинейная поляризация сравнивается с линейной, когда энергия поля $n^2 E_1^2/8\pi$ сравнивается с тепловой энергией вещества. Заметим, что если перейти от температуропроводности *a* к теплопроводности $\lambda = a\rho c_p$, то E_{NL}^2 можно представить в виде $8\pi\lambda q^2 T \tau_E$.

Электрокалорический ангармонизм. Температурный ангармонизм имеет место и в совершенно прозрачном веществе за счет оптического электрокалорического эффекта (соответствующее вынужденное рассеяние называется BTP-1).

Рассмотрим простейшую модель, описывающую влияние электрического поля на температуру непоглощающего вещества. При включении поля (постоянного или переменного) уровни энергии молекул за счет эффекта Штарка смещаются, и их населенности перестают соответствовать температуре термостата, роль которого обычно играют поступательные и вращательные степени свободы молекул (или колебания кристаллической решетки). За время релаксации T_1 происходит перераспределение населенностей с соответствующим изменением энергии термостата ¹), и в результате его температура изменяется. Отметим, что аналогичный магнитокалорический эффект применяется для получения сверхнизких температур (метод адиабатического размагничивания). Более точное объяснение следует из определения температуры для замкнутой системы (микроканонического ансамбля):

$$1/T = \partial S/\partial U = \varkappa \ \partial (\ln g)/\partial U, \tag{6.2.74}$$

где S — энтропия, U — внутренняя энергия и g(U) — плотность энергетических состояний. Последняя зависит от расположения уровней и поэтому изменяется при включении поля. Оценим вклад электрокалорического эффекта в температурный ан-

рармонизм. Согласно (4.1.32) при поляризации диэлектрика его термодинамические потенциалы получают приращение $v = -\chi |E_1|^2/4$ (на единицу объема). Выберем в качестве независимых переменных T и p, тогда энтропия определяется через производную потенциала Гиббса $\Phi(T, p)$ по температуре, поэтому изменение S при поляризации равно

$$\Delta S = -\left(\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p |E_1|^2.$$
(6.2.75)

¹) Здесь учитывается конечная теплоемкость внешних степеней свободы.

Умножив ΔS на *T*, получим приращение тепла ΔQ , а умножив на $-T/c_{\nu}\rho$, найдем приращение температуры:

$$\Delta T = -\frac{T}{4c_{p\rho}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_{p} |E_{1}|^{2}.$$
(6.2.76)

Из сравнения с (62) следует, что роль поглощаемой мощности в случае прозрачного вещества играет величина

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{SKB}} = -\frac{d\Delta Q}{dt} = -\frac{T}{4} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_{p} \frac{d|E_{1}|^{2}}{dt}.$$
(6.2.77)

В случае бигармонического поля получаем

$$\mathcal{P}_{_{\mathsf{3KB}}}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\Omega T}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_{\boldsymbol{p}} \operatorname{Im} \boldsymbol{E}_{1} \cdot \boldsymbol{E}_{2}^{*} e^{i (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r} - \Omega t)}. \quad (6.2.78)$$

Сравнивая (78) с (65), находим отношение электрокалорического ангармонизма к ангармонизму (71), связанному с поглощением:

$$\frac{\chi_{\Im\kappa}^{(3)}}{\chi_{\Pi\Gamma\Gamma\Pi}^{(3)}} \sim \frac{\Omega T}{2\omega\chi''} \left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)_p = \frac{2\pi\Omega T}{\alpha cn} \left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)_p.$$
(6.2.79)

Отсюда следует, что коэффициент поглощения, эквивалентный электрокалорическому эффекту, не велик:

$$\alpha_{_{\mathbf{9KB}}} \equiv \frac{2\pi\Omega T}{cn} \left| \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{p} \sim 10^{-4} \,\mathrm{cM^{-1}}, \qquad (6.2.80)$$

где принято $\Omega = 10^{\circ} \text{ c}^{-1}$, T = 300 K, $(\partial \chi / \partial T)_p = -10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Заметим, наконец, что за счет связи волн плотности и температуры электрострикция также дает вклад в температурный ангармонизм (см. [14], с. 249).

Ориентационный ангармонизм. Как уже отмечалось, вращение анизотропных молекул в газе также модулирует рассеянный свет, что при учете квантования вращательного движения приводит к появлению дискретных боковых компонент у рэлеевской (несмещенной) и рамановской линий в спектре спонтанного рассеяния. Однако при большой плотности частиц молекула не успевает сделать полного оборота за время ориентационной релаксации т, поэтому в жидкостях линии вращательного спектра перекрываются и рэлеевская линия приобретает широкий «пьедестал», простирающийся на десятки обратных сантиметров (так называемое крыло линии Рэлея). Рассеяние света на флуктуациях ориентации молекул называют также анизотропным (деполяризованным) рассеянием. При макроскопическом описании можно считать, что анизотропное рассеяние вызывается нарушениями симметрии среды (ее изотропности), т. е. рассеяние происходит на флуктуациях симметрии. Общий вид рассеянного спектра, с учетом рассмотренных выше возбуждений вещества, представлен на рис. 6.4.

Взаимодействие света с ориентационными степенями свободы молекул также является источником оптического ангармонизма, который проявляется в открытом еще в прошлом веке эффекте Керра (при этом $\Delta n \sim E_0^2$), оптическом эффекте Керра и самофокусировке ($\Delta n \sim |E_1|^2$), в эффекте вынужденного рассеяния на крыле линии Рэлея.
Оценим вклад ориентационного ангармонизма в кубичную восприимчивость. Рассмотрим сначала неполярную молекулу. В поле E(t)она приобретает индуцированный дипольный момент $d(t) \approx \alpha(\omega) \cdot E(t)$ (поглощением пренебрегаем) и среднюю по времени энергию (см. (4.1.32)):

$$\mathscr{V} = -\operatorname{Re} E^{(-)} \cdot \alpha \cdot E^{(+)}. \tag{6.2.81}$$

Следовательно, анизотропная молекула стремится повернуться относительно поля так, чтобы ее поляризуемость была максимальной.



Рис. 6.4. Основные виды рассеяния света, соответствующие им нелинейности и типичные частоты: 1 — температурное (энтропийное) рассеяние на флуктуациях температуры связано с электрокалорическим ангармонизмом ($\Delta\Omega \sim 10^8 \text{ c}^{-1}$); 2 — рассеяние Мандельштама — Бриллюэна ($\Omega \sim 10^{10} \text{ c}^{-1}$) на флуктуациях давления связано с стрикционным ангармонизмом; 3 — крыло линии Рэлея вызывается флуктуациями анизотропии и связано с ориентационным ангармонизмом ($\Delta\Omega \sim 10^{11} \text{ c}^{-1}$); 4 — комбинационное (рамановское) рассеяние на внутренних колебаниях молекул ($\Omega \sim 10^{14} \text{ c}^{-1}$). Первые три типа рассеяния объединяются терминами молекул лярное или рэлеевское рассеяние

Однако в равновесном веществе ориентации молекулы полем препятствует взаимодействие с соседями — релаксационные процессы восстанавливают нарушенное полем равновесное состояние с хаотической ориентацией. В результате конкуренции между полем и тепловым движением устанавливается динамическое равновесие со слабой степенью ориентации порядка $\mathscr{V}/\varkappa T$. При этом жидкость становится двупреломляющей — подобной одноосному кристаллу с осью, параллельной E(в случае линейной поляризации поля). Это явление называется onmuческим эффектом Keppa.

Пусть анизотропия поляризуемости характеризуется величиной $\Delta \alpha(\omega)$ (например, для линейной молекулы) $\Delta \alpha = \alpha_{11} - \alpha_{\perp} -$ разность поляризуемостей вдоль и поперек молекулы). Тогда индуцируемое полем с частотой ω_1 изменение восприимчивости $\Delta \chi(\omega_2)$ на частоте ω_2 будет по порядку величины равно произведению $\Delta \alpha(\omega_2)$ N на степень ориентации:

$$\Delta \chi \approx \Delta \alpha (\omega_1) \ \Delta \alpha (\omega_2) \ N |E_1|^2 / \varkappa T. \tag{6.2.82}$$

Итак, с точностью до числовых множителей для неполярных молекул

$$\chi^{(3)} \approx \Delta \alpha (\omega_1) \ \Delta \alpha (\omega_2) \ N/\varkappa T. \tag{6.2.83}$$

Полагая анизотропию сильной ($\Delta \alpha \approx \alpha = \chi^{(1)}/N$), получаем

$$E_{NL}^2 \equiv \chi^{(1)} / \chi^{(3)} \approx \varkappa T / \alpha \qquad (6.2.84)$$

Пусть $\alpha \approx a_0^3 \approx 10^{-24} \text{ см}^3$ и T = 300 K, тогда $E_{NL} = 2 \cdot 10^5 \text{ Гс}$, и если $\chi^{(1)} = 0,1$, то $\chi^{(3)} = 10^{-12} \text{ см}^3$ /эрг (ср. (12), (13), (37)).

Если у молекулы имеется постоянный дипольный момент d_0 и ориентирующее поле—статическое или медленно меняющееся за время ориентационной релаксации ($\tau \sim 10^{-12}$ с), — то эффективная энергия равна $\mathscr{V} = -d_0 \cdot E$ (индуцированным моментом теперь можно пренебречь). При этом степень ориентации будет уже пропорциональна ($\mathscr{V}/\varkappa T$)², так как линейный электрооптический эффект в жидкости запрещен (§ 6.1). В результате

$$\chi^{(3)}(\omega, -0, 0) \approx \Delta \alpha(\omega) N (d_0/\varkappa T)^2 \sim 10^{-10} \text{ cm}^3/\text{spr},$$
 (6.2.85)

 $E_{NL} \approx \varkappa T/d_0 \sim 10^4 \, \Gamma c \tag{6.2.86}$

(здесь принято $d_0 = 1$ Д). Таким образом, эффект Керра в полярных жидкостях заметно больше, чем в неполярных.

Пусть теперь ориентирующее поле — оптическое бигармоническое, причем $\Omega \equiv \omega_1 - \omega_2 < 1/\tau$, тогда \mathscr{V} и соответственно степень ориентации $\mathscr{V}^2/\varkappa T$ будут содержать переменную составляющую с частотой Ω . В результате поляризации на частоте пробного поля ω_3 (которая может и совпадать с ω_1 или ω_2) будет промодулирована, т. е. вещество будет излучать когерентное поле с частотами $\omega_3 \pm \Omega$. Таким образом, ориентационный ангармонизм дает резонансный вклад с шириной $2/\tau$ в кубическую восприимчивость $\chi^{(3)}(\omega_3, -\omega_2, \omega_1)$ в области ($\omega_1 - \omega_2) \leqslant 1/\tau$. При учете ориентационной релаксации этот вклад имеет мнимую часть, которая соответствует усилению поля ω_2 с максимумом при $\omega_2 = = \omega_1 - 1/\tau$ и приводит к эффекту вынужденного рассеяния на крыле линии Рэлея.

Количественно ориентационный ангармонизм описывается с помощью функции распределения молекул по ориентации, которая при $\Omega \tau \ll 1$ является стационарной:

$$P(\boldsymbol{\theta}) = Ce^{-\mathcal{V}^{2}/\varkappa T} = C \left[1 - \frac{\mathcal{V}^{2}}{\varkappa T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{V}^{2}}{\varkappa T} \right)^{2} - \dots \right], \quad (6.2.87)$$

где C — нормировочный множитель (зависящий, конечно, от температуры и поля), энергия $\mathscr{V}(\theta)$ определена в (81) и θ — совокупность трех углов, задающих ориентацию молекулы относительно лабораторной системы координат (углы Эйлера).

В случае неполярных молекул можно ограничиться линейным по 1/жТ разложением:

$$C = P^{(0)}(1 + \langle \mathcal{V} \rangle^{(0)} / \varkappa T), \quad P(\theta) = P^{(0)}[1 - (\mathcal{V} - \langle \mathcal{V} \rangle^{(0)}) / \varkappa T], \quad (6.2.88)$$

где

$$\langle \mathcal{V} \rangle^{(0)} \equiv \int d^3 \theta P^{(0)} \mathcal{V}, \quad P^{(0)} \equiv 1 / \int d^3 \theta = 1/8\pi^2.$$
 (6.2.89)

Усредненный по углам индуцированный дипольный момент имеет вид

$$\langle \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\theta}) \rangle \cdot \boldsymbol{E} + \langle \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\theta}) \rangle \cdot \boldsymbol{E} \boldsymbol{E} + \dots$$
 (6.2.90)

Угловые скобки означают усреднение с помощью возмущенной полем функции распределения $P(\theta)$. Если пренебречь внутримоле-

кулярным ангармонизмом ($\beta = 0$), то $\langle d \rangle = \alpha \cdot E$, где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &\equiv \langle \boldsymbol{\alpha} \left(\boldsymbol{\theta} \right) \rangle \equiv \int d^{3}\boldsymbol{\theta} P\left(\boldsymbol{\theta} \right) \boldsymbol{\alpha} \left(\boldsymbol{\theta} \right) = \\ &= \boldsymbol{\alpha}^{(0)} - (\langle \boldsymbol{\alpha} \left(\boldsymbol{\theta} \right) \mathcal{V} \left(\boldsymbol{\theta} \right) \rangle^{(0)} - \boldsymbol{\alpha}^{(0)} \langle \mathcal{V} \rangle^{(0)}) / \boldsymbol{\varkappa} T, \quad (6.2.91) \\ \boldsymbol{\alpha}^{(0)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} &\equiv \int d^{3}\boldsymbol{\theta} P^{(0)} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} \left(\boldsymbol{\theta} \right) = \delta_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} \left(\boldsymbol{\alpha}_{xx} + \boldsymbol{\alpha}_{yy} + \boldsymbol{\alpha}_{zz} \right) / 3 \qquad (6.2.92) \end{aligned}$$

($\alpha^{(0)}$ — усредненная по равновесной функции распределения линейная поляризуемость). Отсюда находим поправку к поляризуемости (подробнее см. [14]):

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \int d^3 \theta \left[\boldsymbol{\alpha} \left(\boldsymbol{\theta} \right) - \boldsymbol{\alpha}^{(\boldsymbol{\theta})} \right] \operatorname{Re} \boldsymbol{E}^{(-)} \cdot \boldsymbol{\alpha} \left(\boldsymbol{\theta} \right) \cdot \boldsymbol{E}^{(+)} / 8\pi^2 \varkappa T. \quad (6.2.93)$$

Здесь $\alpha(\theta)$ — тензор линейной поляризуемости в лабораторной системе координат для молекулы с заданной ориентацией θ .

При $\Omega \tau > 1$ надо учитывать изменение функции распределения во времени $P = P(\theta, t)$, определяемое с помощью кинетического уравнения (см. [14]) или уравнения типа Фоккера—Планка. Эти уравнения в приближении экспоненциальной релаксации дают обычную дисперсионную зависимость с центром при $\omega_1 = \omega_2$:

$$\chi^{(3)}(\omega_2 = \omega_2 - \omega_1 + \omega_1) \sim 1/[1 + i(\omega_1 - \omega_2)\tau].$$
 (6.2.94)

Следовательно, компонента поля с меньшей частотой (стоксова) усиливается ($\chi^{(3)''} < 0$), причем усиление максимально при $|\Omega| = 1/\tau$.

°Квантовая теория нелинейной поляризации. Нелинейные поляризуемости β , γ , ... молекул и восприимчивости вещества $\chi^{(2)} \approx N\beta$, $\chi^{(3)} \approx N\gamma$ можно вычислить аналогично линейной поляризуемости (§ 4.2)—с помощью уравнения для матрицы плотности с феноменологическими константами затухания. Проще, однако, воспользоваться общей формулой (3.3.36) для отклика $\langle f(t) \rangle$ квантовой системы на внешнее возмущение с энергией $\mathscr{V}(t)$, добавив затухание из общих соображений на конечной стадии расчета.

Нас интересует установившийся отклик системы на периодическое возмущение, поэтому нижние пределы интегрирования в (3.3.36) следует приравнять — ∞ . Верхние пределы можно приравнять + ∞ , если для учета принципа причинности добавить к подынтегральному выражению ступенчатые функции $\theta(t-t_1), \ldots, \theta(t_{k-1}-t_k)$. Введем затухание, необходимое для установившегося режима и практически неизбежное в любой системе, полагая (рис. 6.5)

$$\theta(t) = e^{-\varepsilon t}$$
 $(t > 0), \quad \theta(t) = 0 \quad (t < 0), \quad (6.2.95)$

где є— некоторая положительная константа, которую впоследствии заменим на v_{mn} .

Полагая в (3.3.36) $f = d_{\alpha}$ и $\mathcal{V} = -d \cdot E$, получаем для индуцированного дипольного момента порядка k следующее выражение (см. также [7]):

$$\langle d_{\alpha}(t) \rangle^{(k)} = (i/\hbar)^{k} \int dt_{1} \dots \int dt_{k} \theta (t-t_{1}) \dots \theta (t_{k-1}-t_{k}) \times \\ \times \operatorname{Sp} \left\{ \rho \left[\dots \left[d_{\alpha}'(t), \ d_{\alpha_{1}}'(t_{1}) \right], \dots, d_{\alpha_{k}}'(t_{k}) \right] \right\} E_{\alpha_{1}}(t_{1}) \dots E_{\alpha_{k}}(t_{k}).$$
 (6.2.96)

147

Здесь ρ — равновесный оператор плотности, а операторы $d'_{\alpha}(t)$ берутся в представлении взаимодействия. Подынтегральная функция в (96) зависит от k+1 временных аргументов, из которых, как легко проверить, лишь k являются независимыми. Эта тензорная функция называется функцией отклика системы или ее функцией Грина (причинной и при k > 1 многовременной).

Пусть поле имеет дискретный спектр:

$$E(t) = \sum_{p} E_{p} \exp(-i\omega_{p}t)/2, \quad p = \pm 1, \ \pm 2, \ \dots, \qquad (6.2.97)$$

тогда интегрирование в (96) проводится элементарно. Так, для k=1, находим

$$\langle d_{\alpha}(t) \rangle^{(1)} = \frac{i}{2\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt_{1} E_{\rho\beta} \exp\left[-i\omega_{\rho}t_{1} + \varepsilon\left(t_{1} - t\right)\right] \times \\ \times \rho_{nn} \left[d_{nm}^{(\alpha)} d_{mn}^{(\beta)} \exp\left(i\omega_{nm}t + i\omega_{mn}t_{1}\right) - d_{nm}^{(\beta)} d_{mn}^{(\alpha)} \exp\left(i\omega_{nm}t_{1} + i\omega_{mn}t\right)\right] = \\ = \frac{\rho_{nn}}{2\hbar} \left(\frac{d_{nm}^{(\alpha)} d_{mn}^{(\beta)}}{\omega_{mn} - \omega_{p} - i\varepsilon} - \frac{d_{nm}^{(\beta)} d_{mn}^{(\alpha)}}{\omega_{nm} - \omega_{p} - i\varepsilon}\right) E_{\rho\beta} \exp\left(-i\omega_{p}t\right).$$
(6.2.98)

Здесь подразумевается суммирование по индексам состояний *m*, *n* и по декартовым индексам α , $\beta = x$, *y*, *z* (которые иногда для компак ности пишем вверху), а также по частотному индексу *p*. Если для учета затухания заменить ε на скорость затухания γ_{mn} недиагональной компоненты матрицы плотности, то определяемая (98) линейная восприимчивость $\chi_{\alpha\beta}^{(1)}$ совпадает с (4.2.18).

Аналогично при k=2 из (96) следует

$$\langle d_{\alpha} \rangle^{(2)} = \frac{1}{4\hbar^{2}} \int_{-\infty}^{t} dt_{1} \int_{-\infty}^{t_{1}} dt_{2} E_{p\beta} E_{q\gamma} \exp\left[-i\left(\omega_{p}t_{1}+\omega_{q}t_{2}\right)+\varepsilon\left(t_{2}-t\right)\right] \times \\ \times \rho_{nn} \left\{ d_{nm}^{(\alpha)} d_{ml}^{(\beta)} d_{ln}^{(\gamma)} \exp\left[i\left(\omega_{nm}t+\omega_{ml}t_{1}+\omega_{ln}t_{2}\right)\right]+\dots\right\} = \\ = \left[\frac{\rho_{nn} d_{nm}^{(\alpha)} d_{ml}^{(\beta)} d_{ln}^{(\gamma)}}{4\hbar^{2} \left(\omega_{mn}-\omega_{p}-\omega_{q}-i\varepsilon\right) \left(\omega_{ln}-\omega_{q}-i\varepsilon\right)} + \dots \right] E_{p\beta} E_{q\gamma} \exp\left[-i\left(\omega_{p}+\omega_{q}\right)t\right].$$

$$(6.2.99)$$

Здесь выписан вклад лишь первого из четырех слагаемых двойного коммутатора [[d(t), $d(t_1)$], $d(t_2)$], так как остальные различаются только знаками и перестановкой индексов состояний l, m, n.

Рассмотрим сложение частоты $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. При $\omega_1 \neq \omega_2$ в двойной сумме по частотам поля слагаемые, осциллирующие с частотой ω_0 , встречаются два раза: при q=1, p=2 и при q=2, p=1, поэтому ω_0 -компоненту дипольного момента можно представить в виде суммы двух слагаемых, различающихся перестановкой индексов 1, γ и 2, β :

$$d_{0\alpha}^{(2)} = E_{2\beta} E_{1\gamma} \Pi_{\beta\gamma}^{21} \frac{\rho_{nn}}{2\hbar^2} \left(\frac{d_{nm}^{(\alpha)} d_{nl}^{(\beta)} d_{ln}^{(\gamma)}}{D_{mn}^{(0)} D_{ln}^{(1)}} + \dots \right), \qquad (6.2.100)$$

$$D_{mn}^{(p)} \equiv \omega_{mn} - \omega_p - i\gamma_{mn},$$

П—оператор суммирования по перестановкам и мы заменили ε на γ_{mn} . Заметим, что дисперсионная функция 1/D является фурье-образом ступенчатой функции $\theta(t)$ (рис. 6.5).



Рис. 6.5. Ступенчатая функция Хевисайда, умноженная на e^{-et}, и ее фурье-образ используются для учета влияния причинности и затухания на отклик системы

Итак, квадратичная восприимчивость вещества, состоящего из N одинаково ориентированных невзаимодействующих молекул, выражается через невозмущенные населенности уровней $N_n = \rho_{nn}N$, частоты ω_{mn} и моменты d_{mn} переходов следующим образом:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\bar{\mathbf{0}}_{12}} = \frac{1}{2\hbar^2} \prod_{lmn}^{21} \sum_{lmn} N_n \left(\frac{d_{nm}^{(\alpha)} d_{ml}^{(\beta)} d_{ln}^{(\gamma)}}{D_{mn}^{(0)} D_{ln}^{(1)}} + \frac{d_{nm}^{(\gamma)} d_{ml}^{(\beta)} d_{ln}^{(\alpha)}}{D_{nl}^{(0)} D_{nm}^{(1)}} - \frac{d_{nm}^{(\beta)} d_{mn}^{(\alpha)} d_{ln}^{(\gamma)}}{D_{mn}^{(0)} D_{lm}^{(1)}} - \frac{d_{nm}^{(\beta)} d_{mn}^{(\alpha)} d_{ln}^{(\beta)}}{D_{mn}^{(0)} D_{lm}^{(1)}} \right), \quad (6.2.101)$$

где индексы 0 и $\overline{0}$ относятся к частотам $\pm \omega_0$.

Нетрудно убедиться, что выражение (101) обладает всеми свойствами симметрии, установленными в § 6.1. Оператор П обеспечивает частотно-пространственную симметрию по последней паре индексов (6.1.14). Свойство (6.1.15) следует из $D_{mn}^{(p)} = -D_{nm}^{(p)*}$ и $d_{mn}^* =$ $= d_{nm}$, так что изменение знаков всех частот и мнимой единицы лишь меняет местами слагаемые в (101) (первое со вторым, третье с четвертым).

Равенство нулю $\chi^{(2)}$ в центросимметричных средах также следует из (101). Собственные состояния системы с центром инверсии имеют определенную четность: $\varphi_n(-r) = \pm \varphi_n(r)$, поэтому $d_{mn} = 0$, если φ_m и φ_n имеют одинаковые четности. Следовательно, хотя бы один из трех моментов, связывающих состояния l, m, n, равен нулю.

Симметрия (6.1.20) в случае прозрачного вещества также следует из (101) при $\gamma_{mn} = 0$. При этом можно попарно объединить последние слагаемые в (101):

$$\frac{1}{D_{lm}^{(0)}D_{ln}^{(1)}} + \frac{1}{D_{lm}^{(0)}D_{nm}^{(2)}} = \frac{1}{D_{ln}^{(1)}D_{nm}^{(2)}}$$

В результате из 8 остаются 6=3! слагаемых, отличающихся перестановками пар индексов (α , $\overline{0}$), (β , 2), (γ , 1):

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\bar{0}_{21}} = \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{lmn} N_n \prod_{\alpha\beta\gamma}^{\bar{0}_{21}} \frac{d_{nm}^{(\alpha)} d_{nl}^{(\beta)} d_{ln}^{(\gamma)}}{(\omega_{mn} - \omega_0) (\omega_{ln} - \omega_1)} .$$
(6.2.102)

Восприимчивость следующего порядка вычисляется аналогичным образом. Каждый следующий порядок теории возмущения добавляет множители вида $d_{ln}/\hbar D_{ln}^{(p)}$. Отсюда следует оценка для оптического ангармонизма в области прозрачности:

$$E_{NL} \equiv \frac{\chi^{(k)}}{\chi^{(k+1)}} \approx \frac{\hbar\omega_0}{e\alpha_0} \equiv E_0, \qquad (6.2.103)$$

где a_0 , ω_0 , E_0 — характерные для молекулы размер, частота и внутреннее поле. Для атома водорода $E_0 = 13,6B/a_0 \approx 10^7$ Гс. Полагая $\chi^{(1)} = 0,1$, получаем $\chi^{(2)} = 10^{-8}$ Гс⁻¹, $\chi^{(3)} = 10^{-15}$ Гс⁻². Несмотря на грубость этой оценки, она дает верное представление о порядках величин. При резонансе $\chi^{(k)}$ соответственно возрастают.

[°]Вероятность многофотонных переходов. Если интересоваться лишь энергетической стороной вопроса, то нелинейное взаимодействие излучения с веществом можно описывать в терминах вероятностей или сечений многофотонных переходов (так, как это было сделано в гл. 2 для линейного однофотонного взаимодействия). При этом поле можно, как правило, не квантовать, т. е. использовать полуклассическую теорию, но результаты расчетов удобно трактовать на фотонном языке.

Найдем в качестве примера вероятность двухфотонного элементарного процесса, описывающего эффекты рамановского рассеяния и двухфотонного (индуцированного) поглощения или излучения. Подставив амплитуду перехода первого приближения (2.1.22) в уравнение (2.1.19в), получим для амплитуды двухфотонного перехода с уровня а на уровень b:

$$c_{ba}^{(2)}(t) = (i\hbar)^{-2} \int_{t_0}^t dt_2 \mathcal{P}'_{bn}(t_2) \int_{0}^{t_2} dt_1 \mathcal{P}'_{na}(t_1).$$
(6.2.104)

Здесь индекс *n*, по которому подразумевается суммирование, нумерует все промежуточные (виртуальные) невозмущенные состояния, посредством которых осуществляется переход. Это выражение отражает важную особенность квантовой динамики — в переходах участвуют все возможные виртуальные состояния (с кажущимся нарушением законов сохранения) с единственным ограничением, следующим из принципа причинности: $t > t_2 > t_1 > t_0$.

Подставим в (104) дипольное возмущение $\mathcal{V}' = -d' \cdot E$ и полигармоническое поле (97) (полагаем t_0 , $t = \pm \infty$):

$$c_{ba}^{(2)} = -(2\hbar)^{-2} \sum_{nqp} d_{bn} \cdot E_q d_{na} \cdot E_p \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \exp\left[i\left(\omega_{bn} - \omega_q\right)t_2 + i\left(\omega_{na} - \omega_p\right)t_1\right] = \\ = -\sum_{nqp} \frac{d_{bn} \cdot E_q d_{na} \cdot E_p}{4\hbar^2 i\left(\omega_{na} - \omega_p\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \exp\left[i\left(\omega_{ba} - \omega_q - \omega_p\right)t_2\right]. \quad (6.2.105)$$

Вклад нижнего предела в интеграле по t_1 исчезает за счет адиабатического включения возмущения или затухания (см. (95) при $\varepsilon \rightarrow +0$). Оставшийся в (105) интеграл является одним из представлений δ -функции: $\int dt_2 \dots = 2\pi \delta (\omega_{ba} - \omega_q - \omega_p)$. Итак, поле возбуждает молекулу во втором порядке теории возмущений лишь при совпадении суммы (алгебраической) двух частот поля и частоты рассматриваемого перехода $a \rightarrow b$. Это условие является обобщением постулата Бора для однофотонного резонанса.

Пусть две частоты поля ω_1 и ω_2 удовлетворяют условию «комбинационного» резонанса $\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_{ba}$, тогда из (105) имеем

$$c_{ba}^{(2)} = i \left(2\pi/\hbar \right) \left(E_1 \cdot M^{12} \cdot E_2 \right) \delta \left(\omega_{ba} - \omega_1 - \omega_2 \right),$$

$$M_{\alpha\beta}^{12} = M_{\beta\alpha}^{21} \equiv \frac{1}{4\hbar} \sum_n \left(\frac{d_{bn}^{(\alpha)} d_{na}^{(\beta)}}{\omega_{na} - \omega_2} + \frac{d_{bn}^{(\beta)} d_{na}^{(\alpha)}}{\omega_{na} - \omega_1} \right).$$
(6.2.106)

Если $\omega_{ba} > 0$ (т. е. исходное состояние молекулы — нижнее), то (106) определяет амплитуду процесса поглощения молекулой двух фотонов (при ω_1 , $\omega_2 > 0$) или поглощения одного ($\omega_1 > 0$) и рождения другого — стоксова — фотона ($\omega_2 < 0$). В последнем случае (106) является амплитудой стоксова рамановского процесса. Аналогично при $\omega_{ba} < 0$ (106) определяет двухфотонное излучение или антистоксово рассеяние. Можно считать, что два слагаемых в (106) отличаются последовательностью поглощения (или рождения) фотонов ω_1 и ω_2 .

Заметим, что возможны четыре варианта двухфотонного излучения — вынужденное, спонтанно-вынужденное, вынужденно-спонтанное и чисто спонтанное (рис. 6.1, *e*). Этим процессам соответствуют четыре слагаемых в выражении $(N_1+1)(N_2+1)=N_1N_2+N_1+N_2+1$, следующем из (106) при замене E_p на операторы (здесь N_p — исходные числа фотонов).

Из (106) следует, что максимальный вклад в амплитуду перехода дают виртуальные состояния с минимальным дефицитом энергии $\hbar(\omega_{na}-\omega_{p})$. Отметим, что различные «пути» перехода (т. е. вклады различных виртуальных состояний) могут отличаться знаками и подавлять друг друга (квантовая интерференция состояний).

Чтобы найти из (106) вероятность перехода, надо определить смысл квадрата δ-функции:

$$[\delta(\omega)]^2 = \delta(\omega) \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, e^{i\omega t} / 2\pi = \delta(\omega) \, T / 2\pi. \qquad (6.2.107)$$

Из (106), (107) получаем вероятность двухфотонного перехода в единицу времени, т. е. скорость перехода (ср. вывод (2.2.10)):

$$W_{ba}^{(2)} = 2\pi |K_{ba}^{(2)}|^2 \,\delta(\omega_{ba} - \omega_2 - \omega_1)/\hbar^2, \qquad (6.2.108)$$

$$K_{(2)}^{(2)} = F_1 \cdot M^{12} \cdot F_2 \qquad (6.2.108)$$

(0.2.109)

Сєгласно (108) двухфотонный переход $a \rightarrow b$ возможен, если разрешены виртуальные переходы $a \rightarrow n$ и $n \rightarrow b$. В центросимметричной системе уровни a и b должны иметь одинаковую четность, при этом однофотонный переход между ними будет запрещен (альтернативный запрет). Таким образом, двухфотонная и, в частности, рамановская спектроскопия позволяют исследовать уровни, не доступные линейной спектроскопии.

Для учета конечной ширины резонанса следует заменить $\delta(\omega)$ на нормированный форм-фактор $g(\omega)$ (см. (2.2.11)). Полученное выражение отличается от вероятности однофотонного перехода (2.2.11) заменой частоты Рабн $|d_{ba} \cdot E_1|/\hbar \equiv \Omega$ на $2K_{ba}^{(2)}$. Аналогичную структуру имеют вероятности k-фотонных переходов — каждый дополнительный фотон ω_p , участвующий в переходе, дает в $K_{ba}^{(k)}$ фактор вида $d_{mn} \cdot E_p/\hbar (\omega_{na} - \omega_p - ... - \omega_1) \sim \Omega/\omega_0 \sim E_p/E_{NL}$ (ср. (103)). Как и в случае однофотонных переходов (§ 2.3), скорость пере-

Как и в случае однофотонных переходов (§ 2.3), скорость перехода $W^{(2)}$ определяет сечение $\sigma^{(2)}$ и коэффициент поглощения (усиления) $\alpha^{(2)}$, а также мнимую часть кубической восприимчивости $\chi^{(3)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_1)$. Сечение вынужденного двухфотонного перехода определим как скорость перехода в случае единичных плотностей потоков фотонов:

$$\sigma_{\rm BbH}^{(2)} = \frac{W^{(2)}}{F_1 F_2}, \qquad F_p = \frac{I_p}{\hbar \omega_p} = \frac{c}{8\pi \hbar \omega_p} |E_p|^2. \tag{6.2.110}$$

Для учета конечной ширины перехода заменим δ-функцию в (108) на нормированный форм-фактор g (§ 2.2):

$$\sigma_{\text{BNH}}^{(2)} = 128\pi^3 k_1 k_2 | \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{M}^{12} \cdot \boldsymbol{e}_2 |^2 g (\omega_{ba} - \omega_2 - \omega_1), \qquad (6.2.111)$$

где $k_n \equiv \omega_n/c$.

Коэффициент двухфотонного поглощения для поля с частотой ω₂ при наличии второго поля с частотой ω₁ равен (ср. (1.1.4))

$$\alpha^{(2)}(\omega_2) = \pm \sigma^{(2)}_{\text{BBH}} \Delta NF_1,$$
 (6.2.112)

где $\Delta N \equiv N_a - N_b$ — разность населенностей на единицу объема.

Поглощаемая из поля ω_2 мощность на единицу объема вещества

$$\mathcal{P}_{2} = \omega_{2} \operatorname{Im} \boldsymbol{P}_{2}^{(3)} \cdot \boldsymbol{E}_{2}^{*}/2 = \omega_{2} \operatorname{Im} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\overline{21}21} \boldsymbol{E}_{2\alpha}^{*} \boldsymbol{E}_{1\beta}^{*} \boldsymbol{E}_{2\gamma} \boldsymbol{E}_{1\delta}/2. \quad (6.2.113)$$

С другой стороны, $\mathcal{P}_2 = \alpha^{(2)} I_2$. Сравнивая (113) с (112), находим в случае вещественных моментов переходов d_{mn}

Im
$$\chi^{\overline{21}_{21}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm 4\pi\hbar^{-1}\Delta N M^{21}_{\alpha\beta}M^{21}_{\gamma\delta}g(\omega_{ba}-\omega_1-\omega_2).$$
 (6.2.114)

Наконец, полная кубическая восприимчивость следует из (114) при замене g на $1/\pi (\omega_{ba} - \omega_1 - \omega_2 - i\gamma)$. Нетрудно проверить, что прямое вычисление $\chi^{(3)}$ с помощью (96) в однорезонансном приближении дает тот же результат.

Формулы (108)—(111) относятся к чисто вынужденным двухфотонным переходам. В случае спонтанно-вынужденных переходов (приводящих к спонтанному рамановскому рассеянию) роль $|E_2|^2$ играют квантовые флуктуации поля, которые дают эквивалентную плотность потока фотонов $F_{2vac} = c/L^3$ в каждой моде поля в окрестности частоты ω_2 , где L^3 —объем квантования (§ 7.3). Суммируя по всем модам около частоты $\omega_{ba} - \omega_1$, найдем

$$\sigma_{\text{CI. BUH}}^{(2)} \equiv W_{\text{CI. BUH}}^{(2)} / F_1 = (c/L^3) \sum_{k_2} \sigma_{\text{BUH}}^{(2)} = \int d\omega_2 \int_{4\pi} d\Omega_2 k_2^2 \sum_{v_2} \sigma_{\text{BUH}}^{(2)} / (2\pi)^3 \equiv \int_{4\pi} d\Omega_2 \sum_{v_2} (d\sigma_2^{(2)}/d\Omega)_{\text{CI. BUH}}, \quad (6.2.115)$$

где v_2 —индекс поляризации. Подставив сюда (111), получим дифференциальное сечение на единичный телесный угол и один тип поляризации поля ω_2 :

$$(d\sigma_2^{(2)}/d\Omega)_{\rm cn.\,BMH} = 16k_1k_2^3 | \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{M}^{12} \cdot \boldsymbol{e}_2 |^2.$$
(6.2.116)

Далее, заменяя F_1 на c/L^3 и суммируя по всем модам поля ω_1 от 0 до частоты перехода ω_{ba} , находим скорость чисто спонтанного перехода:

$$W_{\rm cn}^{(2)} = (c/L^3) \sum_{k_1} \sigma_{\rm cn. \ BMH}^{(2)} = (2/\pi^3) \int_0^{\omega_{ba}} d\omega_1 \int_{4\pi} d\Omega_1 d\Omega_2 \sum_{\nu_1 \nu_2} k_1^3 k_2^3 |e_1 \cdot M^{12} \cdot e_2|^2.$$
(6.2.117)

Чтобы грубо оценить вероятность двухфотонного распада в оптическом диапазоне, положим все частоты в (117) равными $\omega_0 = e^2/2\hbar a_0 = \alpha c/2a_0$, а «поляризуемость перехода» M равной a_0^3 , где $\alpha \approx 1/137$. Пренебрегая другими числовыми множителями, получим (ср. (2.5.11))

$$W_{\rm cri}^{(2)} \sim \omega_0 \, (\alpha/2)^6 \approx 50 \, {\rm c}^{-1}.$$

Строгий расчет для перехода $2s \rightarrow 1s$ в атоме водорода дает 8 с⁻¹. Итак, $W_{cn}^{(2)}$ в $137^3 \sim 10^6$ раз меньше $W_{cn}^{(1)}$. Несмотря на малую вероятность, двухфотонный распад без особого труда обнаруживается с помощью двух ФЭУ и схемы совпадений. Подчеркнем, что спонтанное (а также тепловое) двухфотонное излучение, в отличие от однофотонного, имеет непрерывный спектр, не связанный с дискретным спектром невозмущенного атома. Статистика двухфотонного излучения нагретого тела также существенно отличается от однофотонного, что связано с тем, что фотоны излучаются парами. Таким образом, ангармонизм вещества приводит, в принципе, к отклонению статистики теплового излучения от гауссовой [37].

Выводы. Итак, в оптический ангармонизм макроскопического вещества вносит вклад целый ряд механизмов. Квадратичная восприимчивость $\chi^{(2)}$ связана, как правило, с нелинейностью связанных электронов. Она отлична от нуля только в пьезокристаллах и имеет порядок 10-7-10-9 Гс-1 при условии, что все частоты лежат в оптическом окне прозрачности. Кубическая восприимчивость $\chi^{(3)}$ в конденсированном прозрачном веществе также вызывается электронной нелинейностью $(\hat{\chi}^{(3)} \sim 10^{-15} \, \Gamma c^{-2})$, если все частоты оптические. Если же разность двух частот Ω совпадает с частотой молекулярных колебаний, то $\chi^{(3)}$ возрастает до 10-12-10-13 из-за смешанной электронно-ядерной (плачековской или рамановской) нелинейности. При $\Omega{\sim}0$ основной вклад в случае твердых тел вносит электрострикция ($\chi^{(3)} \sim 10^{-13}$), в жидкостях к ней добавляется ориентационная (керровская) нелинейность ($\chi^{(3)}$ ~10⁻¹²). Электрокалорический ангармонизм дает обычно $\chi^{(3)}$ < €10-13. Чрезвычайно сильные нелинейные оптические эффекты наблюдают в жидких кристаллах и плазме. Отметим, что нелинейная электродинамика плазмы хорошо описывается кинетическими уравнениями Ландау — Власова (см. [23]).

§ 6.3. Макроскопическая нелинейная оптика

Итак, с помощью классических или квантовых микромоделей мы нашли поляризацию вещества P в заданном поле E, т. е. исключили переменные вещества. Подставив $D = E + 4\pi P$ в макроскопические уравнения Максвелла, мы получим замкнутую систему уравнений для E, H, описывающую излучение и распространение электромагнитного поля в веществе с учетом его нелинейности. Наблюдаемые в оптическом диапазоне проявления нелинейности чрезвычайно разнообразны и зависят от особенностей как вещества, так и исходного поля — его амплитуды, пространственного и временного спектра. Определяющим параметром является, конечно, отношение E/E_{NL} , которое, как правило, много меньше единицы.

Исходные соотношения. Ниже будут рассмотрены основные типы стационарных эффектов. При этом поле можно представить в виде суммы независимых спектральных компонент:

$$E(\mathbf{r}, t) = (1/2) \sum_{n} E_{n}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{n}t), \qquad (6.3.1)$$
$$E_{-n} = E_{n}^{*}, \quad \omega_{-n} = -\omega_{n}, \quad n = \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

Амплитуды монохроматических вол
н $E_n\left(r\right)$ удовлетворяют системе волновых уравнений Гельмгольца, связанных друг с другом

за счет ангармонизма среды, которую полагаем немагнитной:

$$\mathcal{P}^{\mathbf{z}} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_{n} - \boldsymbol{\omega}_{n}^{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{n} \cdot \boldsymbol{E}_{n} = 4\pi \boldsymbol{\omega}_{n}^{2} \boldsymbol{P}_{n}^{NL}(\boldsymbol{r}).$$
(6.3.2)

Эти уравнения легко получить из уравнений Максвелла (4.1.9). Здесь линейная часть поляризации включена в ε_n . Амплитуда нелинейной поляризации с частотой — ω_n , которая служит источником макрополя $E_{n_1}^*$, определяется через нелинейную восприимчивость (§ 6.1):

$$P_{-n_1}^{NL}(\mathbf{r}) = \sum_{m=3}^{\infty} \chi^{(m-1)}(\omega_{n_1}; \omega_{n_2}, \ldots, \omega_{n_m}) : E_{n_2}(\mathbf{r}) \ldots E_{n_m}(\mathbf{r}), \quad (6.3.3)$$

где

1

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_{n_i} = 0. \tag{6.3.4}$$

Для описания некогерентных (шумовых) полей — например, теплового или комбинационного (рамановского) излучения — в правую часть (2) следует добавить ланжевеновы случайные источники. Их спектральная плотность, согласно флуктуационно-диссипативной теореме (ФДТ), пропорциональна соответственно $\chi^{(1)''}$ или $\chi^{(3)''}$ (см. (6.2.58)). Другой метод расчета шумового излучения нелинейной среды использует формулы типа Кирхгофа, сразу выражающие интенсивность шумов через температуру среды и решения динамических уравнений (1) (см., например, (6.4.18), (6.5.51), (7.1.6)).

Классификация нелинейных эффектов. Из уравнений Максвелла следует (см. (4.1.10)), что средняя за период удельная мощность, поглощаемая веществом из поля в точке *r* за счет ангармонизма,

$$\mathcal{P}_{NL}(\mathbf{r}) = (i/4) \sum_{n} \omega_{n} \mathbf{E}_{n} \cdot \mathbf{P}_{-n} = (i/4) \sum_{m=3}^{\infty} \sum_{n_{1}} \omega_{n_{1}} \boldsymbol{\chi}^{(m-1)} : \mathbf{E}_{n_{1}} \cdots \mathbf{E}_{n_{m}}.$$
(6.3.5)

Каждое слагаемое $\mathcal{P}^{(m)}(r)$ в последней сумме описывает *m*-частотное взаимодействие. Если представить амплитуды поля в виде

$$\boldsymbol{E}_{n}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha} \hat{\boldsymbol{x}}_{\alpha} | \boldsymbol{E}_{n\alpha}(\boldsymbol{r}) | \exp[i\varphi_{n\alpha}(\boldsymbol{r})], \qquad (6.3.6)$$

где $\alpha = x, y, z,$ то $\mathcal{P}^{(m)}$ будет по величине и знаку зависеть от $\varphi^{(m)}(\mathbf{r}) \equiv \varphi_{n_1\alpha_1} + \ldots + \varphi_{n_m\alpha_m}$, т. е. от соотношения между фазами спектральных компонент поля. Такие взаимодействия называют *параметрическими*. Из (5) ясно, что параметрическое взаимодействие *m* гармоник дает накапливающийся в пространстве эффект лишь при $\varphi^{(m)}(\mathbf{r}) = \text{const}$, что возможно только для совокупности плоских волн, когда $\varphi_{n\alpha}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}, \mathbf{k}_{-n} \equiv -\mathbf{k}_n$. При этом волновые векторы взаимодействик:

$$\Delta \boldsymbol{k}^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{k}_{n_{i}} = 0.$$
(6.3.7)

Это условие, при учете (4), называют условием пространственногосинхронизма или согласования фазовых скоростей.

Часто в сумме (5) эффективно лишь одно слагаемое низшегопорядка (m=3 или 4, т. е. трех- или четырехчастотное взаимодействие) с определенной комбинацией знаков частот s_n . Этой комбинации можно поставить в соответствие элементарный многофотонный процесс с участием m фотонов, тогда (4) и (7) можно трактовать как законы сохранения энергии $\sum \hbar \omega_n$ и импульса поля $\sum \hbar k_n$. При параметрическом процессе энергия вещества не меняется, т. е. исходный \mathfrak{S}_a и конечный \mathfrak{S}_b уровни совпадают, $\omega_{ba} = 0$ (рис. 6.1, a).

Можно выделить далее *резонансные* параметрические процессы, для которых один или более виртуальных уровней совпадают с реальными. При этом одновременно становятся существенными непараметрические эффекты (см. ниже) — появляется линейное (или многофотонное) поглощение (или усиление), $\alpha \neq 0$ и энергия поля не сохраняется. Однако при условии малости поглощения требование синхронизма (7) остается. Заметим, что при, например, m=4 возможны одно-, двух- и трехкратные резонансы. Эффективность резонансных взаимодействий сильно зависит от частот ω_n (даже без учета условия синхронизма), восприимчивости здесь принимают комплексные значения.

Вне промежуточных резонансов $\alpha \approx 0$, восприимчивости вещественны и их дисперсия мала, поэтому эффективность нерезонансных параметрических процессов зависит от частот лишь косвенно — из-за условия синхронизма, которое при фиксированных направлениях k_n выполняется только для определенного набора частот, а при фиксированных частотах — для некоторого множества направлений. Таким образом, эффективность параметрических взаимодействий испытывает совместную частотно-угловую дисперсию.

Вернемся к сумме (5). В ней среди слагаемых четного порядка mимеются вырожденные — с парными комбинациями индексов вида $n_i = -n_j$, для которых $\varphi^{(m)} \equiv 0$. Соответствующие взаимодействия, зависящие лишь от интенсивностей гармоник поля $|E_n|^2$, называют непараметрическими. Для них условие синхронизма выполняется автоматически. Мощность, поглощаемая на частоте ω_1 , за счет непараметрического взаимодействия *l*-частотного поля согласно (5) равна

 $\mathcal{P}_1(\boldsymbol{r}) = (1/2) \,\omega_1 \operatorname{Im} \chi^{(2l-1)}(-\omega_1; \,\omega_1 \,\ldots - \omega_l, \,\omega_l) : E_1^* E_1 \ldots E_l^* E_l. \quad (6.3.8)$

Она сохраняет знак для данного набора частот и медленно (по сравнению с $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$) меняется в пространстве при любой конфигурации поля, так как фазы гармоник не влияют на (8).

При непараметрических элементарных процессах, например при двухфотонном поглощении или рамановском переходе, конечная энергия вещества отлична от начальной (рис. 6.1), и поэтому энергия поля не сохраняется ¹). При этом кроме тривиального здесь условия (4)

Заметим, однако, что индуцированной дисперсии, сопровождающей многофотонное поглощение (как и линейной дисперсии), соответствует виртуальный процесс с ω_{ba}=0.

имеет место резонанс при

$$\sum_{n=1}^{l} \omega_n = \omega_{ba}. \tag{6.3.9}$$

При наличии дополнительных промежуточных резонансов непараметрический процесс называется каскадным или резонансным. Такие процессы характеризуются сложной дисперсионной зависимостью от частот поля ω_n по отдельности. Примеры: резонансное комбинационное рассеяние и каскадное двухфотонное поглощение в трехуровневой системе (рис. 6.1, ∂).

В случае нерезонансных (некаскадных) процессов $\alpha^{(1)}=0$ и эффективность непараметрического взаимодействия зависит согласно (9) в основном лишь от суммы всех частот поля $\sum \omega_n$ (этот случай можно назвать однорезонансным).

Заметим, что при непараметрических процессах новые спектральные компоненты возникают лишь за счет спонтанных или спонтанновынужденных переходов и излучение при отсутствии обратной связи имеет шумовой, *некогерентный* характер (даже при когерентной накачке с определенной фазой). Пример — неупругое рассеяние света. В то же время при параметрических процессах возможна генерация когерентных полей с новыми частотами (генерация гармоник).

Эффекты нелинейной оптики можно дополнительно классифицировать по числу существенных спектральных компонент или по числу плоских волн (мод). Например, к одночастотным непараметрическим (вырожденным) эффектам относятся нелинейное поглощение и дисперсия $(l\omega_1 = \omega_{ba})$ и эффект насыщения $(\omega_1 - \omega_1 + \ldots + \omega_1 = \omega_{ba})$. Примерами двухчастотных непараметрических эффектов являются индуцированное поглощение и дисперсия $(\omega_1 + \omega_2 = \omega_{ba})$ и рамановское взаимодействие $(\omega_1 - \omega_2 = \omega_{ba})$, приводящее к вынужденному комбинационному рассеянию (ВКР) и обращенному эффектир Рамана (индуцированному поглощению на антистоксовой частоте).

Генерация второй гармоники является вырожденным случаем трехчастотного параметрического взаимодействия ($\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0$). К четырехчастотным параметрическим эффектам относятся генерация третьей гармоники и когерентное антистоксово рассеяние света (КАРС), лежащее в основе активной спектроскопии. КАРС описывается резонансной частью кубической восприимчивости $\chi^{(3)}(\omega_4 = \omega_3 - \omega_2 + \omega_1)$ при $\omega_1 - \omega_2 = \omega_4 - \omega_3 \approx \omega_{ba}$. Примером параметрического одночастотного четырехволнового взаимодействия является эффект обращения волнового фронта за счет $\chi^{(3)}(\omega = \omega - \omega + \omega)$ при $k_2 = -k_1, k_4 = -k_3$.

Подробнее все эти эффекты будут рассмотрены ниже. Иногда одновременно проявляются несколько эффектов, например ВКР может сопровождаться самофокусировкой и КАРС, но часто подбор условий эксперимента позволяет выделить отдельный эффект. При анализе мы для простоты будем считать эти условия выполненными.

Удобно различать эффекты и по другим парным признакам: спонтанный — вынужденный, стационарный — нестационарный (гл. 5).

Следует отметить, что термины «спонтанный» и «вынужденный» определены в квантовой электронике нечетко. В линейной оптике

157

спонтанное и вынужденное излучения относят к нестационарному процессу с участием одной молекулы, а суммарное стационарное излучение нагретого вещества называют тепловым излучением. В то же время под спонтанным рассеянием понимают рассеяние на тепловых (или при $\hbar\Omega/\kappa T \gg 1$ — на квантовых) флуктуациях различных параметров вещества (§ 6.2) при малой интенсивности накачки I_1 , хотя объясняется этот процесс спонтанно-вынужденными двухфотонными переходами (§ 6.2). При увеличении I_1 интенсивность рассеянного света растет сперва линейно, а затем — при $|\alpha^{(2)}| l > 1$ — экспоненциально (для стоксовой компоненты). В результате эффективность преобразования частоты может достигать десятков процентов и термин ВКР обычно применяют к этому усиленному спонтанному излучению. Этот же термин используется иногда при эффекте усиления внешнего стоксова поля.

Еще большую многозначность имеет термин когерентный (даже если ограничиться только нелинейной оптикой). С одной стороны, им обозначают эффекты нестационарного резонансного взаимодействия типа СИП (§ 5.1), а с другой — параметрические стационарные эффекты типа генерации второй гармоники. В первом случае имеется в виду синфазность поля и вещества, а во втором — различных компонент поля.

Роль линейной и нелинейной дисперсий. Нелинейность волновых уравнений гидродинамики и газовой динамики проявляется наиболее ярко в виде ударных волн, в превращении синусоидальной акустической волны в пилообразную (наглядный образ — опрокидывание гребней морских волн на мелководье). На спектральном языке этот эффект объясняется генерацией высших гармоник, обогащением спектра исходного возмущения по мере его распространения.

Однако световые ударные волны не возникают из-за дисперсии показателя преломления $n(\omega)$: гармоники с частотами ω_1 , $2\omega_1$, ... распространяются с различными фазовыми скоростями $c/n(p\omega_1)$, так что знак энергии взаимодействия и соответственно амплитуды гармоник быстро осциллируют в пространстве (см. (5)). В результате амплитуды высших гармоник не нарастают по мере распространения («ненакапливающееся взаимодействие») и в теории возникает еще один малый параметр — отношение длины когерентности $l_{\kappa or} = \pi/\Delta k$ к длине вещества l. Здесь Δk — волновая расстройка (7), равная при коллинеарной генерации *p*-й гармоники k_p — $pk_1 = [n(p\omega_1) - n(\omega_1)] p\omega_1/c$.

Лишь в специальных условиях удается синхронизовать фазовые скорости двух-трех гармоник (с помощью двупреломления или аномальной дисперсии). Итак, условие фазового синхронизма (7) ограничивает число эффективно взаимодействующих спектральных компонент поля при параметрических взаимодействиях. Для непараметрических процессов эту ограничивающую роль играет условие резонанса (9), т. е. дисперсия $\chi^{(3)}$, $\chi^{(5)}$, ...

Для повышения эффективности нелинейных процессов обычно используется импульсная накачка лазерами с модуляцией добротности (т~10 нс) или с синхронизацией мод (т~10 пс). Ясно, что для накапливающегося в пространстве взаимодействия нескольких световых импульсов с различными центральными частотами необходимо также равенство их групповых скоростей

$$u_p = d\omega/dk_p = c \left(n_p + \omega_p \, dn_p/d\omega\right)^{-1}$$

(условие группового синхронизма), иначе импульсы будут разбегаться по мере распространения.

Одномерное приближение. Далее мы, как правило, будем использовать наиболее полезное приближение нелинейной (как, впрочем, и линейной) оптики — одномерное (или, иначе, приближение плоских волн), которое позволяет перейти от уравнений в частных производных (2) к обыкновенным уравнениям. Оно правильно отражает основные закономерности многих явлений в случае слабо сходящейся или расходящейся накачки и образцов с достаточно малой длиной *l*. Часто расходимость удается учесть — хотя бы качественно — в конечных формулах путем суммирования вклада всех существенных плоских волн. Мы откажемся от одномерного приближения лишь при описании самофокусировки в конце § 6.4.

Произвольное поле можно представить в виде четырехмерного интеграла Фурье:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = (L/2\pi)^3 \int d^3k \, d\omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp\left[i\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \quad (6.3.10)$$

и аналогично для **H**. Множитель $(L/2\pi)^3$ добавлен из соображений размерности (см. (7.3.7)). Это так называемое **k**, ω -*представление*. Здесь **k** и ω — независимые вещественные переменные. В случае однородной прозрачной линейной среды без внутренних источников **k** и ω перестают быть независимыми (§ 4.2). При этом

$$E(\mathbf{k}, \omega) = (1/2) \sum_{\nu=1, 2} \sum_{s=\pm} e_{\nu}(\mathbf{k}) E_{\nu}^{(s)}(s\mathbf{k}) \,\delta(\omega - s\omega_{\nu}(\mathbf{k})), \quad (6.3.11)$$
$$E_{\nu}^{(+)}(\mathbf{k}) = E_{\nu}^{(-)}(\mathbf{k})^{*}. \quad (6.3.12)$$

Полагаем среду негиротропной, поэтому є и e_{ν} действительны. Подставив (11) в (10), находим

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3 \boldsymbol{k} \sum_{\mathbf{v}s} \boldsymbol{e}_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{k}) E_{\mathbf{v}}^{(s)}(\boldsymbol{k}) \exp\left[i\psi_s(\boldsymbol{k})\right], \quad (6.3.13)$$

$$\psi_s(\mathbf{k}) \equiv s[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_v(\mathbf{k}) t], \quad s = \pm, \quad v = 1, 2.$$

Например, в случае плоской монохроматической поляризованной волны

$$E_{v}^{(s)}(\boldsymbol{k}) = (E_{1}\delta_{s+} + E_{1}^{*}\delta_{s-}) \,\delta_{v\mu}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{1}).$$

Единичные векторы поляризации $e_v(k)$ и закон дисперсии $\omega_v(k)$ определяются тензором $\varepsilon(\omega)$:

$$c^{2}\boldsymbol{k} \times [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\nu}] + \omega_{\nu}^{2} \boldsymbol{\epsilon} (\omega_{\nu}) \cdot \boldsymbol{e}_{\nu} = 0. \qquad (6.3.14)$$

Отсюда в случае вещественного є

$$\omega_{v}(-k) = \omega_{v}(k), \quad e_{v}(k) = e_{v}(-k) = e_{v}^{*}(k).$$

159

Задание волнового вектора k и типа поляризации v определяет плоскую монохроматическую волну или *моду*. Удобно множество мод сделать счетным с помощью куба периодичности L^3 (§ 7.3), при этом интеграл Фурье переходит в ряд, в котором мода задается одним индексом $k \equiv \{k, v, s\}$ (он включает в себя также индекс знака частоты s):

$$E(\mathbf{r}, t) = (1/2) \sum_{k} e_{k} E_{k} \exp(i\psi_{k}), \quad E_{k} = E_{v}^{(s)}(\mathbf{k}). \quad (6.3.15)$$

Амплитуды мод E_k в прозрачной линейной среде без источников являются независимыми комплексными числами, определяемыми граничными условиями.

Пусть теперь в среде имеется нелинейный поглощающий плоский слой (0 < z < l) с той же вещественной частью ε' , на который падает слева и справа стационарное поле. При этом числа E_k становятся функциями от z (ввиду однородности модели по x, y, t), которые называют медленно меняющимися амплитудами (ММА). Фактически переход от реального поля E(r, t) к зависящим от z амплитудам мод $E_k(z)$ является трехмерным преобразованием Фурье по переменным x, y, t (т. е. в отличие от (10) неполным преобразованием) или переходом к $\omega, \mathbf{k}_{\perp}, z$ -представлению.

Заметим, что для определения моды вместо **k** можно задать частоту $\omega = \omega_v(\mathbf{k})$, \mathbf{k}_{\perp} и знак σ_k продольной компоненты k_z , при этом k_z определяется законом дисперсии (для изотропной среды $k_z = \sigma_k (\varepsilon' \omega^2 / c^2 - k_{\perp}^2)^{1/2})$. Экспериментально разложение по модам осуществляется помещением спектроскопа в дальнюю зону излучателя, при этом задаются ω и сферические углы ϑ_k , φ_k вектора **k** (с поправкой на преломление). Таким образом, индекс *k* заменяет одну из следующих совокупностей величин:

$$k \coloneqq \{\boldsymbol{k}, v, s\} = \{\omega, \boldsymbol{k}_{\perp}, \sigma, v, s\} = \{\omega, \vartheta, \varphi, v, s\}. \quad (6.3.16)$$

Как будет показано ниже, фурье-преобразование уравнений Гельмгольца (2) по x, y в случае достаточно малых нелинейности и поглощения приводит к следующей системе обыкновенных уравнений для MMA (при $\sigma_k > 0$):

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{\alpha_k}{2}\right) E_k(z) = \frac{2\pi i \omega_k}{c \overline{n_k}} P_k^{NL}(z) \exp\left(-ik_z z\right). \tag{6.3.17}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha_k \equiv \omega_k \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'' \cdot \boldsymbol{e}_k / c \overline{n}_k, \quad \overline{n}_k \equiv n_k \cos \theta_k \cos \rho_k \approx c k_z / \omega_k, \quad (6.3.18)$$

где θ_k — угол между лучевым вектором моды s_k и осью z, ρ_k — угол анизотропии, т. е. угол между k и лучевым вектором (вектором Пойнтинга), P_k^{NL} — фурье-компонента нелинейной поляризации с частотой $\omega_k > 0$ и поперечным волновым вектором $k_\perp \equiv \{k_x, k_y\}$, парал-

лельная вектору e_k :

$$P_{k}^{NL} = (4\pi | u_{kz} | /L) P^{NL}(\omega_{k}, q, z) =$$

= $(2 | u_{kz} | /L^{3}) \int dx \, dy \, dt \, e_{k} \cdot P^{NL}(r, t) \exp \left[i (\omega_{k}t - k_{x}x - k_{y}y) \right], \quad (6.3.19)$
 $q = \{k_{x}, k_{y}\}, \quad r = \{x, y, z\}, \quad u_{kz} = \partial \omega_{y}(k) / \partial k_{z}. \quad (6.3.20)$

Согласно (17) линейное поглощение дает экспоненциальную зависимость амплитуды моды от z, а нелинейность приводит к взаимной связи (перемешиванию) мод. Подчеркнем, что мода k в одномерной модели возбуждается лишь компонентой источника с теми же частотой и поперечным волновым вектором. При этом зависимость от z может быть любой, но сильнее всего действует компонента источника с постоянной распространения K_z , близкой к k_z — условие синхронизма или согласования фазовых скоростей (ср. (4.1.20)).

Граничными условиями для системы (17) являются амплитуды $E_k(z_0)$ падающих слева и справа плоских волн: $z_0=0$ для $\sigma=+$ и $z_0=l$ для $\sigma=-$. Решение (17) дает закон преобразования мод нелинейным слоем, т. е. *матрицу рассеяния* слоя. Конечно, для описания реальных экспериментов надо добавить отражение и преломление волн на границе (с учетом нелинейности — см. [34]), а также учесть ограниченность сечения взаимодействия по x, y. При этом уже в линейном приближении появляется «дифракционная» связь между близкими по направлению модами. Этот эффект удобнее описывать в ω , r-представлении (2) (см. в § 6.4 раздел, посвященный самофокусировке).

Найдем с помощью (17) скорость изменения продольной компоненты потока энергии, переносимой модой k и выраженной в единицах $\hbar\omega_k$:

$$F_{kz} \equiv I_k \cos \theta_k / \hbar \omega_k = c \left[E_k \times H_k^* \right] \cdot \hat{z} / 16\pi \hbar \omega_k + \kappa. c. = = c \bar{n}_k |E_k(z)|^2 / 8\pi \hbar \omega_k, \qquad (6.3.21)$$

где \hat{z} — единичный вектор вдоль оси *z*. Для этого умножим (17) на E_k^* и сложим с комплексно сопряженным выражением:

$$(d/dz + \alpha_k) F_{kz} = - \operatorname{Im} P_k^{NL} E_k^* \exp(-ik_z z)/2\hbar.$$
(6.3.22)

Правая часть здесь имеет согласно (5) простой смысл — это энергия в единицах $\hbar\omega_k$, поглощаемая в единицу времени единицей объема вещества за счет нелинейной поляризации, т. е. это скорость уменьшения плотности фотонов — \dot{N}_k в моде k. Иначе говоря, (22) является уравнением переноса (или уравнением непрерывности) для фотонов макрополя:

$$\nabla \boldsymbol{F}_{k} + \dot{N}_{k} = 0, \quad \boldsymbol{F}_{k} = \boldsymbol{u}_{k} N_{k}. \tag{6.3.23}$$

Нелинейная поляризация P_k^{NL} в правой части (17) или (22) определена формулами (3) и (19) с помощью иерархии восприимчивостей $\chi^{(m)}$, $m \gg 2$. В случае *m*-частотного взаимодействия уравнение (17) 6 д. н. Клышко 161

принимает вид

 $(d/dz + \alpha_k/2) E_1^* = (2\pi s_1 \omega_1/icn_1) \chi^{(m-1)} : e_1 E_2 \dots E_m \exp(i\Delta kz), \quad (6.3.24)$ rge

$$\Delta k = \sum_{i=1}^{m} s_i k_{iz}, \quad E_i = e_{\nu_i} E_{\nu_i}^{(s_i)}(k_i), \quad (6.3.25)$$

причем интегрирование по x, y, t в (19) дает следующие ограничения на взаимодействующие моды и знаковые индексы:

$$\Delta \boldsymbol{k}_{\perp} = \sum_{i=1}^{m} s_i \boldsymbol{k}_{i\perp} = 0, \qquad (6.3.26)$$

$$\Delta \omega \equiv \sum_{i=1}^{m} s_i \omega_i = 0.$$
 (6.3.27)

Кроме того, накапливание взаимодействия вдоль *г* происходит лишь при достаточно малых продольных волновых расстройках:

$$\Delta k \equiv \sum_{i=1}^{m} s_i k_{iz} \leqslant 1/l.$$
(6.3.28)

Перенормируем амплитуды мод так, чтобы их квадраты равнялись продольной плотности потока фотонов (полагаем для простоты обозначений $F_i = F_{k,z} > 0$):

$$a_i \equiv (c \bar{n}_i / 8 \pi \hbar \omega_i)^{1/2} E_i,$$
 (6.3.29)

$$|a_i|^2 = F_i. (6.3.30)$$

В результате (22) и (24) принимают вид

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{\alpha_1}{2}\right)a_1^*=\frac{s_1}{2i}\beta_1\ldots_m a_2\ldots a_m \exp\left(i\Delta kz\right),\qquad(6.3.31)$$

$$\left(\frac{d}{dz}+\alpha_{1}\right)F_{1}=s_{1}\operatorname{Im}\beta_{1\ldots m}a_{1}\ldots a_{m}\exp\left(i\Delta kz\right),$$
 (6.3.32)

где

$$\beta_{1 \dots m} \equiv \frac{1}{2\hbar i} \left(\frac{8\pi\hbar}{c} \right)^{m/2} \left(\frac{\omega_{1} \dots \omega_{m}}{\overline{n_{1}} \dots \overline{n_{m}}} \right)^{1/2} \chi^{(m-1)} : e_{1} \dots e_{m}.$$
(6.3.33)

Анализ этих уравнений для ряда характерных случаев будет проведен в § 6.4, 6.5.

Соотношение Мэнли — Роу и перестановочная симметрия. Пусть существенно какое-либо одно взаимодействие между *m*-частотными компонентами поля с индексами n_1, \ldots, n_m (см. (5)), которому соответствует *l*-фотонный процесс (l=m при параметрическом взаимодействии и l=m/2 при непараметрическом). Пусть это взаимодействие — нерезонансное для какой-либо пары частот ω_1, ω_2 , точнее пусть фотоны с этими частотами рождаются или уничтожаются только вместе, одновременно (соответствующий виртуальный уровень далек от реального);

тогда

$$s_1 \dot{N}_1 = s_2 \dot{N}_2,$$
 (6.3.34)

где

$$s_n \equiv \operatorname{sign}(n) \equiv \operatorname{sign}(\omega_n).$$
 (6.3.35)

Эти связи аналогичны известным в теории колебаний соотношениям Мэнли — Роу для нелинейных цепей [1]. Знаки частот определяются законом сохранения энергии (4) или (9), \dot{N}_n — скорость изменения плотности фотонов с частотой $|\omega_n|$. Очевидно, что $\hbar |\omega_n| \dot{N}_n + \mathcal{P}_n = 0$, где $\mathcal{P}_n = \omega_n \operatorname{Im} E_n^* P_n / 2$ — поглощаемая веществом мощность на частоте ω_n .

Из (5) и (34) в случае параметрического взаимодействия следует

Im
$$(\chi^{12} \dots : E_1 E_2 \dots - \chi^{21} \dots : E_2 E_1 \dots) = 0,$$
 (6.3.36)

где

$$\boldsymbol{\chi}^{12\cdots} \equiv \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\omega}_1; \ \boldsymbol{\omega}_2, \ldots) = (\boldsymbol{\chi}^{\overline{12}\cdots})^*. \tag{6.3.37}$$

Подставим (6) в (36):

 $\sum_{\alpha\beta\cdots} |E_{1\alpha}E_{2\beta}\cdots |\operatorname{Im}\{(\chi_{\alpha\beta\cdots}^{12\cdots}-\chi_{\beta\alpha\cdots}^{21\cdots})\exp\left[i\left(\varphi_{1\alpha}+\varphi_{2\beta}+\cdots\right)\right]\}=0. (6.3.38)$

Здесь все амплитуды и фазы проекций гармоник поля можно изменять независимо, поэтому выражение в круглых скобках равно нулю:

$$\chi^{12}_{\alpha\beta...} = \chi^{21}_{\beta\alpha...} . \tag{6.3.39}$$

Это перестановочное соотношение имеет более общий характер, чем (6.1.20), где предполагалась прозрачность вещества на всех частотах.

В случае непараметрического взаимодействия фазы выпадают и из (8) и (34) получаем

$$\operatorname{Im}\left(\chi^{\bar{1}1\bar{2}2\cdots}_{\alpha\beta\cdots} : E_{1}^{*}E_{1}E_{2}^{*}E_{2}\cdots - \chi^{\bar{2}2\bar{1}1\cdots}_{2} : E_{2}^{*}E_{2}E_{1}^{*}E_{1}\cdots\right) = 0, \quad (6.3.40)$$

$$\sum_{\alpha\beta\cdots} |E_{1\alpha}E_{1\beta}E_{2\gamma}E_{2\delta}\cdots|\operatorname{Im}\left(\chi^{\bar{1}1\bar{2}2\cdots}_{\alpha\beta\gamma\delta\cdots} - \chi^{\bar{2}2\bar{1}1\cdots}_{\gamma\delta\alpha\beta\cdots}\right) = 0. \quad (6.3.41)$$

Отсюда получаем инвариантность к «блочным» перестановкам:

$$\chi^{\bar{1}1\bar{2}2...}_{\alpha\beta\gamma\delta...} = \chi^{\bar{2}2\bar{1}1...}_{\gamma\delta\alpha\beta...}$$
(6.3.42)

С симметрией этого типа мы уже встречались при рассмотрении рамановских и вообще двухфотонных переходов (§ 6.2). Полагая в (42) $\omega_1 \equiv \omega_\ell > 0$, $\omega_2 \equiv -\omega_S < 0$, получаем при учете (6.1.15)

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\overline{L}LS\overline{S}}(\omega_{L}=\omega_{L}+\omega_{S}-\omega_{S})=\chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{\overline{S}SL\overline{L}}(\omega_{S}=\omega_{S}+\omega_{L}-\omega_{L})^{*}. (6.3.43)$$

Строго говоря, из (41) следует симметрия лишь для мнимых частей восприимчивостей, однако с помощью соотношений типа Крамерса — Кронига (4.1.8) можно показать, что симметрии мнимых и вещественных частей $\chi^{(m)}$ совпадают. Связь (42) следует также из (39), если рассмотреть резонансный параметрический процесс с частотами $\omega_3 = -\omega_1$, $\omega_4 = -\omega_2$:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta...}^{12\overline{1}\overline{2}...} = \chi_{\beta\alpha\gamma\delta...}^{21\overline{1}\overline{2}...}$$
(6.3.44)

Беря комплексно сопряженное выражение и используя частную симметрию (6.1.14) и (6.1.15), снова получаем (42).

Перестановочная симметрия восприимчивостей, или соотношения Мэнли — Роу, приводят к существованию ряда простых интегралов уравнений для ММА. Например, в случае нерезонансного взаимодействия коэффициенты связи β (33) инвариантны ко всем перестановкам индексов, поэтому правые части уравнений (32) для интенсивностей отличаются лишь знаками. Отсюда при $\alpha_k = 0$ следует

$$s_1 dF_1/dz = s_2 dF_2/dz = \dots s_m dF_m/dz = \operatorname{Im}(\beta_1 \dots a_1 \dots a_m e^{i\Delta kz}), \quad (6.3.45)$$

где знаковые множители $s_i = \pm 1$ в случае $k_{iz} > 0$ определяются условием сохранения энергии в соответствующем элементарном процессе. Отсюда находим m-1 интегралов движения систем (31), (32), которые позволяют выразить интенсивности в m-1 модах через интенсивность одной моды:

$$F_k(z) = s_1 s_k F_1(z) + C_k, \quad C_1 = 0,$$
 (6.3.46)

постоянные C_h определяются через граничные значения $F_h(0)$.

Если все существенные частоты, включая комбинационные, лежат в окнах прозрачности (т. е. параметрические процессы нерезонансны), то диссипация энергии поля отсутствует и должен быть еще один интеграл, выражающий закон сохранения общего потока световой энергии. Однако легко убедиться, что общий поток энергии выражается через константы C_k . Для этого умножим связи (46) на $\hbar \omega_k$ и сложим их вместе:

$$I_{z}(z) = \sum_{k=1}^{m} \hbar \omega_{k} F_{k}(z) = \sum_{k=1}^{m} \hbar \omega_{k} C_{k}.$$
 (6.3.47)

При параметрическом взаимодействии имеется все же еще один интеграл, определяющий разность фаз

$$\varphi(z) \equiv \sum_{k=1}^{m} s_k \varphi_k(z) \qquad (6.3.48)$$

комплєксных амплитуд $a_k \equiv \sqrt{F_k} \exp(is_k \varphi_k)$ через $F_k(z)$ и $\varphi(0)$:

$$s_n F_n \Delta k + 2\beta (F_1 \dots F_m)^{1/2} \cos [\varphi(z) + \Delta kz] = C.$$
 (6.3.49)

Здесь n — любой из индексов 1, ..., m. Дифференцируя левую часть (49) (при учете (31), (45) и $\beta = \beta^*$), можно убедиться в ее независимости от z.

[°]Вывод одномерных уравнений. Чтобы вывести уравнения (17) для ММА в ω, *q*, *z*-представлении, выразим частотные компоненты 164

псля $\boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r})$ или

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}) = (1/2) \left[\boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r}) \,\delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_n) + \boldsymbol{E}_n^*(\boldsymbol{r}) \,\delta(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_n) \right],$$

фигурирующие в уравнениях Гельмгольца (2), через амплитуды мод $E_k(z) = 4\pi |u_{kz}| E(\omega, q, z)/L$, определенные в (15). Пусть $\omega > 0$ и тип поляризации фиксирован, тогда

$$2E(\omega, \mathbf{r}) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} \int d^3k \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 E_k(z) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t) =$$

= $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k E_k(z) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) =$
= $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^2q \sum_{\pm} |u_{kz}|^{-1} E_k(z) \exp[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{\rho} \pm ik_z(\omega, \mathbf{q})z], (6.3.50)$

где $q \equiv \{k_x, k_y\}, \rho \equiv \{x, y\}, u_{kz} \equiv \partial \omega(\mathbf{k}) / \partial k_z$. Здесь функция $k_z(\omega, q) \equiv k_z > 0$ определена неявно с помощью закона дисперсии: $\omega(q, k_z) = \omega$ и использовано свойство δ -функции:

$$\delta[f(x)] = \sum_{i} a_i \delta(x - x_i), \quad f(x_i) \equiv 0, \quad a_i \equiv |df/dx|_{x = x_i}^{-1}. \quad (6.3.51)$$

Будем далее считать, что эффективно возбуждается лишь мода с определенным знаком k_z , тогда

$$E(\omega, \mathbf{r}) = \frac{L^3}{16\pi^3} \int d^2q |u_{kz}|^{-1} E_k(z) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \qquad (6.3.52)$$
$$\mathbf{k} \equiv \{q_x, q_y, k_z(\omega, \mathbf{q})\}.$$

При подстановке (52) в (2) учтем, что обычно поглощение и нелинейность малы. При этом $E_k(z)$ мало изменяются на расстояниях порядка длины волны и можно пренебречь вторыми производными (приближение MMA подробнее см. [33]):

$$|d^{2}E_{k}| dz^{2}| \ll |k_{z} dE_{k}/dz|.$$
(6.3.53)

В результате

$$\nabla \times \nabla \times eE(z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left\{ -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times e) + i\mathbf{k} \times (\nabla \times e) + i\nabla \times (\mathbf{k} \times e) \right\} E(z), \quad (6.3.54)$$

индекс *k* пока опускаем. Первое слагаемое здесь в дальнейшем сократится ввиду (14). Умножим (2) и (54) скалярно на *е* и воспользуемся векторным тождеством

$$\boldsymbol{e} \cdot \{\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{e}) + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e})\} = 2\{\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k})\} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \qquad (6.3.55)$$

тогда (2) примет вид

$$(iL^{3}/16\pi^{3})\int d^{2}q | u_{\boldsymbol{k}_{2}}|^{-1} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \times \{2c^{2} [\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k})]\cdot\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{k}}^{2}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}''\cdot\boldsymbol{e}\} E_{\boldsymbol{k}}(z) = 4\pi\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{k}}^{2}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{P}^{NL}(\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{r}).$$
(6.3.56)

Здесь вектор $e \times (e \times k) \sim E_k \times H_k$ параллелен лучевому вектору s_k , т. е. направлению потока энергии при $\varepsilon'' = P^{NL} = 0$, а вектор $\nabla = \hat{z} d/dz$. Обозначим через θ угол между s_k и \hat{z} и через ρ —обычно малый угол между **s**_k и **k**, тогда

 $[e \times (e \times \mathbf{k})] \cdot \hat{\mathbf{z}} = -k \cos \theta \cos \rho \equiv -\overline{n} \omega_k / c \approx -k_z. \quad (6.3.57)$ Чтобы получить (17), осталось подействовать на (56) оператором $\int d^2 \rho \exp(-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{\rho}).$

§ 6.4. Непараметрические взаимодействия

Непараметрические (или некогерентные) эффекты нелинейной оптики, т. е. эффекты типа многофотонного поглощения, описываются восприимчивостями нечетного порядка вида $\chi^{(2m-1)}(\omega_1 = \omega_1 - \dots - \omega_m + \omega_m)$. При этом скорость изменения амплитуды моды k_1 пропорциональна локальной амплитуде этой же моды $E_1(z)$, множитель синхронизма exp ($i\Delta kz$) не возникает и одномерные уравнения для MMA (6.3.17) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{2\pi i \omega_1 \chi_1}{c \overline{n_1}} |E_2|^2 \dots |E_m|^2\right) E_1 = 0, \qquad (6.4.1)$$

$$\chi_1 \equiv \chi^{(2m-1)} \left(\omega_1 = \omega_1 - \ldots - \omega_m + \omega_m \right) : e_1^* e_1 \ldots e_m^* e_m. \quad (6.4.2)$$

Таким образом, вещественная часть χ_1 определяет локальное изменение постоянной распространения (т. е. длины волны или фазовой скорости) моды k_1 , пропорциональное локальным интенсивностям других мод (эффект индуцированной дисперсии), а мнимая часть χ_1 определяет дополнительное поглощение или усиление за счет энергии других мод (эффект нелинейного или индуцированного поглощения).

Умножая (1) на E_1^* или используя сразу (6.3.32), находим систему уравнений для интенсивностей ($F_t = F_{1z}$):

$$\left[\frac{d}{dz} + \alpha_1 + \alpha_1^{(m)}(z)\right] F_1(z) = 0, \qquad (6.4.3)$$

где

$$\alpha_1^{(m)} \equiv \beta_1^{(m)} F_2 \dots F_m, \quad \beta_1^{(m)} \equiv \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{8\pi\hbar}{c}\right)^m \frac{\omega_1 \dots \omega_m}{\overline{n_1} \dots \overline{n_m}} \chi_1^n$$

Напомним, что знаки F_i и \overline{n}_i совпадают и определяются знаком проекции k_i на ось z, поэтому F_1 может нарастать по мере распространения, лишь если $\chi_1^{''} < 0$.

Ниже будут рассмотрены основные типы непараметрических эффектов — нелинейное поглощение (включая эффект насыщения), рамановское усиление и поглощение, спонтанное и вынужденное рассеяния, самофокусировка и самомодуляция, а также их значение в прикладной оптике и спектроскопии.

Нелинейное поглощение. Рассмотрим случай одной моды. Наличие у кубической восприимчивости мнимой части

$$\chi^{(3)''} \equiv \operatorname{Im} \chi^{(3)} \left(\omega = \omega - \omega + \omega \right) : e^* e e^* e$$

приводит к нарушению экспоненциального закона Бугера для изменения интенсивности поля в веществе. Этот эффект может быть связан с двухфотонным поглощением (см. (6.2.114)), при этом $\chi^{(3)''} > 0$,

и с эффектом насыщения однофотонного резонанса, когда согласно (4.3.19)

$$\chi^{(3)''} = -\chi^{(1)''} d_{ab}^2 T_1 T_2 / \hbar^2 \left[1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2 \right].$$

Пусть на прозрачную (в линейном приближении) среду перпендикулярно границе падает плоская монохроматическая волна, тогда согласно (3)

$$dF/dz + \beta F^2 = 0, \quad \beta \equiv 32\pi^2 \hbar \omega^2 \chi^{(3)''}/c^2 n^2 > 0.$$
 (6.4.4)

Решение этого уравнения находится элементарно:

$$F(z) = F(0)/[1 + \beta z F(0)] \rightarrow 1/\beta z.$$
 (6.4.5)

Последнее равенство имеет место при $F(0) \gg 1/\beta z$, оно описывает эффект ограничения (рис. 6.6), при котором интенсивность F(z) прошедшего через слой вещества z света не зависит от интенсивности падающего света F(0).

Если F(0) испытывает флуктуации (в частности, из-за фотонной структуры поля), то двухфотонное поглощение будет их заглаживать,

т. е. на «выходе» из слоя фотоны будут распределены во времени и пространстве более равномерно, чем на «входе» (эффект антигруппировки фотонов см. § 7.6).

Для двухфотонных межзонных переходов в полупроводниках типа CdS $\chi^{(3)''} \approx 10^{-13} \text{ см}^3/\text{эрг при} \lambda_0 \sim 0.7 \text{ мкм}$ и $n \sim 2$. При этом $\beta/\hbar \omega \approx 1 \text{ см}/\Gamma \text{Вт}$, т. е. уровень ограничения при l=1 см для $I = \hbar \omega F$ имеет порядок 1 ГВт/см². Заметим, что при таких интенсивностях может измениться структура вещества, произойти фазовый переход, испарение, образоваться плазма. Такой оптический пробой в прозрачных газах или конденсированных веществах может начинаться с многофотонного поглощения и ионизации.

Для ионизации атома инертного

Рис. 6.6. Изменение интенсивности света с расстоянием и эффект ограничения при двухфотонном поглощении: \tilde{F} — плотность потока фотонов, умноженная на βl , где β — коэффициент двухфотонного поглощения и l — толщина слоя вещества

газа необходимо поглощение порядка 10 фотонов неодимового лазера (ħω~1 эВ). Число таких переходов на единицы объема и времени согласно (3) равно

$$\dot{N} = dF/dz = (8\pi/c)^{10} \chi^{(10)''} I^{10}/2\hbar \sim (E_1/E_{NL})^{20}, \qquad (6.4.6)$$

где $E_{NL} \sim \hbar \omega_0 / d_0$. Несмотря на малссть этой величины, эффект удается наблюдать при фокусировке излучения лазеров с модуляцией добротности [40]. Заметим, что высокая степень поля в (6) подчеркивает влияние флуктуаций его интенсивности. Так, согласно (7.2.11) излучение с гауссовой статистикой в $\langle I^{10} \rangle / \langle I \rangle^{10} = 10! \sim 3 \cdot 10^6$ раз эффективнее нефлуктуирующего излучения при равных $\langle I \rangle$.

Как показал Келдыш (см. [20], § 29), при очень больших полях E_i (или малых частотах ω , когда нарушается условие $d_0E_1 < \hbar\omega$) резкая степенная зависимость (6) от E_1 замедляется за счет множителя $\exp(-\hbar\omega_0/d_0E_1)$, характерного для эффекта *туннельной ионизации* в постоянном поле.

Нарушение степенной зависимости вида (6) наблюдается также при диссоциации многоатомных молекул в поле ИК-лазеров при однофотонном резонансе $\omega \sim \Omega_v$ с одной из колебательных частот молекулы. В случае СО₂-лазера ($\lambda \sim 10$ мкм, $\hbar \omega \sim 0.1$ эВ) для диссоциации необходимо несколько десятков фотонов. Однако в экспериментах с короткими импульсами, когда не успевает проявиться столкновительная релаксация, наблюдается слабая зависимость от E_1 . Этот эффект связан, по-видимому, с быстрой передачей поглощаемой энергии большому числу других типов колебаний («внутримолекулярная релаксация»). Эффекты такого типа изучаются новым направлением квантовой электроники — ИК-фотохимией, они используются для лазерного разделения изотопов.

В фотохромных веществах [44] эффект ограничения (или затемнения) наблюдается при много меньших интенсивностях — даже в солнечном свете, где $I \sim 0.1$ Вт/см² — за счет сильного, но инерционного «фотохимического» ангармонизма.

Наиболее низким порогом нелинейности обладает фотографический процесс, где для фотохимической реакции (т. е. возникновения центров почернения — крупинок металлического серебра в микрокристалле AgBr) достаточно иногда плотности энергии («экспозиции») $lt \sim 10^{-8} \text{ Дж/см}^2$. Примечательно, что для образования одного центра необходимо несколько фотонов (m>1), т. е. это процесс с высокой степенью нелинейности. При малых экспозициях степень почернения негатива D после проявления пропорциональна числу центров, поэтому $D=\eta I^m$, где η — чувствительность пленки (мы пренебрегаем статистическим разбросом m). Относительное уменьшение интенсивности зондирующего света при проходе через негатив с малой толщиной l равно

$$\Delta I/I = -D = -\alpha^{(m+1)}l, \qquad (6.4.7)$$

где $\alpha^{(m+1)} \equiv \eta I^m/l$.

Различные виды фотохимической нелинейности используют в голографии и, вообще, для записи информации. Более «быстрые» оптические нелинейности служат основой динамической голографии и эффекта обращения волнового фронта (§ 6.5), где запись и восстановление происходят одновременно.

Итак, даже прозрачное в обычном смысле вещество при достаточно большой интенсивности света становится поглощающим или отражающим. Изучение таких явлений имеет очень большое прикладное значение в связи с проблемой лазерной термоядерной реакции.

Насыщение однофотонного резонанса (§ 4.3), наоборот, приводит к эффекту просветления (в отсутствие инверсии населенностей). При этом флуктуации интенсивности подчеркиваются, что используется для синхронизации мод в пикосекундных лазерах. Согласно двухуровневой модели коэффициент поглощения $\alpha(F)$ (или при $\alpha < 0$ — усиления)

при большой интенсивности F имеет вид $\alpha_0/(1+F/F_{\rm H})$, где параметр $F_{\rm H}$ определяется временами релаксации T_1 , T_2 и моментом перехода d_{ab} (4.3.16). Отсюда вместо (4) находим нелинейное уравнение переноса для плоской волны при насыщении (т. е.

при однофотонном резонансе)

$$\frac{dF}{dz} + \frac{\alpha_0 F}{1 + F/F_{\rm H}} = 0. \qquad (6.4.8)$$

Заметим, что здесь в отличие от (4) учитывается вклад бесконечного числа восприимчивостей нечетного порядка. Решение (8) легко находится в неявном виде:

$$-\alpha_0 z = \ln (F/F_0) + (F - F_0)/F_{\rm H}, \qquad (6.4.9)$$

где $F \equiv F(z)$, $F_0 \equiv F(0)$. Два слагаемых в правой части (9) соответствуют экспоненциальной и линейной связи F и z(рис. 6.7). При сильном насыщении экспоненциальный закон Бугера переходит в линейный:

$$F \approx \left(1 - \frac{\alpha_0 z}{1 + F_0 / F_{\mathrm{H}}}\right) F_0, \quad (6.4.10)$$

и в пределе при $F_0 \gg F_H$ вещество полностью просветляется (ср. с описанным в § 5.1 нестационарным эффектом СИП).

Бездоплеровская спектроскопия. Эффекты индуцированного поглощения при двухфотонном переходе и индуцированного просветления при насыщении однофотонного перехода лежат в основе двух



Рис. 6.7. Зависимость интенсивности волны F от расстояния z в усиливающей или поглощающей среде при учете эффекта насыщения. При сильном насыщения экспоненциальный закон изменения F сменяется на линейный (штриховая линия): α_0 — коэффициент усиления слабого сигнала, $F_{\rm H}$ — интенсивность сигнала, уменьшающего α_0 вдвое

оригинальных спектроскопических методов, позволяющих преодолеть влияние доплеровского уширения резонансов, которое маскирует тонкие детали спектров.

Схема двухфотонного бездоплеровского спектроскопа представлена на рис. 6.8. Исследуемый газ помещается в поле стоячей волны с частотой ω , перестраиваемой в области половинной частоты перехода $\omega_0/2$. Линейный эффект Доплера в случае бегущей волны дает сдвиг частоты $\omega' - \omega = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, где ω — частота поля в лабораторной системе координат, ω' — то же в системе молекулы, движущейся со скоростью \mathbf{v} , \mathbf{k} — волновой вектор поля. В стоячей волне половина фотонов имеют волновой вектор \mathbf{k} и половина — \mathbf{k} , поэтому доплеровские сдвиги для них различаются знаками. В результате, если при двухфотонном переходе один фотон поглощается из «прямой» волны, а второй — из «встречной», сдвиги полностью компенсируются, так что наблюдаемый резонанс будет иметь на широком доплеровском пьедестале острый пик с естественной или столкновительной шириной. Заметим, что резонанс удобнее регистрировать косвенно — по однофотонной люминесценции, сопровождающей переход молекулы с возбужденного уровня на третий уровень. Недостатком двухфотонной спектроскопии является необходимость использования сильного поля (из-за малой вероятности переходов), что приводит к заметному сдвигу резонанса из-за оптического эффекта Штарка (см. (5.2.32)).



Рис. 6.8. Бездоплеровская двухфотонная спектроскопия: а) используемые уровни (ω — частота перестраиваемого лазера, ω' — частота наблюдаемой люминесценции); б) схема спектроскопа; в) принцип компенсации доплеровского сдвига; г) зависимость сигнала от частоты лазера

Метод бездоплеровской спектроскопии насыщения [38] также использует встречные волны с одной частотой (рис. 6.9). Прямая волна имеет большую интенсивность и вызывает сильное насыщение тех молекул, которые имеют подходящую проекцию скорости на направление распространения волны $v_z = (\omega - \omega_0)/k$. Встречная зондирующая



Рис. 6.9. Бездоплеровская спектроскопия насыщения: *a*) схема спектроскопа насыщения; *б*) зависимость наблюдаемого сигнала от частоты лазера

волна при $\omega \neq \omega_0$ взаимодействует с другой группой молекул — имеющих обратный знак v_z — и поэтому сильно поглощается. Однако при $\omega = \omega_0$ имеем $v_z = 0$, и резонанс для зондирующей волны просветляется за счет эффекта насыщения от прямой волны. Следовательно, показания детектора, регистрирующего мощность зондирующей волны, прошедшей через образец, возрастают при $\omega \approx \omega_0$. Ширина резонанса будет определяться естественным, столкновительным или полевым (см. (4.3.21)) уширением.

170

Подробнее о нелинейной спектроскопии см. [38, 39, 45, 64, 69, 70]. Упомянем другие методы бездоплеровской спектроскопии — метод квантовых биений (§ 5.2), метод молекулярных пучков, метод буферного газа. В последнем методе свободный пробег исследуемых молекул ограничивается до величины, много меньшей длины волны, добавлением инертного газа. При этом в центре широкой доплеровской линии появляется узкий пик с однородной шириной.

Рамановское усиление. Рассмотрим далее непараметрическое взаимодействие двух разночастотных мод. Наиболее интересен здесь эффект рамановского усиления, тесно связанный с неупругим рассеянием света. При макроскопическом описании рассеяние объясняется резонансом кубической восприимчивости $\chi^{(3)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_1)$ при $\omega_1 - \omega_2 =$ ≡Ω~Ω₀>0. Здесь комбинационная частота Ω близка к частоте Ω₀≡ ≡ω_{ва} какого-либо возбуждения вещества. Обычно Ω₀— одна из собственных частот молекулярных колебаний (в обратных сантиметрах $\Omega_0 \sim 10^2 - 10^3$) или частота акустической волны ($\Omega_0 \sim 0 - 0, 1 \text{ см}^{-1}$). В первом случае рассеяние называют комбинационным (или рамановским), во втором — мандельштам-бриллюэновским. В пьезокристаллах наблюдается также рассеяние на поляритонах, Ω₀≤10³ см⁻¹ (§ 4.2, 6.5). При этом, как и при рассеянии на акустических фононах, $\chi^{(3)}$ и Ω_0 зависят от угла между k_1 и k_2 , т. е. это, по существу, резонансные параметрические эффекты, поэтому они подробней будут рассмотрены в § 6.5.

Существенно, что мнимая часть кубической восприимчивости около стоксова резонанса отрицательна. В результате происходит перекачка энергии от высокочастотных компонент поля к низкочастотным — спектр поля «краснеет», а вещество нагревается и разность населенностей N_a — N_b перехода с частотой ω_{ba} уменьшается.

Пусть две поляризованные плоские волны с частотами $\omega_{1,2} > 0$ падают перпендикулярно на границу прозрачной среды. Из (3) находим уравнения для потоков энергий:

$$dF_1/dz + \beta F_1 F_2 = 0, \qquad (6.4.11a)$$

$$dF_2/dz - \beta F_1 F_2 = 0, \qquad (6.4.116)$$

где

$$\beta \equiv -32\pi^2 \hbar k_1 k_2 \chi^{(3)''} / n_1^2 n_2^2 = \sigma_{\text{SDH}}^{(2)} (N_a - N_b) > 0, \qquad (6.4.12)$$

$$\chi^{(3)''} \equiv \operatorname{Im} \chi^{(3)} (\omega_2 = \omega_2 - \omega_1 + \omega_1) : e_2^* e_2 e_1^* e_1 = = -\operatorname{Im} \chi^{(3)} (\omega_1 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_2) : e_1^* e_1 e_2^* e_2. \quad (6.4.13)$$

Последнее равенство следует из (6.2.56) (см. также (6.2.114), (6.3.43)), оно обеспечивает сохранение общего числа фотонов при рамановских двухфотонных переходах:

$$F_1(z) + F_2(z) = C. \tag{6.4.14}$$

Подставив (14) в (11), находим

$$F_{1} = \frac{C}{F_{10} + F_{20} e^{\beta Cz}} F_{10}, \qquad (6.4.15)$$

$$F_2 = \frac{C}{F_{20} + F_{10}e^{-\beta Cz}} F_{20}, \qquad (6.4.16)$$

171

где $F_{i0} \equiv F_i(0)$ и $C \equiv F_{10} + F_{20}$. На достаточно больших расстояниях $F_1 \rightarrow 0$, $F_2 \rightarrow C$, т. е. все фотоны превращаются в стоксовы фотоны (рис. 6.10). Разность энергии при этом идет на возбуждение вещества (это явление используется для генерации ультразвука при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна). Однако практически полному преобразованию препятствует ряд не учтенных здесь явлений, в частности спонтанно-вынужденные переходы и генерация новых компонент с частотами $2\omega_1 - \omega_2$ и $2\omega_2 - \omega_1$, а также волн с теми же частотами ω_1 , ω_2 , но с другими типами поляризации и т. д.



Рис. 6.10. Рамановское взаимодействие двух волн при различных начальных интенсивностях: по горизонтали — расстояние z в единицах $1/\beta C$, по вертикали интенсивности F_i в единицах $C=F_{10}+F_{20}$, т. е. функции $\tilde{F}_1 = (1+\alpha e^{\tilde{z}})^{-1}$ и $\tilde{F}_2=1-\tilde{F}_1$, где $\alpha = F_{20}/F_{10}$ — относительная начальная интенсивность стоксовой волны; a) $\alpha =$ = 1/25, штриховая линия — асимптотика, описывающая экспоненциальное усиление стоксовой волны в приближении заданной накачки; б) $\alpha = 1/5$; e) $\alpha = 1$; c) $\alpha = 5$, антистоксова волна (нижняя кривая) ослабляется примерно экспоненциально

Пусть теперь $F_{10} \gg F_{20}$, тогда при достаточно малых *z* можно пренебречь изменением высокочастотного поля (приближение заданной накачки), при этом из (16) следует эффект экспоненциального рамановского усиления:

$$F_{2} = F_{20} \exp(\alpha_{2}z), \qquad (6.4.17)$$

$$\alpha_{2} \equiv \beta F_{10} = -32\pi^{2}\omega_{2}\chi^{(3)''}I_{10}/c^{2}n_{1}n_{2} > 0.$$

Практически для сильных рамановских резонансов на молекулярных колебаниях в жидкостях α_2 достигает 1 см⁻¹ при $I \ge 0,1$ ГВт/см². Итак, рамановский ангармонизм позволяет получить усиление света без инверсии населенностей. Эффект рамановского усиления (или — на антистоксовых частотах — поглощения) используется в спектроскопии, а также для сдвига частоты лазеров. При добавлении с помощью зеркала обратной связи усилитель превращается в генератор (раманлазер).

Спонтанное и вынужденное рассеяния. Даже в отсутствие обратной связи и внешнего сигнала на частоте ω_2 вещество при $F_{10}\neq 0$ некогерентно излучает на частотах $\omega_1\pm\Omega_0$. При $\alpha_2l\gg 1$ излучение на стоксовых частотах ω_2 (т. е. собственный шум рамановского усилителя) достигает уровня, сравнимого с накачкой: $F_2 \sim F_1$. Это явление получило название вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР). При этом возникшее шумовое поле со средней частотой $\omega_1-\Omega_0$ играет роль накачки для второй стоксовой компоненты с частотой $\omega_1-\Omega_0$, последняя возбуждает третью и т. д. Кроме того, за счет параметрических четырехчастотных взаимодействий типа $2\omega_1-\omega_2\rightarrow\omega_3\equiv\omega_1+\Omega_0$ возникают интенсивные антистоксовы компоненты, и количественный анализ явления становится затруднительным.

Оценим мощность ВКР в приближении заданной накачки без учета связи с высшими стоксовыми и антистоксовыми компонентами. Стоксово поле при $F_{20}=0$ рождается за счет спонтанных (точнее, спонтанно-вынужденных) переходов. Согласно закону Кирхгофа (§ 7.1), который справедлив и для двухфотонных переходов [37], интенсивность шума с частотой ω_2 на выходе усилителя в фотонах на моду равна

$$N = (\mathcal{N} + 1) (G - 1), \tag{6.4.18}$$

где

$$G \equiv \exp(\alpha_2 l), \quad \mathcal{N} \equiv \frac{N_b}{N_a - N_b} = \left\{ \exp\left[\frac{\hbar \left(\omega_1 - \omega_2\right)}{\kappa T}\right] - 1 \right\}^{-1}, (6.4.19)$$

Т — температура вещества (предполагается, что переход *a*—*b* не насыщается).

Чтобы перейти от $N \ltimes F$, надо умножить плотность потока фотонов в одной моде Nc/L^3 (L^3 — объем квантования) на эффективное число мод усилителя или детектора:

$$\Delta F = \frac{Nc}{L^3} \Delta g = \frac{Nc\Delta^3 k}{(2\pi)^3} = N \frac{\Delta\omega\Delta\Omega}{2\pi\lambda^2} . \qquad (6.4.20)$$

Здесь учитывается один тип поляризации и пренебрегается отличием показателя преломления от единицы, $\Delta \omega$ и $\Delta \Omega$ — эффективные полоса частот и телесный угол усилителя или детектора.

При нитевидной форме рассеивающего объема, когда $a \ll l$ и $G \gg 1$, существенно лишь продольное ($\vartheta \approx 0$) или обратное ($\vartheta \approx 180^{\circ}$) рассеяние в телесный угол $\Delta \Omega \approx A/l^2$ ($A \equiv a^2$ и l — сечение и длина области взаимодействия) ¹). При этом из (20) находим связь между мощностью шумов на единицу полосы $\mathcal{P}_{\omega} = \hbar \omega F A/\Delta \omega$ и числом фотонов на моду:

$$\mathcal{F}_{\omega} = \hbar \omega n_F^2 N / 2\pi, \qquad (6.4.21)$$

безразмерное число $n_F \equiv A/\lambda l$ называется волновым параметром или числом Френеля. Подстановка (18) в (21) дает ($\alpha \equiv \alpha_2, \omega \equiv \omega_2$)

$$\mathcal{P}_{\omega} = \hbar \omega n_F^2 (\mathcal{N} + 1) (e^{\alpha l} - 1)/2\pi.$$
 (6.4.22)

При вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна эффективно происходит лишь обратное рассеяние, так как Ω (0)=0 (см. (6.2.61)).

Чтобы найти полную выходную мощность, это выражение надо проинтегрировать по ω , что сводится к умножению на эффективную полосу шумов $\Delta \omega$ и замене ω на $\omega_1 - \Omega_0 \equiv \omega$. При слабой накачке $\Delta \omega$ определяется шириной рамановского резонанса, т. е. скоростью затухания молекулярных колебаний (обычно $\Delta \omega/2\pi c \sim 1-10$ см⁻¹). При большом усилении $\Delta \omega$ сужается в (αl)^{1/2} раз (§ 2.3).

Итак, согласно (22) рассеиваемая мощность зависит от интенсивности накачки по закону $\exp(\beta lF_{40})$ —1. При $\beta lF_{10} \ll 1$ экспоненциальная зависимость сменяется линейной, при этом рассеяние называют спонтанным (СКР). Из (22), заменяя A/l^2 на $\Delta\Omega$, находим мощность спонтанного стоксова рассеяния на единицу частоты и телесного угла:

$$\mathcal{P}_{\omega\Omega} = (\hbar c/\lambda^3) \left(\mathcal{N} + 1\right) \beta V F_{10}, \qquad (6.4.23)$$

где V = Al — объем рассеивающей области. Нетрудно проверить, что это выражение согласуется с найденным выше сечением спонтанновынужденного перехода (6.2.116). СКР в отличие от ВКР имеет слабую направленность, определяемую сверткой $\chi^{(3)}$ с ортами поляризации (13).

В случае $F_2 \gg F_1$, когда роль накачки играет поле с меньшей частотой, внешнее (антистоксово) поле $F_1(z)$ согласно (11) экспоненциально затухает — на этом явлении основан спектроскопический метод *обращенного комбинационного рассеяния*. Шумовое поле при этом описывается (18), (22) или (23) при перестановке индексов 1, 2 и замене $\mathcal{N}+1 \rightarrow \mathcal{N}$, $\beta \rightarrow -\beta$. Таким образом, спонтанное антистоксово рассеяние с данной частотой в

$$\mathcal{N}/(\mathcal{N}+1) = N_b/N_a = \exp(-\hbar\Omega_0/\kappa T)$$

раз слабее стоксова при прочих равных условиях. При достаточно сильной накачке мощность антистоксовой компоненты насыщается. Число фотонов на моду при этом стремится согласно (18) к №, т. е. антистоксово поле приобретает яркостную температуру

$$T_{\mathfrak{s}\mathfrak{h}} = T\omega_{\mathfrak{s}}/\Omega_{\mathfrak{s}} \gg T. \tag{6.4.24}$$

Самофокусировка. Этот одночастотный эффект связан с «самовоздействием» квазиплоской квазимонохроматической волны за счет вещественной части кубической восприимчивости $\chi^{(3)} \equiv \operatorname{Re} \chi^{(3)} \times \times (\omega, -\omega, \omega)$. Основной вклад в $\chi^{(3)}$ вносит электрострикционный и ориентационный ангармонизм (при этом $\chi^{(3)} > 0$). В поглощающей среде добавляются температурный ангармонизм ($\chi^{(3)} < 0$) и эффект насыщения.

При учете линейной восприимчивости амплитуда поляризации равна (полагаем $\chi^{(1)''} = \chi^{(3)''} = 0$)

$$P = (\chi^{(1)} + \chi^{(3)} | E|^2) E \equiv \chi (|E|^2) E,$$

где $E = E_1(\mathbf{r}, t)$ — медленно меняющаяся амплитуда (огибающая). В результате показатель преломления зависит от локальной интен-

$$n(\mathbf{r}, t) \equiv [1 + 4\pi\chi (|E|^2)]^{1/2} \approx n_0 + n_2 |E|^2, \qquad (6.4.25)$$

где $n_2 \equiv 2\pi \chi^{(3)}/n_0$.

Пусть $\chi^{(3)} > 0$, тогда пучок света при входе в среду образует диэлектрический волновод с профилем $\Delta n (\mathbf{r}_{\perp}) = n_2 |E(\mathbf{r}_{\perp})|^2$, повторяющим распределение интенсивности в пучке. Скорость распространения c/n на оси пучка будет меньше, чем на периферии, так что боковые лучи начнут изгибаться к оси (нелинейная рефракция) и пучок будет сжиматься. При этом Δn около оси и скорость сжатия станут еще больше, так что пучок в результате «схлопнется» до

некоторого минимального размера, определяемого конкурирующими эффектами (рис. 6.11).

Таким эффектом является, в частности, дифракция. Ее эффективность характеризуется углом расходимости $\vartheta_{\rm q} \sim \lambda_0/2n_0 a$ (*a*—начальный радиус пучка, $\lambda_0 \equiv 2\pi c/\omega$), а эффективность нелинейной рефракции углом полного внутреннего отражения на скачке показателя преломления Δn :

$$\vartheta_{NL} \equiv \arccos \frac{n_0}{n_0 + \Delta n} \approx \sqrt{\frac{2\Delta n}{n_0}}, \quad (6.4.26)$$

полагаем здесь профиль пучка прямоугольным. Если дифракция будет точно компенсировать рефракцию, то должен установиться волноводный режим распространения с постоянным радиусом пучка (самоканализация). Полагая $\vartheta_{NL} = \vartheta_{\rm A}/2$, можно грубо оценить условие самоканализации:

$$\Delta n_{\min} \equiv n_2 |E|_{\min}^2 \approx n_0 \vartheta_{\mu}^2 / 8 \approx \lambda_0^2 / 32 n_0 a^2.$$
(6.4.27)



$$\mathcal{P}_{0} = cn_{0} |E|_{\min}^{2} a^{2}/8 \approx c\lambda_{0}^{2}/256n_{2}.$$
(6.4.28)

Полученная оценка отличается в $\pi^{2/4}$ раз от более точного результата, полученного ниже из нелинейного квазиоптического волнового уравнения (32) в *безаберрационном приближении*, т. е. при пренебрежении отклонением формы волнового фронта от сферической:

$$\mathcal{P}_0 = c\lambda_0^2/64\pi^2 n_2. \tag{6.4.29}$$

 $[Пусть <math>\lambda_0 = 1$ мкм, $\chi^{(3)} = 10^{-12}$ см³/эрг (сероуглерод) и $n_0 = 1,5$, тогда согласно (29) $\mathcal{P}_0 \sim 10^4$ Вт. Эта оценка показывает, что самофокусиров-



Рис. 6.11. Самофокусировка и дефокусировка (штриховая линия): 1 — пучок с малой мощностью $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_0$ медленно расходится из-за дифракции; 2 — пучок с критической мощностью \mathcal{P}_0 «канализируется», при этом дифракция компенсируется; 3 — пучок с $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$ «схлопывается»

ка может существенно изменить характер протекания других нелинейных эффектов (генерации гармоник, ВКР и др.), наблюдаемых обычно при мощной накачке. С самофокусировкой связана также важная проблема оптической прочности вещества, определяющей максимальную интенсивность лазерных пучков.

°Длина самофокусировки. Ясно, что при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$ пучок будет сжиматься (самофокусироваться), а при обратном неравенстве — расходиться из-за дифракции. Длина самофокусировки должна, очевидно, зависеть от относительного превышения ($\mathcal{P} - \mathcal{P}_0$)/ \mathcal{P}_0 .

Чтобы определить вид этой зависимости, рассмотрим решение нелинейного волнового уравнения (6.3.2) для монохроматического поля Re $\tilde{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ в квазиоптическом и безаберрационном приближениях (см. [2], § 9.3). В однородной изотропной среде без сторонних источников поле поперечно, так что из (6.3.2) следует нелинейное уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{E}} + k^2 \left(1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_0) \,|\, \tilde{\boldsymbol{E}}\,|^2 \right) \tilde{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad (6.4.30)$$

где_ $k = n_0 \omega/c$, $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$, $\epsilon_2 \equiv 4\pi \chi^{(3)} = 2n_0 n_2$.

Пусть на нелинейную прозрачную среду, занимающую полупространство z>0, падает поляризованный пучок света с ограниченным сечением, но с высокой направленностью (узким угловым спектром), тогда поле в среде можно искать в виде

$$\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{z}), \qquad (6.4.31)$$

где $|e|^2 = 1$, $e_z = 0$ и E(r) — медленно (по сравнению с e^{ikz}) меняющаяся амплитуда (MMA), описывающая изменение локальной амплитуды колебаний поля по сечению пучка и вдоль него.

Практически всегда характерные длины z_{n} , z_{NL} , на которых E(z) заметно изменяется вследствие дифракции и нелинейности, много больше λ , поэтому можно пренебречь $\partial^{2}E/\partial z^{2}$ по сравнению с $2k \partial E/\partial z$ (приближение MMA). При этом из (30) и (31) получаем нелинейное параболическое уравнение для E(r):

$$2ik \,\partial E/\partial z + \nabla_{\perp}^{2} E + (k^{2} \varepsilon_{2}/\varepsilon_{0}) \,|\, E\,|^{2} E = 0, \qquad (6.4.32)$$

где $\nabla_{\perp}^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. При $\varepsilon_2 = 0$ (32) является основным уравнением квазиоптики, изучающей распространение направленных волновых пучков.

Если пренебречь изменением Е по сечению, то из (32) следует

$$E(z) = E(0) e^{i\Delta kz}, \ \Delta k/k = \Delta n/n_0 = 16\pi^2 \chi^{(3)} I/cn_0^3 \qquad (6.4.33)$$

—нелинейность лишь меняет фазовую скорость $\omega/(k + \Delta k) = c/(n_0 + \Delta n)$ плоской волны. Для CS₂ при I = 1 ГВт/см² значение $\Delta n = 2 \cdot 10^{-5}$.

Пусть теперь падающая волна на границе имеет гауссов профиль и плоский волновой фронт: $E(x, y, 0) = E_0 \exp(-\rho^2/a_0^2)$ ($\rho^2 \equiv x^2 + y^2$, a_0 —начальный радиус луча). Попробуем подобрать решение (32) в виде гауссова луча с переменным радиусом $a(z) \equiv a_0 f(z)$ и параболическим волновым фронтом с переменной кризной на оси $\beta(z)$:

$$E(\mathbf{r}) = E_0 \exp \left[F(\mathbf{z}) \rho^2 + i\varphi(\mathbf{z}) \right] / f(\mathbf{z}), \qquad (6.4.34)$$

$$F(\mathbf{z}) \equiv ik\beta(\mathbf{z}) / 2 - 1/a_0^2 f^2(\mathbf{z}). \qquad (6.4.35)$$

Здесь $\varphi(z)$ — дополнительный к kz набег фазы на оси, а предэкспоненциальный множитель 1/f обеспечивает независимость от z мощности волны:

$$\mathcal{P} = (cn_0/8\pi) \int dx \, dy \, |E|^2 = (cn_0/16) E_0^2 a_0^2. \tag{6.4.36}$$

При малых ρ волна (34) имеет примерно сферический волновой фронт с радиусом $1/\beta(z)$. Ниже будет показано, что кривизна фронта и ширина пучка в сечении *z* связаны условием (40).

Из (34) находим

$$\frac{\partial E}{\partial z} = (\rho^2 F' + i\varphi' - f'/f) E, \ \nabla_{\perp}^2 E = 4F \left(1 + \rho^2 F\right) E, \quad (6.4.37)$$
$$|E|^2 = \frac{E_0^2}{f^2} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{a_0^2 f^2}\right) \approx \frac{E_0^2}{f^2} \left(1 - \frac{2\rho^2}{a_0^2 f^2}\right).$$

В последнем равенстве мы перешли от гауссова профиля к параболическому, что допустимо для приосевых областей пучка (безаберрационное приближение). Подстановка (37) в (32) позволяет найти функции *f*, β, φ. Так, приравнивая нулю сумму коэффициентов при ρ², находим

$$2ikF' + 4F^2 - k^2/z_{NL}^2 f^4 = 0, (6.4.38)$$

где

$$z_{NL}^2 \equiv n_0 a_0^2 / 4\Delta n_0 \tag{6.4.39}$$

и Δn_0 — приращение показателя преломления в точке r = 0. Из мнимой части (38) следует

$$\beta = d \left(\ln f \right) / dz, \qquad (6.4.40)$$

а из вещественной —

$$f'' = 1/z_0^2 f^3. \tag{6.4.41}$$

Здесь введены обозначения:

$$z_{0}^{2} \equiv (z_{\pi}^{-2} - z_{NL}^{-2})^{-1} = z_{\pi}^{2} / (1 - \mathcal{P} / \mathcal{P}_{0}) = z_{NL}^{2} / (\mathcal{P}_{0} / \mathcal{P} - 1),$$

$$z_{\pi} \equiv k a_{0}^{2} / 2, \quad z_{\pi}^{2} / z_{NL}^{2} = \mathcal{P} / \mathcal{P}_{0} = (\Delta n_{0} / n_{0}) (k a_{0})^{2}.$$
(6.4.42)

Параметр z_0 определяет длину «схлопывания» пучка, а параметр z_{π} имеет смысл «дифракционной» длины; здесь \mathcal{P}_0 и \mathcal{P} определены формулами (29) и (36).

Отсюда окончательно находим законы изменения ширины и радиуса кривизны R(z) параболического пучка за счет его самовоздействия:

$$a(z)/a_0 = f = (1 + \tilde{z}^2)^{1/2},$$
 (6.4.43)

$$R(z) = 1/\beta = z(1 + \tilde{z}^{-2}), \qquad (6.4.44)$$

177

где $z \equiv z/z_0$. Функцию $\varphi(z)$ можно найти из коэффициентов нулевого порядка по ρ , возникающих при подстановке (37) в (32). Амплитуда поля в пучке имеет вид

$$E(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{(1+\bar{z}^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{a_0^2(1+\bar{z}^2)} + \frac{ik\rho^2}{2z(1+\bar{z}^{-2})} + i\varphi(z)\right]. \quad (6.4.45)$$

Найденное решение при 𝒫 ≪ 𝒫₀(т. е. при z₀ ≈ z_д) описывает так называемую ТЕМ₀₀-волну — простейшее решение линейного параболического уравнения:

$$E_{\rm TEM} = \frac{E_0}{1 + iz/z_{\rm II}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{a_0^2 (1 + iz/z_{\rm II})}\right]$$
(6.4.46)

(заметим, что $1 + iz = (1 + z^2)^{1/2} \exp(i \arctan z_n)$, т. е. здесь $\varphi(z) = -\arctan z_n (z/z_n)$). При этом дифракционная длина z_n определяет расстояние, на котором сечение пучка удваивается и радиус фронта достигает минимального значения $2z_n = ka_0^2 \equiv b$ (эта величина называется конфокальным параметром пучка). При $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_0$ роль z_n играет z_0 —дифракция замедляется. Наконец, при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$ параметры z_0^2 и соответственно \overline{z}^2 становятся отрицательными, пучок сужается, и его ширина и радиус фронта в сечении $z = |z_0|$ обра-



Рис. 6.12. Зависимость параметра z_0 (в единицах $ka_0^2/2$) от мощности пучка \mathscr{P} (в единицах критической мощности \mathscr{P}_0), описываемая функцией $|1 - \tilde{\mathscr{P}}|^{-1/2}$. При $\tilde{\mathscr{P}} < |1z_0$ имеет смысл длины дифракции пучка, а при $\tilde{\mathscr{P}} > |1$ длины его «схлопывания». Последняя при $\tilde{\mathscr{P}} \gg |1$ примерно равна «нелинейной» длине z_{NL} (штриховая линия)

щаются в нуль, причем при $\mathcal{P} \gg \mathcal{P}_0 |z_0| \approx z_{NL}$ (рис. 6.12). Конечно, квазиоптическое безаберрационное приближение правильно описывает лишь начальную стадию процесса самофокусировки, однако ее характерная длина должна быть близка к $|z_0|$ по порядку величины.

В области фокуса существенную роль могут играть высшие нелинейности $\chi^{(5)},...$ и многочастотные нелинейные эффекты, например вынужденные рассеяния. Заметим, что в случае импульсных полей положение фокуса $|z_0(t)|$ зависит от времени: по мере нарастания интенсивности фокус передвигается из бесконечности до некоторого минимального расстояния и затем снова уходит на бесконечность (движущийся фокус).

Пусть теперь на нелинейную сре-

ду падает волна с плоским волновым фронтом и изрезанным профилем $|E(x, y, 0)|^2 \equiv I(x, y)$ (волна с поперечной амплитудной модуляцией). В процессе распространения дифракция стремится загладить неоднородности профиля, а нелинейная рефракция, наоборот, их подчеркивает (самомодуляция). Качественно эти явления описываются (43), если под a(z) понимать ширину неоднородности. В результате волна может разбиться на множество волноводных нитей, каждая из которых несет мощность \mathcal{P}_0 . Такой распад является примером динамической поперечной неустойчивости волн в нелинейной среде и аналогичен образованию солитонов при продольной неустойчивости (см. ниже).

Ясно, что если $\chi^{(3)} < 0$, то должна иметь место самодефокусировка (рис. 6.11). Она описывается приведенной выше теорией при отрицательных параметрах \mathcal{P}_0 и z_{NL}^2 . Этот эффект легко наблюдается в поле непрерывных лазеров при добавлении в прозрачные растворители поглощающей краски.

В двухчастотных (и/или двуволновых) экспериментах наблюдается взаимная фокусировка или дефокусировка за счет $\operatorname{Re} \chi^{(3)}(\omega_2 = \omega_2 - \omega_1 + + \omega_1)$ — интенсивный луч света с частотой ω_1 превращает плоскопараллельную пластину в собирающую или рассеивающую линзу для волны ω_2 . Эта же частотная компонента кубической восприимчивости описывает индуцированную дисперсию и оптический эффект Керра — плоская накачка с частотой ω_1 превращает изотропную среду в двупреломляющую для второй волны с частотой ω_2 . Оптический эффект Керра и лазеры с синхронизацией мод позволяют осуществить оптические затворы со скоростью переключения порядка 1 пс.

Рассмотрим теперь плоскую квазимонохроматическую волну с огибающей E(t), промодулированной во времени. В линейной среде в первом приближении теории дисперсии E (t) распространяется без изменения с групповой скоростью $\boldsymbol{u} = \nabla \omega(\boldsymbol{k})$, а при учете второго приближения $(d^2\omega/dk^2 \neq 0)$ выбросы интенсивности расплываются (этот эффект аналогичен дифракционному сглаживанию поперечных неоднородностей). В нелинейной среде самодействие может приводить к обратному эффекту и при $\chi^{(3)}d^2\omega/dk^2 \ll 0$ импульсы с достаточной энергией сжимаются (самосжатие или самокомпрессия — см. [2], § 9.5). Квазимонохроматическая волна с небольшой начальной модуляцией в результате самомодуляции разбивается на отдельные импульсы с определенными энергией и формой — солитоны 1) (аналоги волноводных нитей при самофокусировке). Практически такие эффекты наблюдаются в пикосекундном диапазоне, так что инерционные механизмы нелинейности (например, температурный) не успевают проявиться.

§ 6.5. Параметрические взаимодействия

При параметрическом взаимодействии m мод с положительными частотами ω_i условие стационарности имеет вид закона сохранения энергии для m-фотонного процесса:

$$\Delta \omega = \sum_{i=1}^{m} s_i \omega_i = 0, \qquad (6.5.1)$$

¹) Напомним, что световые солитоны (с «площадью» 2π) образуются также в области резонансного поглощения за счет двухуровнего ангармонизма (§ 5.1).

где $s_i = \pm 1$, $\omega_i = \omega(\mathbf{k}_i) > 0$. Согласно одномерной модели в бесконечном слое взаимодействуют лишь моды, удовлетворяющие закону сохранения поперечного импульса поля

$$\Delta k_x = 0, \quad \Delta k_y = 0 \tag{6.5.2}$$

где $\Delta \mathbf{k} = \sum s_i \mathbf{k}_i$. Формально (1) и (2) следует из уравнений Максвелла при трехмерном фурье-преобразовании (§ 6.3). В эксперименте время т и сечение $A \equiv a^2$ взаимодействия всегда ограничены, поэтому (1) и (2) выполняются лишь с точностью порядка $1/\tau$, 1/aсоответственно:

$$|\Delta \omega| \leq 1/\tau, \quad |\Delta k_{\perp}| \leq 1/a. \tag{6.5.3}$$

В настоящем разделе мы, как правило, будем для простоты пренебрегать линейным поглощением ($\alpha_i = 0$). При этом взаимодействие *m* мод в одномерном приближении согласно (6.3.24) описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dE_1^*}{dz} = \frac{2\pi s_1 \omega_1}{i c n_1} P_1^*(z) e^{i\Delta z}, \qquad (6.5.4)$$

где

$$P_1^*(z) = \chi^{(m-1)}(s_1\omega_1; s_2\omega_2, \dots s_m\omega_m) E_2(z) \dots E_m(z), \quad (6.5.5)$$

 $E_i = E_{k_i}$ при $s_i = 1$ и $E_{k_i}^*$ при s = -1, $\chi^{(m-1)}$ —свертка тензора нелинейной восприимчивости с ортами поляризации, $n \equiv n \cos \theta \cos \rho$, n—показатель преломления, θ и ρ —углы между вектором Пойнтинга и осью z и вектором k соответственно, $\Delta \equiv \Delta k_z$. Уравнения для E_2, \ldots, E_m имеют аналогичный вид и получаются перестановкой индексов.

Из (4) следует, что параметрическое взаимодействие эффективно лишь при достаточно малых | Δ |, т. е. при сохранении продольного импульса поля:

$$|\Delta| = \left| \sum s_i k_{iz} \right| < 1/l.$$
(6.5.6)

Условие синхронизма $\Delta k \sim 0$ резко сокращает число существенных «взаимодействий» — комбинаций величин $\{k_i, v_i, s_i\}$, особенно в анизотропной среде, где показатель преломления $n_v(\omega, \vartheta, \varphi) = ck/\omega_v(k)$ зависит не только от частоты, но и от индекса поляризации v = 1, 2, и от направления $\hat{k} \equiv k/k \equiv \{\vartheta, \varphi\}$.

Приближение заданной накачки — ближняя зона. Пусть $k_{1z} > 0$ и $E_1(0) = 0$, т. е. мода с номером 1 не возбуждается внешним источником. При достаточно малых нелинейности, толщине слоя или падающих полях накачки $E_i(0)$ ($i=2, \ldots, m$) можно пренебречь влиянием нелинейности на накачку, т. е. полагать в правой части (4) нелинейную поляризацию $P_1(z)$ с частотой ω_1 заданной функцией координат, опре-
деляемой пространственным распределением свободных падающих полей.

В случае заданной поляризации из (4), при учете определения (6.3.19), находим следующее выражение для амплитуды моды (**k**, **v**), возбуждаемой в однородной прозрачной линейной среде фурье-компонентой поляризации:

$$E_{v}(k) = \frac{8\pi^{2}ik\,u_{k}}{L^{3}n_{k}^{2}\cos\rho_{k}}\int_{V} d^{3}r e^{-ik\cdot r}\boldsymbol{e}_{v}\cdot\boldsymbol{P}(\omega_{k}, \boldsymbol{r}), \qquad (6.5.7)$$

где *и*—групповая скорость. Заметим, что (7) определяет поле излучения вне *V* при любой форме излучающей области *V*.

В случае плоскопараллельного слоя с толщиной z из (4) следует

$$E_1^*(z) = -\frac{2\pi s_1 \omega_1 \chi^{(m-1)}}{cn_1} E_2(0) \dots E_m(0) \frac{e^{i\Delta z} - 1}{\Delta}, \qquad (6.5.8a)$$

$$I_{1z}(z) = \left(\frac{8\pi}{c}\right)^m \frac{\omega_1^2 |\chi^{(m-1)}|^2 z^2}{16\overline{n_1} \dots \overline{n_m}} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\Delta z}{2}\right) I_{2z}(0) \dots I_{mz}(0), \quad (6.5.86)$$

где $I_{kz} = cn_k |E_k|^2 / 8\pi = \hbar \omega_k F_{kz}$ — продольная компонента плотности потока энергии в k-й моде и sinc (x) = (sin x)/x. Формулы (8) определяют эффективность параметрического преобразования частоты света.

Заметим, что «новая» мода $(k_1, v_1) \equiv k_1$ определена через моды накачки k_2, \ldots, k_m условиями (1), (2) лишь с точностью до типа поля-

ризации v_1 и знака σ_1 продольной составляющей k_{1z} (см. (6.3.16)). Иначе говоря, каждая комбинация поляризованных волн накачки $\sum s_i k_i$, $i=2, \ldots$, возбуждает, в принципе, четыре волны с частотой ω_1 , различающиеся индексами $v_1=1$, 2 и $\sigma_1=\pm 1$. Однако обычно множитель $\operatorname{sinc}^2(\Delta z/2)$ в (86) сильно подавляет волну с $k_{1z} < 0$ — примерно в $(k_{1z}z)^2$ раз (рис. 6.13).

Итак, в приближении заданной накачки новые моды возбуждаются



Рис. 6.13. При параметрическом преобразовании частоты $\omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \rightarrow \omega_1$ условиям сохранения энергии и поперечного импульса удовлетворяют две волны $k_1^{(\pm)}$, однако длина когерентности $\pi/\Delta^{(-)}$ для одной из них крайне мала — порядка длины волны λ_1

пропорционально произведению интенсивностей падающих полей, квадрату нелинейной восприимчивости и — при синхронизме ($|\Delta|z \ll 1$) — квадрату длины взаимодействия. При обратном неравенстве z^2 заменяется на $(\Delta/2)^{-2}\sin^2(\Delta z/2) \sim 2/\Delta^2$, т. е. при рассогласовании фазовых скоростей амплитуда новой моды периодически обращается в нуль. Расстояние $\pi/|\Delta|$, на котором интенсивность моды изменяется монотонно, называется длиной когерентности.

Дальняя зона. Практически формулы (8), как и вообще одномерное приближение с конечным числом поперечных мод, определяют поле лишь в ближней зоне нелинейного образца, в которой дифракционные эффекты за счет конечного сечения A области взаимодействия несущественны. Однако в приближении заданной накачки нет необходимости использовать разложение по модам и одномерную модель, так как задача сводится к решению одного волнового уравнения (6.3.2) при заданном распределении монохроматических источников $P(\omega, r)$, т. е. к определению функции Грина $G(\omega, r)$ уравнения Гельмгольца. Эта функция имеет особенно простой вид в случае однородной изотропной среды и большого расстояния r от источников до точки наблюдения.

Мы уже определили функцию Грина уравнений Максвелла в ω , *k*-представлении (см. (4.1.20)). Можно показать, что ее трехмерное фурьепреобразование в первом порядке по λ/r , т. е. для волновой зоны, дает следующее выражение:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{c^2 r} e^{ikr} \boldsymbol{\Pi}(\hat{\boldsymbol{r}}), \qquad (6.5.9)$$

где $\Pi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \hat{r}_{\alpha}\hat{r}_{\beta}$ — оператор проектирования на плоскость, перпендикулярную направлению $\hat{r} \equiv r/r$ и $k \equiv n(\omega) \omega/c$. Пусть $r \gg kA$ (*дальняя зона*), тогда (9) приводит к следующей связи между полем и сторонней поляризацией (ср. (7)):

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}) = \frac{\omega^{2}}{c^{2}r} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \int_{V} d^{3}\boldsymbol{r}' e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{\Pi}(\hat{\boldsymbol{r}}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}'), \qquad (6.5.10)$$

где $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{r}}$ и \mathbf{r} соединяет какую-либо точку внутри области V, содержащей источники, и точку наблюдения. Таким образом, при больших V поле излучения в дальней зоне пропорционально фурьеобразу сторонней поляризации.

Рассмотрим генерацию поля с частотой ω_1 , заданной накачкой, состоящей из m-1 плоских волн. Нелинейная поляризация при $V \rightarrow \infty$ также является плоской волной с частотой и волновым вектором, равными

$$\omega_1 = -\sum_{i=2}^m s_i \omega_i, \quad K = -\sum_{i=2}^m s_i k_i. \quad (6.5.11)$$

Пусть тензор $\chi^{(m-1)}$ отличен от нуля в параллелепипеде с размерами *a*, *b*, *c*, тогда из (10) следует (при $s_1 = 1$)

$$\boldsymbol{E^*}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\omega}_1^2}{c^2 r} e^{-ik_1 r} \left(\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\chi}^{(m-1)} : \boldsymbol{E}_2 \dots \boldsymbol{E}_m \right) V f(\boldsymbol{r}), \quad (6.5.12)$$

$$f(\hat{\boldsymbol{r}}) = \int d^3 r' e^{i\Delta^{\boldsymbol{r}'} \cdot \boldsymbol{r}'} / V = \operatorname{sinc} \left(\Delta k_x a/2\right) \operatorname{sinc} \left(\Delta k_y b/2\right) \operatorname{sinc} \left(\Delta k_z c/2\right), \quad (6.5.13)$$

$$\Delta \boldsymbol{k} \equiv n_1 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \hat{\boldsymbol{r}} / c - \boldsymbol{K}. \tag{6.5.14}$$

Диаграмма направленности поля ω_1 при заданном K определяется в основном функцией $f(\hat{r})$. Для эффективного преобразования частоты длина вектора K должна быть близка к $n_1\omega_1/c = k_1$, при этом излучение максимально в направлении K (для которого $f \approx 1$) и имеет заметную величину в телесном угле порядка λ_1^2/A ,

где *А*—площадь проекции излучающего объема на перпендикулярную *К* плоскость (рис. 6.14).

Взаимодействие трех волн. Рассмотрим в рамках одномерной модели взаимодействие трех волн или мод с частотами $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ за счет квадратичной нелинейности, которая имеет заметную величину лишь в пьезокристаллах. Для выполнения условия синхронизма $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = 0$ в области прозрачности кристалл должен быть двупреломляющим и иметь определенную ориентацию осей относительно падающих лучей (рис. 6.15).



Рис. 6.14. К определению диаграммы направленности $I(\vartheta)$ поля, излучаемого поляризацией с частотой ω , волновым вектором Kи объемом *abc*: излучение имеет заметную величину, лишь если наблюдаемый волновой вектор k принадлежит области с размерами 1/a, 1/b, 1/c около точки K



Рис. 6.15. Угловая дисперсия показателя преломления $n^e(\theta)$ для необыкновенной волны позволяет скомпенсировать частотную дисперсию и выполнить условие синхронизма $n^0(\omega_1) = n^e(2\omega_1, \theta_1)$ для генерации второй гармоники, а также для других трехволновых взаимодействий

Перенормируем амплитуды волн так, чтобы их квадраты равнялись F_i —плотности продольного потока энергии в единицах $\hbar\omega_i$ (см. (6.3.29)). Из (4) (или (6.3.31)) при $s_1 = s_2 = -s_3 = -1$ следует (полагаем, что все волны попутные, $\overline{n}_i > 0$):

$$da_1/dz = i\beta e^{i\Delta z} a_2^* a_3, \tag{6.5.15}$$

$$da_2/dz = i\beta e^{i\Delta z} a_1^* a_3, \tag{6.5.16}$$

$$da_3/dz = i\beta e^{-i\Delta z} a_1 a_2, \qquad (6.5.17)$$

где

$$\beta = (32\pi^3 \hbar \omega_1 \omega_2 \omega_3 / c^3 \overline{n_1 n_2 n_3})^{1/2} \chi, \qquad (6.5.18)$$

$$\Delta \equiv \Delta k_z, \ \chi \equiv \chi^{(2)} (\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) : \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_1. \tag{6.5.19}$$

Здесь свертку χ можно считать вещественной величиной, инвариантной к одновременной перестановке частот и ортов поляризации e_i (§ 6.1).

Умножая эти уравнения на a_i^* , убеждаемся, что скорости изменения потоков dF_i/dz в модах 1 и 2 равны, а в модах 1 и 3 имеют обратные знаки. Таким образом, поток энергии $\sum \hbar \omega_i F_i$ лишь перераспределяется (без поглощения) между тремя модами, причем доля каждой моды пропорциональна ее частоте (соотношения

Мэнли—Роу—см. § 6.3):

$$\Delta F_1 = \Delta F_2 = -\Delta F_3, \tag{6.5.20}$$

где

$$\Delta F_i \equiv F_i(z) - F_i(0). \tag{6.5.21}$$

Имеется еще третий независимый интеграл (6.3.49) уравнений (15) — (17), определяющий разность фаз. Эти интегралы позволяют свести решение уравнений (15) — (17) к одной квадратуре. В результате зависимость $a_i(z)$ выражается через эллиптические функции, описывающие периодический обмен энергией между тремя модами [34]. Мы здесь рассмотрим крайние случаи, когда интенсивность одной из волн много больше интенсивности двух других (приближение заданной накачки, или параметрическое приближение).

Преобразование частоты вверх. Пусть $F_{10} \gg F_2$, F_3 (низкочастотная заданная накачка), $a_{10} = a_{10}^*$ и $\Delta = 0$, тогда из (16), (17) следует

$$da_2/dz = i\gamma a_3, \tag{6.5.22}$$

$$da_3/dz = i\gamma a_2, \tag{6.5.23}$$

$$\gamma \equiv \beta a_{10} = (32\pi^3 \omega_2 \omega_3 / c^3 \overline{n_1 n_2 n_3} I_{10})^{1/2} \chi. \qquad (6.5.24)$$

Эти уравнения легко решаются подстановкой $a_i = c_i e^{i\gamma z}$:

$$a_{2} = a_{20} \cos \gamma z + i a_{30} \sin \gamma z, a_{3} = a_{30} \cos \gamma z + i a_{20} \sin \gamma z.$$
(6.5.25)

Таким образом, моды 2 и 3, аналогично связанным маятникам, периодически (на длине π/2γ) обмениваются энергией (в единицах ħω,) в соответствии с (20) (рис. 6.16).



Рис. 6.16. Параметрическое взаимодействие в случае низкочастотной заданной накачки: а) зависимость интенсивности от расстояния z; б) два варианта спектра излучения (стрелки указывают направление передачи энергии)

Оценим характерную длину параметрического взаимодействия $z_{NL} \equiv 1/\gamma \approx \lambda_0 n/4\pi^2 \chi E_{10}$. Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ мкм, $n_i = 1$, $\chi = 10^{-8} \, \Gamma c^{-1}$, $I_{10} = 100 \, \text{MBT/cm}^2$, тогда $z_{NL} = 0.3 \, \text{см}$. При a₃₀ = 0 из (25) следует

$$F_{3} = F_{20} \sin^{2} (z/z_{NL}), \quad F_{2} = F_{20} \cos^{2} (z/z_{NL}). \quad (6.5.26)$$

184

Эта формула описывает параметрическое сложение частоты, или преобразование частоты вверх (up-conversion), которое используется, в частности, для визуализации ИК-излучения. Выходная интенсивность преобразователя при длине взаимодействия $z = \pi z_{NL}/2$ достигает максимума, равного (в фотонах) входной интенсивности. При этом эффективность преобразования в обычных единицах равна $\omega_3/\omega_2 > 1$.

Легко обобщить (26) на случай Δ≠0. При этом эффект сложения частоты описывается формулой

$$F_{3} = F_{20} [\gamma \sin(\Gamma' z) / \Gamma']^{2}, \quad \Gamma' = (\gamma^{2} + \Delta^{2} / 4)^{1/2}. \quad (6.5.27)$$

Отсюда при $\Delta^2 \gg 4\gamma^2$ снова получаем (86). Сравнение (26), (27) с (8) показывает, что приближение двух заданных накачек $a_{1,2} = \text{const}$ применимо лишь при $(2\gamma/\Delta)^2 \ll 1$. При этом период пространственных биений определяется волновой расстройкой Δ , а не интенсивностью накачки γ .

Параметрическое усиление и генерация. Пусть $F_{30} \gg F_1$, F_2 (высокочастотная накачка), тогда вместо (22)—(24) имеем

$$da_1/dz = i\gamma a_2^*, \ da_2/dz = i\gamma a_1^*,$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{32\pi^3\omega_1\omega_2}{c^3\overline{n_1n_2n_3}} I_{30}\right)^{1/2} \chi\left(-\omega_3; \ \omega_1, \ \omega_2\right) : e_3e_1e_2.$$
(6.5.28)

Эта система имеет решение (ср. (25))

$$a_{1} = a_{10} \operatorname{ch} \gamma z + i a_{20}^{*} \operatorname{sh} \gamma z, a_{2} = a_{20} \operatorname{ch} \gamma z + i a_{10}^{*} \operatorname{sh} \gamma z.$$
(6.5.29)

Если a₁₀ = 0, то (ср. (26))

$$\begin{cases} F_1 = F_{20} \operatorname{sh}^2 \gamma z \equiv (G - 1) F_{20}, \\ F_2 = F_{20} \operatorname{ch}^2 \gamma z \equiv G F_{20}, \end{cases}$$
 (6.5.30)

где G — коэффициент параметрического усиления. Эти формулы описывают эффекты вычитания частоты $\omega_3 - \omega_2 \rightarrow \omega_1$ и параметрического усиления. В отличие от случая низкочастотной накачки интенсивности здесь нарастают неограниченно по экспоненциальному закону (рис. 6.17). Отметим, что (30) удовлетворяет соотношениям Мэнли — Роу (20): $\Delta F_1 = \Delta F_2 = (G-1) F_{20}$.

Нетрудно показать, что в случае Δ≠0 эффекты усиления и вычитания частоты при высокочастотной накачке описываются формулой (ср. (27))

$$G = 1 + [\gamma \operatorname{sh} (\Gamma z) / \Gamma]^2, \quad \Gamma = (\gamma^2 - \Delta^2 / 4)^{1/2}. \quad (6.5.31)$$

Заметим, что при у² <> $\Delta^2/4$ экспоненциальный рост сменяется биениями.

При наличии положительной обратной связи на частоте $\omega_1 u/или \omega_2$ (рис. 6.18) усилитель превращается в параметрический генератор света (ПГС). Одна из частот при этом (например, ω_1) называется сигнальной, а другая (ω_2) — холостой. Конечно, для возникновения автоколеба-

ний параметрическое усиление должно компенсировать не учитываемое здесь поглощение и потери в зеркалах. Частоты генерации ПГС определяются в основном условием синхронизма, т. е. показателями преломления n_i , поэтому ПГС при фиксированной частоте накачки ω_3



Рис. 6.17. Параметрическое усиление и вычитание частоты (высокочастотная накачка, прямое взаимодействие): а) зависимость интенсивности от расстояния; б) вид частотного спектра излучения и направления передачи энергии; в) связь волновых векторов при синхронизме

можно плавно перестраивать изменением ориентации или температуры кристалла. Существующие ПГС с импульсной лазерной накачкой перекрывают диапазон λ≈0,4—20 мкм, у дачно дополняя перестраивае-



мые лазеры на красителях. Оптимизируя параметры кристалла, сфокусированного пучка накачки и резонатора, удается получить генерацию даже в непрерывном режиме.

Рис. 6.18. Схема параметрического генератора света

Встречное взаимодействие. Пусть волны накачки и сигнала распространяются в слое «направо» ($k_{1z}, k_{3z} > 0$), а холостая волна—

«налево» ($k_{2z} < 0$). Условие синхронизма при этом удается осуществить за счет сильного двупреломления или аномальной дисперсии. Для встречной волны $\vartheta_2 > \pi/2$ и $\overline{n_2} < 0^{1}$), так что вместо (28) имеем

$$da_1/dz = i\gamma a_2^*, \quad da_2/dz = -i\gamma a_1^*.$$
 (6.5.32)

Пусть слой имеет толщину *l*, тогда граничные условия имеют вид $a_1(0) = a_{10}$, $a_2(l) = a_{2l}$. Легко проверить, что решениями (32) являются следующие функции (рис. 6.19):

$$a_{1} = \{a_{10} \cos [\gamma (l-z)] + ia_{2l}^{*} \sin \gamma z\} / \cos \gamma l, a_{2} = \{a_{2l} \cos \gamma z + ia_{10}^{*} \sin [\gamma (l-z)]\} / \cos \gamma l,$$
(6.5.33)

полагаем у вещественным числом. При у*1-->*π/2 эти решения устремляются к бесконечности, т. е. возникают автоколебания, несмотря на

¹) Точнее, знак $n = n \cos \theta \cos \rho$ определяется углом $\theta = \vartheta \pm \rho$ между лучевым вектором и осью *z*, однако угол анизотропии в полосе прозрачности не превышает нескольких градусов, и мы им здесь пренебрегаем.

отсутствие зеркал. Можно считать, что при встречном взаимодействии имеет место *распределенная обратная связь* (аналогичный эффект имеет место в лампе обратной волны).





Рис. 6.19. Параметрическое усиление и вычитание частоты в случае встречного взаимодействия: а) зависимость интенсивности (в единицах F_{10}) от координаты z (в единицах $1/\gamma$) при $F_{2l}=0$ и $\gamma l=1,5$; коэффициент усиления равен $1/\cos^2(1,5)\approx 200$; δ) треугольник синхронизма при встречном взаимодействии

Генерация второй гармоники (ГВГ) в одномерном приближении и при отсутствии линейного поглощения описывается уравнениями (16), (17) при замене индексов $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$:

$$da_1/dz = i\beta e^{i\Delta z} a_1^* a_2, \qquad (6.5.34 \text{ a})$$

$$da_2/dz = i\beta e^{-i\Delta z} a_1^2/2, \qquad (6.5.34\,\text{G})$$

где

$$\beta = (64\pi^3 \hbar \omega_1^3 / c^3 \overline{n_1^2 n_2})^{1/2} \chi, \ \Delta = k_{2z} - 2k_{1z}, \qquad (6.5.35)$$

$$\chi = \chi^* \equiv \chi^{(2)} (-\omega_1; 2\omega_1, -\omega_1) : e_1 e_2 e_1 = 2\chi^{(2)} (-2\omega_1; \omega_1, \omega_1) : e_2 e_1 e_1.$$
(6.5.36)

Коэффициент 2 в последнем выражении добавлен в соответствии со связью (6.1.13).

Легко проверить, что эти уравнения удовлетворяют условию сохранения энергии поля, которое совпадает здесь с соотношением Мэнли — Роу:

$$|a_1|^2 + 2|a_2|^2 = C_1, \tag{6.5.37}$$

коэффициент 2 связан с тем, что каждый фотон гармоники имеет вдвое большую энергию, чем фотон накачки. Второй интеграл уравнений (34) имеет согласно (6.3.49) вид

$$|a_{1}|^{2} [\Delta - 2\beta |a_{2}| \cos (\varphi_{2} - 2\varphi_{1} + \Delta z)] = C_{2}, \qquad (6.5.38)$$

где φ_i — фазы комплексных амплитуд a_i .

Решения уравнений (34) в общем случае описывают периодический (в пространстве) обмен энергией между модами накачки и гармоники (эти решения выражаются через эллиптический синус [34, 41]).

Мы здесь ограничимся наиболее простым и важным случаем, когда $\Delta = 0, a_2(0) = 0$. При этом, полагая в (38) z=0, находим $C_2 = 0$ и, следовательно, при любых z имеем соз $\varphi = 0$, где $\varphi = \varphi_2 - 2\varphi_1$. Таким образом, сдвиг фаз между модами не меняется. Легко показать, что и сами

фазы неизменны. Для этого подставим в (346) $a_i = b_i \exp(i\varphi_i) (b_i \ge 0)$:

$$\frac{dv_2}{dz} = (1/2) |\phi_1| \sin \phi = (1/2) |\beta| |b_1^2, \qquad (6.5.39)$$

$$d\varphi_2/dz = (\beta b_1^2/2b_2)\cos\varphi = 0. \tag{6.5.40}$$

Из второго уравнения следует, что φ_1 и φ_2 не зависят от *z*, а из первого — что направление передачи энергии (из первой гармоники во вторую или наоборот) зависит от знаков φ и β . В рассматриваемом случае b_2 нарастает (от нуля), поэтому $\beta \sin \varphi > 0$, т. е. $\varphi = (\pi/2) \operatorname{sign} \chi$.

Подставив (37) при $C_1 = b_{10}^2$ в (39), легко находим решение:

$$db_2/dz = |\beta| (b_{10}^2 - 2b_2^2)/2, \qquad (6.5.41)$$

$$z = \frac{1}{|\beta|} \int \frac{db_2}{b_{10}^2/2 - b_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{|\beta| b_{10}} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{2} b_2}{b_{10}}.$$
 (6.5.42)

Отсюда

$$b_2 = (1/\sqrt{2}) b_{10} \text{th} \gamma z, \quad b_1 = b_{10}/\text{ch} \gamma z, \quad (6.5.43)$$

где

$$\gamma \equiv |\beta| b_{10} / \sqrt{2} = 2 (2\pi/c\overline{n}_1)^{3/2} \omega_1 |\chi| I_{12}^{1/2}. \qquad (6.5.44)$$

Итак, при синхронизме интенсивность второй гармоники $I_{2z}(z)$ монотонно нарастает как th² γz, достигая при γz $\gg 1$ исходной интенсивности накачки $I_{1z}(0)$ (рис. 6.20). Интенсивность накачки при



Рис. 6.20. Генерация второй гармоники: по горизонтали — расстояние (в единицах 1/γ), по вертикали — потоки фотонов накачки и гармоники (в единицах F₁₀). При $\tilde{z} \gg 1$ каждые два фотона накачки превращаются в один фотон с удвоенной частотой 0.20). Интенсивность накачки при этом падает до нуля как $1/ch^2 \gamma z$ при неизменной фазе. При $z = 1/\gamma$ эффективность ГВГ η равна 58% по энергии и 29% по числу фотонов. При $\Delta \neq 0$ или $a_2(0) \neq 0$ монотонные решения сменяются периодическими и η падает.

Практически с помощью мощных импульсных лазеров удается получить η в несколько десятков процентов. Отметим, что синхронная ГВГ в пьезокристаллах имеет важное прикладное значение, позволяя сдвигать частоту лазеров вверх на целую октаву.

Упомянем также гораздо более слабые эффекты, не требующие синхронизма, — $\Gamma B\Gamma$ при отражении от нецентросимметричной среды [34] и некогерентное рассеяние света с частотой 2 ω нецентросимметричными молекулами [35], а также — при учете «магнитного» ангармонизма — любыми молекулами, атомами и свободными электронами (§ 6.2).

Заметим, что принятое выше условие $E_2(+0)=0$ не совсем точно соответствует обычному эксперименту, в котором равно нулю падающее снаружи поле гармоники, а прошедшее и отраженные поля $E_2(+0)$, $E_2(-0)$ отличны от нуля из-за требования непрерывности тангенциальных составляющих полей E_2 , H_2 на границе [34]. Однако практически $E_2(\pm 0)$ весьма малы.

Матрица рассеяния. Параметрическое взаимодействие двух мод в нелинейном слое в приближении заданной накачки приводит к линейной связи между входными и выходными амплитудами, которую в общем случае можно записать в виде

$$a_1 = g_{11}a_{10} + g_{12}a_{20}^*, \quad a_2^* = g_{21}a_{10} + g_{22}a_{20}^*.$$
 (6.5.45)

Коэффициенты g_{ij} образуют двумерную матрицу рассеяния данного образца, зависящую от длины слоя l, поглощения α_i , нелинейности χ , амплитуды накачки a_{30} , волновой расстройки Δ и т. д. При учете отражений от границ слоя она становится четырехмерной, а при учете дифракции (т. е. конечных поперечных размеров A) — бесконечномерной.

Матрица рассеяния должна обладать определенной симметрией, следующей из общих принципов, в частности из соотношений Мэнли — Poy (20). Обмен фотонами между модами в случае, когда падающие поля a_1 и a_2 статистически независимы, описывается энергетической матрицей рассеяния $G_{II} \equiv |g_{II}|^2$:

$$F_1 = G_{11}F_{10} + G_{12}F_{20}, \ F_2 = G_{21}F_{10} + G_{22}F_{20}. \tag{6.5.46}$$

Подстановка (46) в (20) дает

$$(G_{11}-1) F_{10}+G_{12}F_{20}=(G_{22}-1) F_{20}+G_{21}F_{10}.$$

Но F_1 и F_2 можно варьировать независимо, следовательно, матрица рассеяния прозрачного слоя должна удовлетворять связям

$$G_{11} - l = G_{21}, \quad G_{22} - l = G_{12}.$$
 (6.5.47)

Система (28) симметрична по индексам 1, 2, поэтому $G_{11}=G_{22}\equiv G$ и имеется только один независимый элемент энергетической матрицы рассеяния — коэффициент передачи

G. В результате (46) принимает вид

$$F_1 = GF_{10} + (G-1) F_{20},$$

$$F_2 = GF_{20} + (G-1) F_{10}. \quad (6.5.48)$$

^оПараметрическое рассеяние света-Согласно квантовой теории в принципе возможен трехфотонный переход, при котором прозрачное вещество атом или кристалл — поглощает фотон из моды k_3 и излучает пару фотонов в моды k_1 и k_2 , возвращаясь в исходное состояние (рис. 6.21). Вероятность такого перехода пропорциональна (N_1+1) (N_2+1) N_3 , где N_1 — начальные числа фотонов в модах и единицы появляются из-за квантовых флуктуаций амплитуд мод в основном состоя-



Рис. 6.21. Спонтанные многофотонные процессы можно учесть в полуклассической теории добавлением одного лишнего фотона в генерируемых модах (соответствующие стрелки направлены вниз). На рисунке условно изображены прямой и обратный трехфотонные параметрические переходы

нии (гл. 7). Вероятность обратного процесса — с поглощением фотонов в модах k_1 , k_2 и излучением в моде k_3 — пропорциональна $N_1N_2(N_3+1)$. В итоге скорость рождения пар фотонов будет пропорциональна

разности

$$\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = -\dot{N}_3 \sim (N_1 + N_2 + 1) N_3 - N_1 N_2.$$
 (6.5.49 a)

Отсюда в первом порядке по N₃ следует

$$N_1 - N_{10} = N_2 - N_{20} \sim N_{10} + N_{20} + 1.$$
 (6.5.496)

Таким образом, вещество под действием излучения с частотой ω_3 генерирует пары фотонов с частотами ω_1 и $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$, лежащими в широком диапазоне — от нуля до частоты падающего излучения. В случае макроскопического вещества частоты и направления излучения связаны условием синхронизма $k_3 = k_1 + k_2$. Это явление наблюдается в двупреломляющих пьезокристаллах и называется параметрическим рассеянием (ПР) или параметрической люминесценцией [5, 37, 58]. ПР можно трактовать как проявление квантовых шумов параметрического усилителя света.

Коэффициент пропорциональности в (49б) должен соответствовать коэффициенту преобразования $G_{12}=G-1$, найденному выше в (31) в рамках классической нелинейной оптики. Следовательно (ср. (48)),

$$N_{1} = N_{10} + (G - 1) (N_{10} + N_{20} + 1) = GN_{10} + (G - 1) (N_{20} + 1).$$
(6.5.50)

Аналогичное выражение для N₂ получается перестановкой индексов 1, 2. Здесь величина G—1 уже необязательно линейна по интенсивности накачки.

Полученное выражение позволяет сформулировать следующее правило. Для учета спонтанного излучения при классическом описании параметрического усилителя следует во входные холостые ¹) моды добавлять по одному лишнему фотону. Тот же результат согласно (50) получается при более общем преобразовании

$$N_{10} \rightarrow N_{10} + p, \quad N_{20} \rightarrow N_{20} + q, \quad N_1 \rightarrow N_1 + p,$$

где p+q=1, $0 \le p \le 1$. В частности, можно ко всем числам фотонов на моду добавлять по полфотона.

Квантовые шумы согласно (50) дают по *G*—1 фотона в каждой выходной моде параметрического усилителя, где *G* — коэффициент усиления для этой моды. Аналогичный результат (закон Кирхгофа) имеет место для квантового и рамановского усилителей (см. (7.1.7) и (6.4.18)).

Заметим, что из (49а) при $N_2 = N_3 = 0$ следует, что при трехчастотном преобразовании частоты вверх (низкочастотная накачка) квантовые флуктуации отсутствуют. В случае четырехчастотного взаимодействия возможен распад двух фотонов накачки на пару фотонов с частотами ω и $2\omega_3 - \omega$, лежащими в интервале $0 - 2\omega$ (гиперпараметрическое рассеяние или рассеяние света на свете).

Перейдем от чисел фотонов на моду к спектральной яркости. С помощью (50) и (6.4.20) находим при $N_{i0} = 0$ (полагаем $\rho_1 = 0$)

$$I_{\omega\Omega}(\boldsymbol{k}_{1}) = \hbar \omega_{1} F_{\omega\Omega}(\boldsymbol{k}_{1}) = (\hbar \omega_{1}/2\pi\lambda_{1}^{2}) [G(\boldsymbol{k}_{1}) - 1], \qquad (6.5.51)$$

 [«]Холостой» модой по отношению к рассматриваемой «сигнальной» моде с частотой ω₁ называется мода с частотой ω₂==ω₃--ω₁.

где $F_{\omega\Omega} \equiv dF/d\omega d\Omega$ — поток фотонов в направлении k_1 с частотой $\omega_v (k_1)$, приходящийся на единицу телесного угла, площади (перпендикулярной k_1) и круговой частоты. Величина $I_{\omega\Omega}(k, r)$ называется спектральной яркостью (иногда — просто интенсивностью) некогерентного излучения. Напомним, что яркость не меняется в направлении распространения (в случае прозрачной среды).

Итак, интенсивность шумов идеального усилителя, деленная на G-1 (т. е. отнесенная ко входу),

$$I_{\omega\Omega}^{\rm vac} = \hbar \omega / 2\pi \lambda^2 = \hbar \omega^3 n^2 / 8\pi^3 c^2.$$
 (6.5.52)

Эту величину естественно называть интенсивностью нулевых флуктуаций макрополя (с одним типом поляризации) или «спектральной яркостью вакуума», она соответствует присутствию в каждой моде по одному фотону. Интенсивность флуктуаций на единичный интервал длин волн при $\lambda = 1$ мкм и n = 1

$$I_{\lambda\Omega}^{\text{vac}} = |d\omega/d\lambda| I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} = hc^2/\lambda^5 \approx 0.6 \text{ Bt}/(\text{\AA} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{cp}).$$
(6.5.53)

Таким образом, связ: между интенсивностью и числом фотонов на моду имеет вид

$$I_{\omega\Omega}(\boldsymbol{k}) = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} N(\boldsymbol{k}).$$
(6.5.54)

Оценим также яркостную (эффективную) температуру сверхлюминесценции на выходе идеального усилителя. Из формулы Планка (2.5.5) и закона Кирхгофа N = G - 1 следует

$$T_{\mathfrak{s}\mathfrak{\phi}}(\mathbf{k}) \equiv \hbar\omega/\varkappa \ln\left(1+N_k^{-1}\right) = -\hbar\omega/\varkappa \ln\left(1-G_k^{-1}\right) \approx \approx (\hbar\omega/\varkappa) G \sim 10^{\mathfrak{s}} \,\mathrm{K}. \quad (6.5.55)$$

Последняя оценка сделана для $\lambda = 1$ мкм и G = 100.

Подставив (31) и (52) в (51), получим следующее выражение для интенсивности квантовых шумов параметрического усилителя:

$$I_{\omega\Omega}(\mathbf{k}) = I_{\omega\Omega}^{\rm vac} \sin^2 \left[(\gamma^2 - \Delta^2(\mathbf{k})/4)^{1/2} l \right] / (1 - \Delta^2(\mathbf{k})/4\gamma^2), \quad (6.5.56)$$

где *l*—толщина нелинейного слоя, $\Delta(\mathbf{k})$ —отклонение от синхронизма для моды \mathbf{k} и $\gamma \sim \chi^{(2)}E_3$ (см. (28)). Согласно (56) интенсивность ПР имеет резкий максимум на частотах и направлениях { ω , ϑ , φ }, удовлетворяющих условию синхронизма $\Delta \mathbf{k} = 0$.

Это условие определяет частотно-угловой спектр ПР $\omega(\vartheta)$, где ϑ — угол рассеяния, т. е. угол между наблюдаемым волновым вектором k и вектором накачки k_3 . Зависимость частоты от угла φ , как правило, можно не учитывать, т. е. спектр ПР обладает осевой симметрией относительно направления k_3 . Поле с данной частотой ω излучается вдоль конуса под определенным углом $\vartheta(\omega)$. Как видно из рис. 6.22, частотный спектр ПР при накачке в синей области спектра перекрывает широкую область в ИК и видимом диапазонах. Видимое излучение на-

правлено преимущественно вперед, под углами, не превышающими нескольких градусов, что связано с небольшой величиной двупреломления кристаллов в области прозрачности.

При приближении холостой частоты к собственным частотам решетки кристалла, которые лежат обычно в области сотен обратных сантиметров, ПР непрерывно переходит в комбинационное рассеяние на поляритонах и оптических фононах. При этом χ резонансно возрастает за счет вклада электронно-ядерного ангармонизма (§ 6.2), но одновременно растет и линейное поглощение на холостой частоте α_2 , так



Рис. 6.22. Частотно-угловой спектр параметрического рассеяния в ниобате лития при различных длинах волн накачки λ_3 : ϑ_1 — угол конуса, вдоль которого излучается волна λ_1 . Угол θ_3 между лучом накачки и осью кристалла равен 90°. При уменьшении θ_3 разрыв в спектре (для $\lambda_3 < 0.53$ мкм) исчезает

что интегральная по частоте яркость I_{Ω} меняется мало. Конечно, при малых холостых частотах и $\alpha_2 l \gg 1$ (56) следует умножить на $\mathcal{N}(\omega_2/T) + +1$, где T — температура решетки и \mathcal{N} — функция Планка.

ПР, как и рассеяние на поляритонах, можно определить как рассеяние света накачки на флуктуациях поля в холостых модах, т. е. как рассеяние света на свете, аналогично тому, как рассеяние Мандельштама — Бриллюэна является рассеянием света на звуке.

Существенными особенностями явления ПР, отличающими его от других видов рассеяния света в веществе, является, во-первых, широкий непрерывный спектр, не связанный непосредственно с собственными частотами вещества, и, во-вторых, двухфотонный характер излучения — при слабой накачке (үl<ll) сигнальные и холостые фотоны излучаются только парами, практически одновременно.

Отметим, что кроме когерентного (направленного вперед) излучения возможно некогерентное ПР на отдельных нецентросимметричных молекулах (точнее, на флуктуациях плотности и ориентации таких молекул). При этом условие синхронизма не играет существенной роли, так как дефицит импульса поля забирает молекула.

Пусть $\gamma l \ll 1$ и $n \approx 1$, тогда из (56) находим интенсивность спонтанного ПР (СПР) в направлении **k** и с частотой ω (**k**):

$$I_{\omega\Omega}(\boldsymbol{k}) = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} \gamma^2 l^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\Delta(\boldsymbol{k}) l/2 \right] = 4\hbar c^{-5} \omega^4 \tilde{\omega} \chi^2 l^2 I_{30} \operatorname{sinc}^2 \left[\Delta(\boldsymbol{k}) l/2 \right], \quad (6.5.57)$$

где $\omega \equiv \omega_{s} - \omega$ и подразумеваются фиксированные индексы поляризации, для которых Δ минимально. Обратим внимание, что интенсивность СПР в направлениях точного синхронизма зависит от толщины нелинейного слоя квадратично, что характерно для СПР. Пусть $I_{s0} = 1 \text{ Вт/см}^2$ и l = 1 см, тогда усиление в направлении синхронизма имеет порядок $G = 1 + \gamma^2 l^2 \sim 1 + 10^{-7}$ (см. оценку после (25)) и из (55) при $\lambda = 0.5$ мкм следует $T_{s\phi} \sim 1800$ К. Такое излучение легко наблюдается невооруженным глазом и имеет вид цветных колец. Заметим, что фактический коэффициент передачи образца G' при такой накачке всегда меньше единицы из-за потерь на отражение, поглощение и рассеяние.

Эффективная частотная ширина спектра СПР $\Delta \omega$ при фиксированном направлении наблюдения определяется, как и полоса параметрического усиления, шириной синхронизма, т. е. условием $\Delta l = \pm \pi$. Если ограничиться линейным разложением функции $\Delta(\omega)$, то

$$\Delta \omega = (2\pi/l) \left| \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|^{-1} \approx 2\pi/|\tau_1 - \tau_2|, \qquad (6.5.58)$$

где $\tau_i \equiv l/u_i$. Согласно последней формуле, справедливой при коллинеарном синхронизме и $\omega_1 \neq \omega_2$, ширина спектра СПР (в герцах) равна обратному времени запаздывания (в секундах) сигнального фотона относительно холостого при пересечении области взаимодействия. Обычно $\Delta \omega/2\pi c \approx 10 \,\mathrm{cm}^{-1}$ при $l = 1 \,\mathrm{cm}$.

При $\gamma l \gg 1$ (56) описывает параметрическую сверхлюминесценцию, или вынужденное параметрическое рассеяние (ВПР). Согласно приведенным оценкам ВПР наблюдается при импульсной накачке с интенсивностью порядка 100 МВт/см² и выше. Конечно, ВПР практически имеет место (как и параметрическая генерация) лишь в продольном направлении ($\vartheta \sim 0$) на частотах коллинеарного синхронизма $\omega_i(0)$. Дело в том, что, как следует из геометрии, эффективная длина взаимодействия $l_{\mathfrak{s}\Phi}$ в случае узкого пучка накачки ($a/l \ll 1$) резко сокращается (как $a/\sin \vartheta$) при $\vartheta \gg a/l$. Общую мощность излучения ВПР можно представить в виде

$$\mathcal{P} = I_{\omega\Omega} \Delta \omega \Delta \Omega A = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} e^{2\gamma t} \Delta \omega \Delta \Omega A/4, \qquad (6.5.59)$$

где мы ввели эффективные полосу частот, телесный угол и сечение (ср. оценку \mathcal{P} для ВКР (6.4.22)). ВПР используется, как и параметрическая генерация, для регулируемого сдвига частоты лазерного излучения.

^оРассеяние света на поляритонах описывается системой (15) — (17) при добавлении в одно из уравнений линейного поглощения. В приближении заданной высокочастотной накачки взаимодействие стоксовой (сигнальной) и поляритонной (холостой) волн определяется уравнениями

$$da_1/dz = i\gamma a_2^* e^{i\Delta z}, \tag{6.5.60a}$$

$$da_2/dz \pm \delta a_2 = \pm i\gamma a_1^* e^{i\Delta z}, \qquad (6.5.606)$$

где $\delta \equiv \alpha_2/2$, $\gamma = \beta a_{30}$ (см. (28)) и нижние знаки соответствуют встречной холостой волне. В поляритонной области спектра, т. е. вблизи собственных частот решетки, холостая волна сильно поглощается, так

¹/₂7 Д. Н. Клышко

что обычно δ≫|γ|, δ*l*≫1 и амплитуда холостой волны определяется локальной амплитудой сигнальной волны.

В связи с этим будем искать решение (60б) в виде $a_2(z) = b_2 \exp(i\Delta z)$:

$$db_2/dz \pm \delta b_2 + i\Delta b_2 = \pm i\gamma a_1^*. \tag{6.5.61}$$

Здесь производная db_2/dz не превышает по порядку величины $|\gamma b_2|$, поэтому если $|\gamma| \ll |\delta + i\Delta|$, то ею можно пренебречь. При этом $b_2 = i\gamma a_1^*/(\delta \pm i\Delta)$. (6.5.62)

В этом приближении падающее холостое поле из-за сильного поглощения, которое много сильнее параметрического усиления, не сказывается на выходном поле. Подставив (62) в (60а), получаем

$$da_1/dz = (g/2) a_1, (6.5.63)$$

$$g = 2 |\gamma|^2 / (\delta \mp i\Delta) = 64\pi^3 \omega_1 \omega_2 |\chi^{(2)}|^2 I_{30} / c^3 \overline{n_1 n_2 n_3} (\delta \mp i\Delta).$$

Итак, сильное поглощение одной из двух взаимодействующих волн приводит к экспоненциальному закону нарастания — как и в случае обычного рамановского взаимодействия за счет $\chi^{(3)}$ (§ 6.4) с тем лишь отличием, что здесь существенно условие синхронизма в виде $|\Delta| \ll \delta$.

Сравнивая g при $\Delta = 0$ с показателем рамановского усиления (6.4.17) при учете определения α_2 (6.3.18), находим эквивалентную кубическую восприимчивость (полагаем $n_1 = 1$):

$$\chi_{_{9KB}}^{(3)''} = - |\chi^{(2)}|^2 / \chi^{(1)''}. \qquad (6.5.64)$$

Такая же связь между резонансными восприимчивостями первого, второго и третьего порядков следует и из микротеории [37].

Интенсивность стоксова поля $I_{\omega\Omega}(k_1)$ при спонтанном или вынужденном рассеянии на поляритонах легко определить с помощью закона Кирхгофа:

$$I_{\omega\Omega}(\mathbf{k}_{1}) = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}}[\mathcal{N}(\omega_{2}/T) + 1] \{ \exp[g'(\mathbf{k}_{1})z] - 1 \}, \quad (6.5.65)$$

или сразу воспользовавшись результатами § 6.4. Заметим, что если под a_2 понимать амплитуду звуковой волны, то проведенный анализ будет описывать рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (СРМБ и ВРМБ).

Четырехволновые взаимодействия. В центросимметричных средах квадратичная макроскопическая восприимчивость $\chi^{(2)}$ равна нулю, и поэтому простейший параметрический процесс включает в себя взаимодействие четырех мод поля за счет кубической восприимчивости $\chi^{(3)}(\omega_4 = \omega_3 + \omega_2 + \omega_1)$. При соответствующем квантовом переходе излучаются или поглощаются четыре фотона при неизменном состоянии вещества.

Наиболее важными четырхволновыми параметрическими эффектами являются (рис. 6.23) генерация комбинационных частот (например, третьей гармоники) для преобразования лазерного излучения в УФи ИК-диапазоны, когерентное антистоксово рассеяние света (КАРС), обращение волнового фронта (ОВФ). Отметим еще трехволновые эффекты за счет $\chi^{(3)}(\omega_4 = \omega_3 + \omega_2 + 0)$ в постоянном поле E_0 , которое нарушает центральную симметрию среды.

При преобразовании частоты «работает» обычно электронный ангармонизм, при КАРС — смешанный электронно-ядерный (плачековский) ангармонизм, при ОВФ, как и при самофокусировке, инерционные ориентационный и стрикционный ангармонизмы (§ 6.2).



Рис. 6.23. Основные типы четырехволновых однорезонансных параметрических процессов и области их применения: *a*, *б*) генерация когерентного УФ- и ИК-излучений; *в*) когерентное антистоксово рассеяние света (активная или КАРС-спектроскопия); *г*) обращение волнового фронта

Заметим, что в эффекте ОВФ, который подробнее будет описан ниже, все частоты вырождены, как и при непараметрических взаимодействиях. Тем не менее мы относим его к классу параметрических, поскольку он сохраняет энергию поля и приводит к когерентному возбуждению новых мод с условием синхронизма $k_1+k_2=k_3+k_4=0$.



Рис. 6.24. Условия синхронизма при четырехволновых взаимодействиях: *a*) при генерации УФ-излучения обычно используется коллинеарный синхронизм; *б*) при КАРС все частоты близки и синхронизм выполняется при небольших углах рассеяния *b*; *в*) в общем случае при преобразовании частоты вида $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$ условие синхронизма имеет вид $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, при этом волновые векторы могут быть некомпланарны—четырехугольник синхронизма можно сгибать по штриховым линиям; *г*) при эффекте ОВФ все честоты равны и синхронизм выполняется для двух произвольно ориентированных стоячих волн

Коллинеарный синхронизм при преобразовании частоты в газах обеспечивается за счет аномальной дисперсии (при этом удобно использовать смеси газов). При КАРС во многих конденсированных веществах имеет место неколлинеарный синхронизм с углами рассеяния порядка 1° (в случае двухлучевой накачки, рис. 6.24).

В упоминавшихся до сих пор эффектах в падающем (входном) поле в общем случае возбуждены три моды ($N_{i0} \neq 0$, i=1, 2, 3), а в выход-

7*

ном (рассеянном) поле появляются «новые» фотоны в четвертой моде $k_4(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \rightarrow \omega_4)$. Такие эффекты можно назвать вынужденными, они адекватно описываются классической электродинамикой. Кроме того, возможны спонтанные эффекты, при которых накачка в общем случае двухмодовая: $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3 + \omega_4$. При этом фотоны в выходных модах 3, 4 появляются одновременно (парами) за счет спонтанно-вынужденных переходов (ср. параметрическое рассеяние света). Такие процессы, к которым относится гиперпараметрическое рассеяние (или рассеяние света на свете) и «спонтанный КАРС», описываются нелинейной квантовой оптикой и, в некоторых случаях, формулами типа закона Кирхгофа [37].

Нелинейная спектроскопия. Модуль $\chi^{(3)}$ и соответственно эффективность четырехволновых параметрических взаимодействий резко возрастают в областях промежуточных резонансов, когда один из виртуальных уровней совпадает с реальным (рис. 6.23). Наиболее интересны двухфотонные резонансы типа $\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3 \pm \omega_4 \approx \Omega_0$, при которых ни накачка, ни выходное поле не поглощаются за счет однофотонных резонансов.

Наблюдение резонансов $\chi^{(3)}$ лежит в основе ряда новых методов нелинейной спектроскопии, важнейшим из которых является, пожалуй, метод активной спектроскопии, использующий КАРС [39, 45].



Рис. 6.25. Схема активной спектроскопии. Вещество возбуждается двумя лазерами с частотами ω_1 и ω_2 такими, что $\omega_1 - \omega_2$ равно частоте молекулярных колебаний Ω_0 . Резонанс можно регистрировать по изменению интенсивности I_i , поляризации или фазы на любой из четырех частот при перестройке ω_1 или ω_2

Схема нелинейного спектроскопа для изучения дисперсии $\chi^{(3)}$ представлена на рис. 6.25. В нем используются два лазера с частотами ω_1 , ω_2 (пусть $\omega_1 > \omega_2$), причем частота одного из них, например ω_2 , перестраивается в области $\omega_1 - \Omega_0$, где Ω_0 – частота исследуемого молекулярного колебания. При $\omega_2 = \omega_1 - \Omega_0$ частотные компоненты кубической восприимчивости $\chi(\omega_1 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_2)$, $\chi(\omega_2 = \omega_2 - \omega_1 + \omega_1)$, $\chi(\omega_A = 2\omega_1 - \omega_2)$, $\chi(\omega_S = 2\omega_2 - \omega_1)$ испытывают резонанс (см. (6.2.56)), вызванный раскачкой колебаний атомов в молекуле бигармоническим светом за счет взаимного влияния электронных и ядерных степеней свободы молекулы (§ 6.2).

В случае активной спектроскопии резонанс регистрируется по изменению интенсивности на «новых» частотах ω_A или ω_S (удобнее использовать антистоксову область ω_A , где меньше паразитная засветка из-за люминесценции образца и элементов оптического тракта). Согласно (8) в приближении заданных накачек и плоских волн интенсивность КАРС

$$I_{A}(\omega_{2}) = \left(\frac{4\pi}{c}\right)^{4} \frac{\omega_{A}^{2}l^{2}l_{1}^{2}l_{2}}{n_{1}^{2}n_{2}n_{A}} |\chi_{NR}^{(3)} + \chi_{R}^{(3)}(\omega_{A} = 2\omega_{1} - \omega_{2})|^{2}, \quad (6.5.66)$$

где мы выделили нерезонансную вещественную часть $\chi_{NR}^{(3)}$, слабо зависящую от частоты и вызывающую асимметричную форму наблюдаемого спектра. Активная спектроскопия обладает рядом преимуществ перед обычной рамановской спектроскопией по чувствительности, разрешению, дополнительной информации. Заметим, что применение перестраиваемых лазеров исключает необходимость в диспергирующих элементах.

В случае спектроскопии рамановского усиления регистрируется приращение интенсивности ΔI_2 на выходе, равное согласно (6.4.17)

$$\Delta I_{2}(\omega_{2}) = -\frac{32\pi^{2}\omega_{2}II_{1}}{c^{2}n_{1}n_{2}} \operatorname{Im} \chi^{(3)}(\omega_{2} = \omega_{2} - \omega_{1} + \omega_{1}). \quad (6.5.67)$$

Можно также наблюдать уменьшение при резонансе интенсивности I_1 поля с большей частотой ω_1 . Это явление называется обращенным эффектом Рамана.

Возможны и другие методы регистрации — по изменению набега фазы падающих полей ω_1 или ω_2 , пропорционального Re $\chi^{(3)}$, (метод рамановского эффекта Keppa) или по изменению поляризационных характеристик полей ω_i , i=1, 2, 3, 4 (нелинейная эллипсометрия) [39].

Все эти методы нелинейной спектроскопии вместе с рассмотренными в § 6.4 двухфотонной спектроскопией и спектроскопией насыщения существенно дополнили традиционную долазерную спектроскопию, использовавшую в основном лишь линейные эффекты и спонтанное рамановское рассеяние. Существенное расширение возможностей спектроскопии за счет использования лазеров вместе с достижениями нелинейной спектроскопии позволяют говорить о «лазерной революции» в спектроскопии.

Динамическая голография и обращение волнового фронта. Идея метода обращения волнового фронта (OBФ) с помощью четырехволнового взаимодействия ясна из рис. 6.24, г и 6.26. Пусть в среде с кубической нелинейностью $\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$ имеется монохроматическая стоячая волна накачки (или «опорная» волна по голографической терминологии), т. е. $k_2 = -k_1$, тогда при падении на среду третьей плоской волны k_3 с той же частотой ω и произвольным направлением возникнет четвертая волна с частотой ω и волновым вектором $k_4 = k_1 + k_2 - k_3 =$ $= -k_3$. Таким образом, возбужденная накачкой среда служит своеобразным зеркалом, отражающим все плоские волны обратно по пути их прихода (в отличие от обычного зеркала с законом преобразования $k_z \rightarrow -k_z$).

7* Д. Н. Клышко

В случае произвольного пространственного распределения $E_3(r)$ сигнального (или *предметного*) поля оно будет содержать множество фурье-компонент $\{k_3\}$, каждая из которых порождает свою обратную компоненту. В результате вокруг среды «восстановится» исходная пред-



Рис. 6.26. Обращение волнового фронта с помощью вырожденного четырехволнового взаимодействия. Нелинейное вещество, возбужденное стоячей волной накачки, «отражает» обратно все волны той же частоты по пути их прихода. В результате расходящаяся сферическая волна превращается в сходящуюся к источнику волну (штриховая линия) метная волна $RE_3^*(r)$ с той жеформой волновых фронтов, но распространяющаяся в противоположном направлении (от среды) и имеющая, конечно, другую энергию ($R \neq 1$). Существенно, что за счет эффекта параметрического усиления при встречном взаимодействии (см. (33)) |R| может существенно превышать единицу (обычно это достигается лишь в импульсном режиме).

Возможность в случае произвольного оптического поля эффекта ОВФ, изменяющего в некотором смысле знак времени ¹), кажется неожиданным с точки зрения линейной оптики. По существу, этот эффект в оптическом диапазоне обнаружил в 1949 г.— задолго до рожде-

ния лазеров и нелинейной оптики — автор идеи голографии Габор. Проявлением ОВФ в голографии являются изображения-двойники, которые рассматривались Габором лишь как источники помех. Возможности практического применения ОВФ были поняты лишь много позднее, в основном в семидесятые годы, когда были разработаны и практические методы динамической голографии и ОВФ в «реальном масштабе времени», т. е. без задержки на проявку фотопленки. В этих методах используются, кроме четырехволнового параметрического взаимодействия, эффекты трехволнового вырожденного взаимодействия, вынужденного рассеяния на 180° и сверхлюминесценции [46, 47]. Были развиты также методы ОВФ акустических волн.

ОВФ является примером методов *адаптивной оптики*, ставящей задачу автоматической коррекции оптических систем. Эффект ОВФ позволяет исправить искажения формы волнового фронта (т. е. фазовые искажения), возникающие при прохождении сигнальной волны через оптически неоднородную среду, например матовое стекло, или квантовый усилитель. Для этого достаточно на выходе неоднородной среды отразить волну назад «обращающим зеркалом» и заставить ее тем самым проделать весь путь в обратном направлении. При этом все образовавшиеся изгибы фронта «выпрямятся» и фронт восстановит исходную форму (рис. 6.27, *a*). (Конечно, амплитудные искажения, вызванные необратимым поглощением или усилением, при этом не

¹) ОВФ эквивалентно преобразованию $t \rightarrow -t$ лишь для строго монохроматического поля. В случае же квазимонохроматического поля форма огибающей $E_0(t)$ при ОВФ не меняется.

компенсируются, а накапливаются). Этот эффект позволяет увеличивать с помощью мощных, но неоднородных усилителей энергию слабых лазеров, дающих одномодовые пучки с предельно малой (дифракционной) расходимостью и «естественной» немонохроматичностью. При этом достигаются рекордные значения спектральной яркости излучения.

Другое применение ОВФ, важное для решения проблемы лазерного термоядерного синтеза, — автоматическая фокусировка мощного излучения на малые мишени (рис. 6.27, *б*).

Использование резонансной восприимчивости $\chi^{(3)}$ (в частности, при двухфотонном резонансе в парах щелочных металлов) позволяет сни-

зить требования к мощности накачки при четырехволновых взаимодействиях (до 1 Вт/см² при коэффициенте отражения $|R|\approx 1$).

При ОВФ с помошью вынужденного рассеяния достаточно мощная монохроматическая волна Re $E(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ служит накачкой, вызываюшей в нелинейной среде эффект ВКР или ВРМБ с углом рассеяния около 180°. Если волновой фронт накачки — достаточно неровный, то рассеянное назад стоксово излучение Re $E_s(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_s t)$ (где $\omega_s = \omega - \Omega_0$) имеет примерно ту же форму волновых фронтов: $E_{s}(\mathbf{r}) \approx RE^{*}(\mathbf{r})$, где |R|близко к единице.

На первых этапах обратного рассеяния (при $z \le l$) стоксово поле имеет хаотический характер, в нем независимо и равномерно возбуждены все моды с различными по направлению волновыми векторами k (поскольку их длина $k=n(\omega_S)\omega_S/c$ фиксирована, то моды задаются



Рис. 6.27. Примеры использования эффекта ОВФ: a) для коррекции искажений волнового фронта; плоский фронт падающей слева волны при прохождении через неоднородную среду становится неровным, однако после отражения от «обращающего зеркала» и вторичного прохождения через среду снова восстанавливает исходную форму (при отражении от обычного зеркала искажения удвоились бы); б) для фокусировки мощного лазерного излучения на малые мишени; свет маломощного лазера (вверху) рассеивается на мишени, часть рассеянного поля усиливается мощным усилителем, отражается от «зеркала», еще раз усиливается и снова сходится к мишени

поперечной компонентой $k_{\perp} \equiv q$). В случае многомодовой накачки различные стоксовы моды (q, ω_s) имеют различные коэффициенты рамановского усиления $\alpha(q)$, причем можно показать [46], что если какая-либо мода (q, ω) присутствует в спектре накачки, то стоксова мода $(-q, \omega_s)$ имеет в среднем вдвое больший коэффициент усиления: $\alpha(-q) \approx 2\overline{\alpha}$. Вследствие экспоненциального характера усиления этого отличия при αl≫1 достаточно, чтобы часть стоксова поля, повторяющая спектр накачки, значительно превышала по интенсивности шумовую часть.

Преимуществами «бриллюэновского» или «рамановского» зеркал являются отсутствие накачки (это аналог безопорной голографии) и практически 100%-ная эффективность, а недостатками — пороговый характер эффекта, необходимость в многомодовости сигнального поля и сдвиг частоты при отражении. Последняя особенность ограничивает точность восстановления. Большой интерес представляют лазеры, в которых одно из зеркал является обращающим («бриллюэновским»), а второе — обычным, плоским или сферическим. При этом одновременно осуществляется модуляция добротности (за счет порогового характера вынужденного рассеяния) и компенсация оптической неоднородности активного элемента.

Рассмотрим несколько подробнее ОВФ при четырехволновом взаимодействии. Произвольное поле сигнала можно представить в виде (для простоты считаем поле скалярным)

$$E(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} E_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = |E_0(\mathbf{r})| \cos [\omega t + \varphi(\mathbf{r})]. \quad (6.5.68)$$

Обращенное поле, описывающее монохроматические волны с обратным направлением движения волновых фронтов, по определению отличается знаком времени:

$$\tilde{E}(\boldsymbol{r}, t) \equiv E(\boldsymbol{r}, -t). \tag{6.5.69}$$

Амплитуду и фазу обращенного поля определим аналогично (68):

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \vec{E}_{0}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = |\vec{E}_{0}(\mathbf{r})| \cos [\omega t + \tilde{\varphi}(\mathbf{r})]. \quad (6.5.70)$$

Конечно, практическая реализация преобразования $E \rightarrow \tilde{E}$ возможна лишь при отсутствии необратимых процессов. Из (68)—(70) находим связи между спектральными амплитудами прямого и обращенного полей:

$$\tilde{E}_{0}(\boldsymbol{r}) = E_{0}^{*}(\boldsymbol{r}), \quad \tilde{\varphi}(\boldsymbol{r}) = -\varphi(\boldsymbol{r}).$$
(6.5.71)

Следовательно, волновые поверхности монохроматических полей, определяемые уравнениями $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ и $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}) = \text{const}$, совпадают. Таким образом, при эффекте ОВФ обращаются не фронты, а направления их распространения ¹). Заметим, что при отражении в обычном плоском, сферическом или более сложном зеркале также происходит преобразование $E \rightarrow \tilde{E}$, но лишь в тривиальных случаях, когда поверхность зеркала совпадает с волновой поверхностью.

Обращенное поле \tilde{E} копирует сигнальное во всем пространстве вне линейной среды, включая находящиеся там прозрачные и рассеивающие тела произвольной формы (при условии, конечно, что рассеянное поле попадает в апертуру «зеркала» — см. рис. 6.26). Однако, как уже

Часто вместо ОВФ используют термины: «фазовое сопряжение оптического поля» или «воспроизведение волнового фронта».

отмечалось, при наличии истинного, необратимого поглощения (или усиления) восстанавливаются лишь фазовые поверхности, амплитуда обращенного поля будет снова уменьшаться при обратном прохождении через поглотитель (или усиливаться усилителем).

Пусть в среде, которую для простоты полагаем изотропной, возбуждено поле сигнала Re $E_3 \exp(-i\omega_3 t)$ и поле накачки Re $E_1 \exp(--i\omega_1 t)$. Электромагнитное поле в среде сопровождается полями другой природы, например полями давления p(r, t), температуры, колебаний молекул, возбужденных электронов и т. д. (§ 6.2). В фотоматериалах образуются «поля» металлического серебра или других продуктов фотохимических реакций. В простейших случаях амплитуды этих полей пропорциональны постоянной или медленно меняющейся части локального квадрата поля $\overline{E^2(r, t)}$. Например, за счет оптической электрострикции

$$p(\mathbf{r}, t) \sim \operatorname{Re} E_1(\mathbf{r}) E_3^*(\mathbf{r}) \exp[i(\omega_3 - \omega_1)t].$$
 (6.5.72)

Поле давления (72) является объемной голограммой, оно содержит при известном поле накачки полную информацию о сигнале. Конечно, запись давлением после выключения сигнала быстро — за время релаксации λ/v (v — скорость звука) — сотрется (в отличие от полей фотохимических реакций), но зато столь же быстро установится при изменении сигнала. В случае монохроматических полей с одинаковой частотой p(r) является статическим полем, материализующим пространственное распределение интерференционного поля $E_1(r) E_3^*(r)$. Описанная простая модель иллюстрирует идею динамической голографии, которая используется для изучения быстропротекающих процессов.

Запись (72) можно воспроизвести с помощью второй опорной волны Re $E_2 \exp(-i\omega_2 t)$, которая будет рассеиваться на поле $\Delta n(t, t)$ показателя преломления, вызванного полем давления. Иначе говоря, в «считывающем» поле E_2 возникает поляризация, пропорциональная pE_2 , и излу чаемое ею поле

$$E_4(\mathbf{r}) \sim P_4(\mathbf{r}) = \chi^{(3)} E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) E_3^*(\mathbf{r}), \qquad (6.5.73)$$

где $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$. Связь E_4 и P_4 в борновском приближении дается формулами (7), (10). Из (73) видно, что если произведение E_1E_2 слабо зависит от r, то будет иметь место эффект ОВФ: $E_4 \sim E_3^* = \tilde{E}_3$. В частности, это достигается в случае плоской монохроматической стоячей накачки, когда $\omega_2 = \omega_1$ и $k_2 = -k_1$. Отметим, что в обычной, статической голографии из-за инерционности нелинейности необходимо, чтобы $\omega_1 = \omega_3$ и $\omega_2 = \omega_4^{-1}$).

Заметим, что при трехволновом взаимодействии также можно получить ОВФ:

$$P_4(\mathbf{r}) = \chi^{(2)} E_1(\mathbf{r}) E_3^*(\mathbf{r}). \tag{6.5.74}$$

¹) В случае объемной (kl≥1) голограммы (как статической, так и динамической) из условия синхронизма (рис. 6.24, в) следует равенство всех четырех частот.

Однако при этом обращается лишь часть поля сигнала E_3 , частотный и угловой спектр которой лежит в полосе синхронизма $|\Delta \mathbf{k}| l < 1$ ($\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4$), что приводит к потере тонких пространственных и временных деталей сигнала. Кроме того, обращенное поле E_4 распространяется «вправо» (как и поле сигнала), и для его поворота нужно дополнительное зеркало. Большим преимуществом четырехволнового взаимодействия является возможность получения с помощью стоячих плоских волн автоматического синхронизма.

Оценим эффективность ОВФ |R| с помощью вырожденного ($\omega_i = \omega$) взаимодействия в одномерном (бездифракционном) приближении в режиме заданной накачки. Для этого используем уравнения (32) для встречного взаимодействия при очевидной замене частотных индексов. Из (33) при z=0 находим отношение отраженной и падающей амплитуд в модах — k и k:

$$|R| = |E_4(-\mathbf{k})/E_3(\mathbf{k})| = \operatorname{tg} \gamma l, \qquad (6.5.75)$$

где согласно (24) (при замене $\chi^{(2)} \rightarrow \chi^{(3)}E_{2}$ и $E_{1} = E_{2}$)

$$\gamma = \frac{2\pi\omega}{cn} |\chi^{(3)}E_1E_2| = \frac{32\pi^3}{cn^2\lambda_0} |\chi^{(3)}| I_1.$$
(6.5.76)

Пусть $\chi^{(3)} = 10^{-12} \text{ см}^3$ /эрг, l = 1 см, $\lambda_0 = 1 \text{ мкм}$, n = 1,5, тогда $\gamma l = 1$ при $I_1 \approx 1 \text{ ГВт/см}^2$.

Существенно, что при $\gamma l = \pi/2$ коэффициент преобразования обращается в бесконечность, поля E_3 , E_4 при этом возникают спонтанно. Таким образом, стоячая волна в кубической среде обладает неустойчивостью по отношению к параметрической генерации встречных волн — наряду с неустойчивостями бегущих волн по отношению к самофокусировке, самомодуляции и вынужденным рассеяниям. Заметим, что при $\gamma l = 1$ самофокусировка согласно (6.4.29) будет несущественна при

$$a^2 \ll \mathcal{P}_0/I = \lambda l/4, \tag{6.5.77}$$

т. е. при сильной дифракционной расходимости накачки на длине слоя (при этом нарушается и применимость одномерного приближения).

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОПТИКА

В классической электродинамике напряженность электрического поля $E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = E(x)$, $x = \{\mathbf{r}, t, \alpha\}$, полагается детерминированной величиной, измеримой, в принципе, со сколь угодно большой точностью (мы говорим лишь об электрическом поле, поскольку обычно оно определяет наблюдаемые эффекты).

В классической статистической оптике, важным прикладным разделом которой является теория когерентности, E(x) для каждого x рассматривается как случайная величина, при этом х играет роль параметра. Удобно, разбив пространство — время на нумерованные ячейки, считать х дискретным параметром, пробегающим счетное множество значений x₁. Таким образом, флуктуирующее световое поле описывается совокупностью случайных величин $E_i = E(x_i)$ (другой способ «дискретизации» поля — разложение по модам — описан в § 7.3). Все свойства ансамбля случайных множеств {Е₁} задаются многомерной функцией распределения или набором моментов (корреляционных матриц) $\langle E_1 E_2, \dots, E_m \rangle$ всевозможных порядков *m* (угловые скобки означают усреднение с помощью функции распределения). В эксперименте усреднение производится, конечно, не по ансамблю полей, а по некоторому пространственному и временному интервалу V лет. Кроме того, одновременно происходит фильтрация поля по частоте и по направлениям распространения.

Макроскопические уравнения Максвелла с точки зрения статистической оптики — это кинетические уравнения для первых моментов $\langle E_i \rangle$, $\langle H_i \rangle$. Интенсивность света и его спектр определяются вторыми моментами $\langle E_i E_i \rangle$, а *n*-квантовые процессы — моментами порядка 2*n*.

Однако классическая статистика в оптическом диапазоне, строго говоря, неприменима, поскольку параметр вырождения $\langle N \rangle = = [\exp(\hbar \omega / \kappa T_{s\phi}) - 1]^{-1}$ (имеющий смысл среднего числа фотонов в одной моде или спектральной яркости $I_{\omega\Omega}$ в единицах $\hbar c / \lambda^3 = I_{\omega\Omega}^{vac}$) обычно много меньше единицы. Например, для зеленых лучей солнечного света ($T_{s\phi} \approx 6000$ K, $\lambda \approx 0,5$ мкм) $\langle N \rangle \approx 0,01$ и лишь в ИК-диапазоне при $\lambda = 3,5$ мкм достигает единицы. К немногим исключениям с $\langle N \rangle \gg 1$ относятся лазерные поля, для которых эффективная (яркостная) температура $T_{s\phi}$ на много порядков превышает солнечную. Отметим в связи с этим один из парадоксов в истории физики: квантовая оптика начала интенсивное развитие лишь в лазерную эпоху, когда появились световые поля с $\langle N \rangle \gg 1$ (хотя общие принципы квантовой электродинамики были разработаны намного раньше). В квантовой оптике (и электродинамике) ансамбль полей задается волновой функцией Ψ или оператором плотности ρ . Угловые скобки в определении функции корреляции теперь означают операцию квантового усреднения с помощью Ψ или ρ , при этом величины E_i являются операторами, действующими по определенным правилам на Ψ . Существенно, что в общем случае поля в соседних точках пространства времени не коммутируют, что приводит к квантовым флуктуациям поля, к отличным от нуля моментам $\langle E_i E_j \rangle$ даже в вакууме, к спонтанному излучению возбужденных атомов и шумам квантовых усилителей и генераторов.

Статистическая теория излучения лазеров определяет их важнейшие параметры, например максимально достижимые монохроматичность генераторов и чувствительность усилителей. Такая теория должна основываться, как и последовательная теория теплового излучения нагретых тел, на квантовой электродинамике и неравновесной термодинамике [48, 49]. Дополнительная трудность квантовостатистического анализа лазера состоит в принципиальной роли нелинейности, определяющей за счет эффекта насыщения стационарную амплитуду колебаний (предельный цикл классического автогенератора).

Важнейшим достижением нелинейной квантовой теории лазера [13, 50—53] является вывод о том, что поле в резонаторе лазера, работающего при большом превышении накачки над пороговой, находится в когерентном состоянии (последнее понятие было введено в квантовую оптику Глаубером [54]). Между полем в когерентном состоянии с большой амплитудой и классическим гармоническим колебанием существует тесная аналогия, и поскольку эффект насыщения проявляется лишь при больших амплитудах поля, то нелинейный режим лазера достаточно точно описывается полуклассической теорией. Нелинейные теории предсказывают все статистические характеристики лазерного излучения: интенсивность, ширину спектра, радиус когерентности, высшие моменты.

Еще более грубое, но тем не менее полезное приближение дает линейная теория шумов квантовых усилителей и генераторов (§ 7.1), игнорирующая эффект насыщения и пригодная поэтому лишь ниже порога самовозбуждения. Важнейшие результаты этой теории — закон Кирхгофа, выражающий интенсивность шума усилителя через его коэффициент усиления, и формула Таунса, связывающая «естественную» ширину линии генератора с его мощностью. Согласно линейной теории излучение имеет гауссову статистику, и поэтому эти параметры — интенсивность и ширина спектра — полностью определяют статистику поля.

Настоящая глава посвящена основам квантовой оптики. Изложение начинается с линейной теории шумов квантовых усилителей, не требующей квантования поля (§ 1). В § 2 рассмотрены основные понятия классической статистической оптики. Следующий раздел (§ 3) посвящен предварительному этапу квантования поля — представлению уравнений Максвелла в канонической форме, после чего само квантование проводится уже без труда (§ 4). В § 5 рассмотрены основные классы возможных состояний поля, а в § 6 — статистика фотонов и фотоэлектронов в этих состояниях. Наконец, в § 7 мы снова возвращаемся к вопросу о вероятности перехода в шумовом поле (§ 2.4), но теперь уже с учетом квантовых свойств поля.

§ 7.1. Закон Кирхгофа для квантовых усилителей

Интенсивность собственного шумового излучения лазера или мазера, работающего в линейном стационарном режиме, может быть определена без помощи квантовой электродинамики из общих соображений, основанных на некоторых закономерностях неравновесной термодинамики типа формулы Найквиста (или флуктуационно диссипативной теоремы — ФДТ) и закона Кирхгофа для теплового излучения.

Закон Ќирхгофа для одной моды. Пусть идеальный волновод заполнен однородным веществом, имеющим температуру T — термодинамическую или эффективную. Рассмотрим электромагнитную энергию, переносимую одним волноводным типом поля (например, H_{01} в прямоугольном волноводе) в стационарном случае. Пусть волновод соединен с согласованными источником сигнала и нагрузкой, так что обратная волна независима от прямой (рис. 7.1).

Нас будет интересовать спектральная плотность мощности $\mathcal{P}_{f}(\omega, z) \equiv \Delta \mathcal{P} / \Delta f$, т. е. энергия некогерентного излучения с часто-

той $\omega = 2\pi f > 0$, переносимая через сечение z за 1 с в полосе частот 1 Гц. Легко показать, что $\mathcal{P}_f(\omega, z)$ в единицах $\hbar \omega = hf$ совпадает со средним числом фотонов $N(\omega, z)$, приходящихся на одну продольную моду волновода:

$$\mathcal{P}_{f} = \frac{u}{L} \mathcal{E}_{f} = \frac{hfu}{L} N_{f} = \frac{hfu}{L} g_{f} N = hfN.$$
(7.1.1)

Здесь $u = d\omega/dk$ — групповая скорость (k — постоянная распространения); L — длина некоторого отрезка волновода, много большего



Рис. 7.1. Волноводный закон Кирхгофа. Шумы волновода определяются конкуренцией поглощения а и спонтанного излучения $J = \alpha_0 N$, где $N = N_2/(N_1 - N_2)$ — функция Планка и N_1 — населенности уровней. В результате шумы выражаются через коэффициент передачи $G = e^{-\alpha_2}$ и температуру T

длины волны $\lambda = 2\pi/k$, но много меньше расстояния, на котором $\mathcal{P}_{f}(z)$ заметно изменяется; \mathcal{E}_{f} —спектральная плотность энергии макрополя в отрезке L; $N_{f} \equiv \mathcal{E}_{f}/hf$ —число фотонов в L на 1 Гц, равное N, умноженному на спектральную плотность продольных мод $g_{f} = L d \lambda^{-1}/d\omega = L/u$. Обратная величина u/L равна интервалу между собственными частотами соседних мод (подробнее о понятии моды см. § 7.3).

Будем исходить из линейного кинетического уравнения для N (ω, z) вида

$$dN/dz = -\alpha N + j. \tag{7.1.2}$$

Здесь $\alpha(\omega)$ — коэффициент поглощения или усиления за счет вынужденных переходов и $j(\omega) \gg 0$ — распределенный источник шума, вызванного спонтанным излучением. Это уравнение описывает феноменологически стационарное взаимодействие вещества с одной поперечной модой поля, необязательно в волноводе¹). Его полезно сравнить с одномерными уравнениями (6.3.22) для «медленных» амплитуд и с соотношениями Эйнштейна для нестационарного взаимодействия (2.5.2). Очевидно, что $\alpha \sim B(N_1 - N_2)$ и $j \sim AN_2$, где A, B — коэффициенты Эйнштейна и N_i — населенности пары уровней, разделенных интервалом $\hbar\omega$.

Решение (2) имеет вид

$$N = N_0 G + (j/\alpha) (1 - G), \quad G(\omega, z) \equiv \exp[-\alpha(\omega) z], \quad (7.1.3)$$

где N_0 — сигнал на входе усилителя и G— коэффициент передачи волновода. Второе слагаемое здесь, не зависящее от входного сигнала, является собственным шумом волновода.

Выразим отношение j/α через температуру вещества. Пусть $\alpha z \gg 1$, тогда согласно (3) $N = j/\alpha$. С другой стороны, в достаточно длинном волноводе с затуханием должно установиться равновесное излучение, в котором среднее число фотонов на моду определяется функцией Планка \mathcal{N} . Следовательно,

$$j/\alpha = \mathcal{N} = [\exp(\hbar\omega/\kappa T) - 1]^{-1} = (1/2) [\operatorname{cth}(\hbar\omega/2\kappa T) - 1] = N_2^{(0)}/(N_1^{(0)} - N_2^{(0)}). \quad (7.1.4)$$

Этот вывод является строгим лишь для полностью равновесной системы, в которой населенности N_i и число фотонов N подчиняются распределениям Больцмана и Планка соответственно.

Разумно предположить, однако, что (4) приближенно остается верным и при отсутствии равновесного излучения, например при $\alpha z \ll 1$ и $N_0 = 0$. При этом параметр T относится уже лишь к веществу, температура которого поддерживается постоянной и однородной, несмотря на радиационное охлаждение («квазиравновесие»). Для этого необходимо, чтобы излучающие и поглощающие на частоте ω степени свободы взаимодействовали с термостатом много сильнее, чем с полем ²). Формула (3) при $N_0 = 0$ описывает в этом приближении процесс пространственного установления равновесного планковского поля (с одним направлением распространения) в волноводе или слое вещества с протяженностью z, температурой T и коэффициентом поглощения $\alpha(\omega)$:

$$N = \mathcal{AN}, \quad \mathcal{A} \equiv 1 - G. \tag{7.1.5}$$

¹) Подобные уравнения называются уравнениями переноса (фотонов, нейтронов и т. д.), они предполагают возможность приписать фотонам пространственную координату *z*, определенную с точностью $\pm L/2$. В общем случае используется функция $N(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$, имеющая смысл локальной спектральной яркости в единицах $\hbar c/\lambda^3$.

²) Пусть время T_1 характеризует взаимодействие частиц с термостатом, тогда условие применимости закона Кирхгофа (и вообще формул типа ФДТ) к неравновесным задачам имеет, очевидно, вид $1/T_1 \gg A$ (2N+1) (ср. (2.5.18)).

Здесь \mathcal{A} — поглощательная способность волновода или слоя (в общем случае надо учесть отражения на входе и выходе), она может быть измерена согласно (3) с помощью внешнего сигнала: $\mathcal{A}=1-\partial N/\partial N_0$. Формула (5) выражает закон Кирхгофа, связывающий тепловое

чормула (5) выражает закон кирхгофа, связывающий тепловое излучение нагретого вещества с его термодинамическим параметром

T и кинетическим параметром \mathcal{A} . Его легко вывести в форме (5), не прибегая к кинетическому уравнению [25]. Отметим, что этот закон используется для построения фотометрических эталонов интенсивности света, хотя в принципе он применим лишь в приближениях сильной связи с термостатом, линейной и геометрической оптики (о его возможных обобщениях см. [37]).

Закон Кирхгофа для отрицательной температуры. Феноменологическая связь спонтанных и вынужденных эффектов с населенностями уровней $j/\alpha = N_{0}/(N_{1}-N_{0})$ подтверждается с помощью модельных расчетов с двухуровневым веществом. При этом она обобщается на неравновесное вещество с небольцмановскими N_i. Удобно и в этом приближении сохранить формулу (4) и закон Кирхгофа в форме (5), отождествляя Т с эффективной (или, иначе, спиновой) температурой T_{вф}, определяемой из действительного отношения населенностей $\exp(\hbar\omega/\varkappa T_{ab}) \equiv$ $\equiv N_1/N_2$ (§ 3.2).



Рис. 7.2. Функция Планка, определяющая среднее число фотонов с частотой $\omega > 0$ в одной моде равновесного поля, а также число возбужденных атомов N_2 , деленное на разность населенностей $N_1 - N_2$ (T — эффективная температура, в случае поля T > 0)

Из определения функции $\mathcal{N}(T)$ следует, что при инверсии населенностей, когда α и T меньше нуля, \mathcal{N} также отрицательна (рис. 7.2): $\mathcal{N}(-T) = -[\mathcal{N}(T)+1]$, поэтому закон Кирхгофа можно написать в виде

$$N = [\mathcal{N}(-T) + 1](G-1)$$

или (рис. 7.3)

$$N = \mathcal{N} \{ 1 - \exp[-\alpha_0(\omega) \mathbf{z}/(2\mathcal{N} + 1)] \}, \qquad (7.1.6)$$

поскольку $\alpha = \sigma (N_1 - N_2) = \alpha_0 \operatorname{th} (\hbar \omega / 2 \varkappa T)$, где α_0 - коэффициент поглощения при T = +0.

В частности, при полной инверсии $N_1 = 0$, T = -0, $\mathscr{N} = -1$, так что спектральная плотность шума одномодового идеального квантового усилителя в единицах hf равна просто коэффициенту передачи без единицы:

$$N = G - 1.$$
 (7.1.7)

Появление здесь — 1 связано с распределенным характером источника шума. Отсюда шумы N/G, отнесенные ко входу, равны $1 - G^{-1}$, что при $G \gg 1$ дает по одному фотону на моду, т. е. на единицу полосы частот за единицу времени.



Рис. 7.3. Спектральная плотность теплового излучения одномодового ослабителя (T>0) или усилителя (T<0) в зависимости от его длины z и температуры T согласно закону Кирхгофа (α₀ — коэффициент поглощения при T=+0)

При наличии на входе некогерентного сигнала со спектральной плотностью мощности h/N_0 к (7) надо добавить GN_0 . Результат можно представить в виде

$$N+1 = G(N_0+1). \tag{7.1.8}$$

Эта формула дает следующий алгоритм для учета спонтанного излучения (или, иначе, квантовых флуктуаций) в идеальном усилителе: к числу фотонов на входе прибавляется единица, результат умножается на классический коэффициент усиления, что дает после обратного вычитания единицы выходное число фотонов. Итак, отношение сигнал/ шум на выходе идеального квантового усилителя с большим усилением равно N_0 — числу фотонов сигнала в одной моде.

Появление единиц в (8) можно интерпретировать как результат нулевых флуктуаций поля, однако к этой интерпретации следует относиться с осторожностью [65]. Квантовые флуктуации дают принципиальный предел чувствительности и точности квантовых усилителей, как и любых измерительных приборов. При $N_1 \neq 0$ к квантовым флуктуациям добавляются «тепловые», пропорциональные $\mathcal{N}(-T)$ (см. (6)).

В радиодиапазоне часто используют понятие шумовой температуры усилителя $T_{\rm m}$. По определению $T_{\rm m}$ равно яркостной температуре шумового излучения на выходе, отнесенного ко входу:

$$\mathcal{N}(T_{\mathfrak{m}}) \equiv N/G = \mathcal{N}(T_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}})(e^{\alpha z} - 1), \qquad (7.1.9)$$

где \mathscr{N} — функция Планка для рассматриваемой частоты ω . Эта формула дает связь $T_{\rm m}$ с эффективной (спиновой) температурой вещества $T_{\rm sp}$. Понятие $T_{\rm m}$ удобно лишь в классической области температур, где $\mathscr{N} \approx \varkappa T/\hbar \omega$ и (9) принимает вид

$$T_{\rm m} = (e^{\alpha z} - 1) T_{\rm sp},$$

что в двух предельных случаях (малое поглощение и большое усиление) дает

$$\begin{array}{cccc} T_{\rm m} = \alpha z & T_{\rm sop} & (|\alpha| \, z \ll 1), \\ T_{\rm m} = - \, T_{\rm sop} & (\alpha z \ll -1). \end{array} \tag{7.1.10a} \\ (7.1.10b) \end{array}$$

Итак, спиновая температура определяет не только отношение населенностей, но и предельную шумовую температуру квантового усилителя.

В парамагнитных усилителях $|T_{a\phi}|$ имеет порядок температуры решетки рабочего кристалла, который охлаждают до температур жидкого гелия для уменьшения $T_{\rm m}$, ослабления спин-решеточной релаксации и увеличения равновесной разности населенностей. В результате шумовая температура этих усилителей достигает нескольких кельвинов. В то же время в обычных электронных усилителях $T_{\rm m} \sim 10^3$ К (из-за высокой температуры катода); в параметрических CBЧ-усилителях на полупроводниковых диодах $T_{\rm m} \sim 100$ К.

Практически $T_{\rm m}$ в парамагнитных усилителях определяется тепловым излучением не рабочего вещества согласно (106), а элементов входного тракта (антенны, волноводов и невзаимных ферритовых устройств) согласно (10а). Действительно, входной волновод с комнатной температурой стенок и потерями всего 1% дает заметный вклад: $T_{\rm m} \approx 3$ K.

Нетрудно обобщить закон Кирхгофа (5) на случай, когда в волноводе имеется несколько источников однородных линейных потерь α_i и шумов j_i с различными эффективными температурами T_i (i=1, 2, ...). Полагая опять $j_i = \alpha_i \mathcal{N}_i$, получаем кинетическое уравнение

$$dN/dz = \sum_{i} \alpha_{i} (\mathcal{N} - N), \qquad (7.1.11)$$

отличающееся от (2) лишь заменой α на $\sum \alpha_i$ и $\alpha \mathcal{N}$ на $\sum \alpha_i \mathcal{N}_i$. В результате (5) принимает вид

$$N = (1 - e^{-\alpha z}) \sum_{i} (\alpha_i / \alpha) \mathscr{N}_i, \qquad (7.1.12)$$

где $\alpha = \sum \alpha_i$. Таким образом, вклад каждого элемента в общее тепловое излучение пропорционален его вкладу α_i/α в суммарный коэффициент поглощения.

Рассмотрим форму спектра теплового излучения в окрестности одиночного узкого резонанса при различных оптических толщинах

аг (рис. 2.4). При малых $|\alpha| z$ спектр излучения повторяет спектр поглощения: $N(\omega) = \alpha(\omega) z \mathcal{N}$ (медленную зависимость \mathcal{N} от ω здесь можно не учитывать). При больших положительных αz линия уплощается и уширяется, стремясь в пределе к равновесному спектру $\mathcal{N}(\omega)$, а при больших отрицательных αz ширина линии сужается (как и полоса усиления, — см. (2.3.22)) и стремится к нулю как $\sqrt{\ln G}$.

Шумы многомодового усилителя. До сих пор речь шла об одной поперечной моде волновода. В общем случае, когда в переносе излучения к детектору участвуют несколько независимых мод, следует просуммировать (5) или (11) по всем существенным модам. Если сечение волновода A много больше λ^2 , то суммирование можно заменить интегрированием.

При переходе к свободному пространству число наблюдаемых точечным детектором в ближней зоне поперечных мод (т. е. мод с одинаковыми частотами $\omega_k = ck$) пропорционально пространственной апертуре излучателя $A \equiv ab$ и угловой апертуре детектора $\Delta\Omega = \Delta \vartheta_x \Delta \vartheta_u$:

$$\Delta g_{\perp} = (a \Delta \lambda^{-1}_{\lambda}) (b \Delta \lambda^{-1}_{y}) = A \Delta \Omega / \lambda^{2}, \qquad (7.1.13)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ (мы учитываем один тип поляризации и полагаем направление наблюдения перпендикулярным A). Согласно (13) угловой интервал между соседними поперечными модами имеет порядок дифракционного угла λ/a .

Умножив (5) на энергию фотона $\hbar\omega$, полосу детектора $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ и число поперечных мод Δg_{\perp} , найдем мощность многомодового теплового излучения с одним типом поляризации:

$$\Delta \boldsymbol{\mathcal{P}} = (\hbar \omega \Delta \omega \Delta \Omega A / 2\pi \lambda^2) \,\mathcal{N} \,(1 - G), \qquad (7.1.14)$$

полагаем коэффициент передачи $G = e^{-\alpha z}$ и эффективную температуру T одинаковыми для близких по направлению поперечных мод.

Отношение $\Delta \mathcal{P}/\Delta\omega\Delta\Omega A$ называется спектральной яркостью (или просто интенсивностью) — это основная энергетическая характеристика некогерентного многомодового излучения. В общем случае $I_{\omega\Omega} \equiv I(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ зависит от частоты, направления и точки наблюдения, однако при отсутствии рассеяния, излучения и поглощения между точками \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \mathbf{a}$ спектральная яркость в этих точках одинакова для аргументов \mathbf{k} , параллельных \mathbf{a} :

$$I(\mathbf{k}, \mathbf{r}+a) = I(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad \mathbf{k} || a;$$
 (7.1.15)

конечно, имеет смысл говорить о смещении a точки наблюдения лишь при $a \gg \lambda$.

Интегралы от *I* по различным переменным имеют в фотометрии специальные названия — *яркость*, *светимость* (или *освещенность*)

поверхности, сила света ¹):

$$B(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{r}) \equiv \int_{0}^{\infty} d\omega_{k} I(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}), \quad E(\boldsymbol{r}) \equiv \int d\Omega B(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{r}) \cos \vartheta_{k}, \quad (7.1.16)$$
$$\mathcal{P}(\boldsymbol{z}) \equiv \int d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{y} \, E(\boldsymbol{r}).$$

Здесь $\hat{k} \equiv k/k$, ϑ_k — угол между k и осью z. Спектральная и объемная плотность энергии равна

$$\rho_{\omega}(\omega, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{u(\omega)} \int_{4\pi} d\Omega I(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}), \qquad (7.1.17)$$

где u—групповая скорость, $\omega \equiv \omega_k$. В случае теплового излучения нагретого тела величину $I(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \cos \vartheta_k$ называют излучательной способностью тела (в точке \mathbf{r} его поверхности).

Согласно (14) закон Кирхгофа для многомодового излучения слоя вещества с эффективной температурой T и толщиной z имеет вид (ср. (6.4.18), (6.5.51)).

$$I_{\omega\Omega}(\boldsymbol{k}) = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} N(\boldsymbol{k}), \qquad (7.1.18)$$

где

$$I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} \equiv \hbar \omega / 2\pi \lambda^2, \quad N(\mathbf{k}) = \mathcal{N}(1 - e^{-\alpha(\mathbf{k})^2})$$
(7.1.19)

(учитываем один тип поляризации). Величина $I_{\omega\Omega}^{vac}$ соответствует спектральной яркости излучения, имеющего по одному фотону в каждой моде (т. е. $I_{\omega\Omega}^{vac}$ равно удвоенной «яркости нулевых флуктуаций» вакуума), она является естественной единицей для измерения $I_{\omega\Omega}$: среднее число фотонов на моду N равно спектральной яркости в единицах $I_{\omega\Omega}^{vac}$.

Равновесное и спонтанное излучения, сверхлюминесценция. Рассмотрим три характерных случая.

1. При $\alpha z \gg 1$ из (18) следует $I_{\omega\Omega} = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} \mathcal{N}$, что в случае изотропного излучения соответствует излучению абсолютно черного тела и согласно (17) при u = c/n формуле Планка:

$$2\rho_{\omega} = (8\pi n/c) I_{\omega\Omega} = (8\pi \hbar/\lambda^3) \mathcal{N}; \qquad (7.1.20)$$

коэффициент 2 учитывает два типа поляризации.

2. Если же [α] z ≪1, то из (18) следует

$$I_{\omega\Omega} = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} \, \mathscr{N} \, \alpha z = I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} N_2 \sigma l / \cos \vartheta_k, \qquad (7.1.21)$$

где мы положили оптическую толщину слоя αz для моды **k** равной $\sigma(N_1 - N_2) l/\cos \vartheta_k$. Выразим здесь сечение перехода σ через диполь-

¹) Иногда с добавлением прилагательного «энергетическая», указывающего, что они измеряются в обычных единицах, а не светотехнических, учитывающих спектральную характеристику человеческого глаза и основанных на канделле.

ный момент перехода d_0 согласно (2.3.6) и определим с помощью (16) общую мощность спонтанного излучения. Пусть n = 1, тогда

$$\mathcal{P} = \int_{4\pi} d\Omega \int_{A} dx \, dy \cos \vartheta_k \int_{0}^{\infty} d\omega I_{\omega\Omega} = (4\pi^2/\hbar c) I_{\omega\Omega}^{\text{vac}} N_2 V \omega_0 \int_{4\pi} d\Omega \, (\boldsymbol{d}_0 \cdot \boldsymbol{e}_k)^2, \ (7.1.22)$$

где V = Al—объем вещества. Интеграл здесь равен $8\pi d_0^2/3$, так что \mathcal{P}/VN_2 совпадает с найденным ранее выражением для мощности спонтанного излучения в расчете на одну молекулу $4\omega_0^4 d_0^2/3c^3$ (см. (5.2.16)).

3. П́усть теперь αz≪—1, тогда N=G№ и

$$\mathcal{P} = N_{\mathbf{s}} (N_{\mathbf{s}} - N_{\mathbf{s}})^{-1} I^{\text{vac}}_{\omega \Omega} G_{\mathbf{s}} A_{\mathbf{s} \phi} \Delta \Omega_{\mathbf{s} \phi} \Delta \omega_{\mathbf{s} \phi}, \qquad (7.1.23)$$

где мы ввели эффективные аппертуры $A_{a\phi}$, $\Delta\Omega_{a\phi}$ и полосу частот $\Delta\omega_{a\phi}$ (строго определяемые через соответствующие интегралы) и коэффициент усиления в центре линии G_o . Эта формула определяет мощность сверхлюминесценции — усиленного спонтанного излучения. Положим для грубой оценки, что $A_{a\phi}$ совпадает с сечением усилителя A, $\Delta\omega_{a\phi}$ —с полосой усиления $\Delta\omega$ и $\Delta\Omega_{a\phi} \approx A/l^2$, где l—длина усилителя, тогда при $N_1 = 0$

$$\mathcal{P} = I_{\omega \Omega}^{\text{vac}} G_0 A^2 \Delta \lambda / l^2.$$
(7.1.24)

При $\lambda = 0.5$ мкм, $\Delta \lambda = 10$ нм, A = 1 см², l = 10 см и $G_0 = 10^{\circ}$ получаем $\mathcal{P} = 2 \cdot 10^4$ Вт.

На многих переходах в газах инверсию даже с помощью мощных импульсных разрядов удается получить лишь на короткое время τ ≈10⁻⁹ с из-за большого времени жизни нижнего рабочего уровня. При этом в случае длины активной области, большей ст~30 см, обратная связь с помощью зеркал не успевает сработать. Излучение лазеров, использующих такие «самоограниченные» переходы (важный пример азотный лазер с длиной волны 330 нм), является, по существу, сверхлюминесценцией.

Конечно, при достаточно больших G₀ мощность сверхлюминесценции (24) может оказаться достаточной для эффекта насыщения, при этом задача становится нелинейной и закон Кирхгофа неприменим.

Усиление и полоса резонаторного усилителя. Для увеличения усиления при данной длине активного вещества применяют положительную обратную связь с помощью объемного резонатора. Определим с помощью эквивалентной схемы коэффициент усиления $G(\omega)$ и полосу пропускания $\Delta \omega$ отражательного резонаторного усилителя, т.е. усилителя с одним волноводом связи или одним полупрозрачным зеркалом (рис. 7.4). Разделение падающего на резонатор слабого сигнала и отраженной с усилением обратной волны осуществляется в СВЧ-диапазоне с помощью невзаимных ферритовых устройств (циркуляторов).

Рассмотрим область спектра в окрестности одной из собственных частот резонатора ω₀. Если соответствующий тип колебания невырож-

ден и ω_0 достаточно удалена от других частот, то поле в произвольной точке резонатора зависит от времени аналогично параметрам любой колебательной системы с одной степенью свободы, например аналогично току в *LC*-контуре. При этом электрическое поле имеет вид E = = u(r) q(t), где u(r) -известная функция, определяемая формой ре-



Рис. 7.4. Резонаторный квантовый усилитель: a) оптического диапазона; б) СВЧдиапазона; в) эквивалентная схема

зонатора, а q(t) подчиняется уравнению движения гармонического осциллятора. Это позволяет для расчета отклика резонатора на монохроматическое возбуждение использовать эквивалентную схему, представленную на рис. 7.4, в. Затухание (и, в соответствии с теоремой Найквиста, шумы) вносятся в схему тремя резисторами — сопротивлением внешней нагрузки $R_{\rm H}$ (которое совпадает по предположению с волновым сопротивлением длинной линии, изображающей волновод связи), сопротивлением R_0 , пропорциональным потерям в стенках резонатора, и отрицательным сопротивлением R_a , пропорциональным излучению активного вещества. Мы полагаем, что ширина используемой спектральной линии много больше $\Delta \omega$, и поэтому R_a — вещественный параметр.

Как известно, коэффициент отражения от конца длинной линии, т. е. отношение комплексных амплитуд обратной и прямой волн, определяется отношением сопротивления нагрузки (резонатора) Z_p к волновому сопротивлению линии $R_{\rm H}$. Например, коэффициент отражения по току равен

$$K(\omega) = \frac{R_{\rm H} - Z_{\rm p}}{R_{\rm H} + Z_{\rm p}} = \frac{R_{\rm H} - R_{\rm p} - iX}{R_{\rm H} + R_{\rm p} + iX},$$
(7.1.25)

где

ί

$$R_{\rm p} \equiv R_{\rm 0} + R_{\rm a}, \quad X \equiv \frac{1}{\omega C} - \omega L = \omega L \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) \approx 2L \left(\omega_0 - \omega\right). \quad (7.1.26)$$

Соотношение между $R_{\rm H}$ и остальными параметрами зависит от степени связи резонатора с волноводом.

Перейдем от эквивалентных параметров R_i к безразмерным величинам, имеющим непосредственный физический смысл — добротностям $Q_i \equiv \omega_0 L/R_i$ или декрементам затухания $d_i \equiv 1/Q_i$. Величина Q_a называется (магнитной) добротностью активного вещества. Разделив числитель и знаменатель (25) на $\omega_0 L$, находим

$$K(\omega) = \frac{d_{\rm H} - d_{\rm p} - 2ix}{d_{\rm H} + d_{\rm p} + 2ix},$$
(7.1.27)

где x ≡ (ω₀ − ω)/ω₀. Усиление или ослабление по мощности при отражении от резонатора

$$G(\omega) = |K(\omega)|^2 = \frac{(d_{\rm H} - d_{\rm p})^2 + 4x^2}{(d_{\rm H} + d_{\rm p})^2 + 4x^2}.$$
 (7.1.28)

Существенно, что степень связи волновода с резонатором можно изменять, поворачивая, например, петлю связи или меняя прозрачность зеркала. При этом нормированные потери $d_{\rm H} = R_{\rm H}/\omega_0 L$, вносимые внешней цепью в резонатор, также меняются от 0 (нет связи, «глухое»



Рис. 7.5. Зависимость коэффициента усиления K_0 резонаторного усилителя от добротности резонатора $1/d_p$. Уменьшая связь $d_{\rm H}$, можно при заданном $d_p < 0$ сделать K_0 сколь угодно большим: d_p — декремент резонатора с учетом отрицательного вклада активного вещества; $d_{\rm H}$ — декремент нагрузки, т. е. относительные потери, вносимые внешней цепью

зеркало) до ∞ (максимальная связь, зеркало отсутствует). В случае резонанса ($\omega = \omega_0$) и положительных потерь в резонаторе ($d_p > 0$) амплитудный коэффициент отражения по току K_0 меняется при увеличении связи от —1 до +1, проходя через нуль при согласовании $d_{\mathbf{H}} = d_p$ (рис. 7.5).

Если же $d_p = d_0 + d_a < 0$, то K_0 и G_0 меняются при уменьшении связи от 1 до ∞ . Таким образом, резонаторный квантовый усилитель с достаточно добротным резонатором ($Q_0 > - Q_a$) позволяет за счет регенерации получить сколь угодно большое усиление слабого сигнала.

Однако по мере увеличения K_0 уменьшается другой важный для многих применений параметр — полоса усиления $\Delta \omega$. Как будет показано ниже, при $K_0 \gg 1$ произведение амплитудного усиления на полосу не зависит от связи:

$$K_{0}\Delta\omega = 2\omega_{0}/|Q_{a}|. \tag{7.1.29}$$

Произведение $K_0 \Delta \omega$ называется *параметрэм регенерации*, оно характеризует качество рабочего вещества для парамагнитных усилителей.

Согласно (28)

$$G-1 = \frac{-d_{\rm p}d_{\rm H}}{d^2/4 + x^2},\tag{7.1.30}$$

где $d \equiv d_{\rm H} + d_{\rm p} \equiv 1/Q$ —суммарный декремент затухания и Q—нагруженная добротность резонатора. Отсюда следует, что при $G \gg 1$ частотная характеристика усилителя имеет лоренцеву форму, а полоса усиления определяется нагруженной добротностью резонатора с учетом всех потерь:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = d = \frac{1}{Q_{\rm H}} + \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_a} \,. \tag{7.1.31}$$

Чтобы было $G \gg 1$, необходима почти полная компенсация потерь: $-d_a \approx d_0 + d_{\rm H}$, при этом $K_0 \approx 2 |d_p|/d$, так что произведение усиления на полосу является константой: $K_0 \Delta \omega = 2\omega_0 |d_p|$. Обычно собственная добротность резонатора $Q_0 \ge 10^4$ много больше добротности активного вещества $|Q_a| \le 10^3$, поэтому практически $Q_p = Q_a$, что и дает (29).

Выразим Q_a через параметры вещества, воспользовавшись общим определением добротности как отношения запасенной в колебательной системе энергии

$$\mathscr{E} = \int_{V_{p}} d^{3}r \, (\varepsilon'\overline{E^{2}} + \overline{H^{2}})/8\pi = \int_{V_{p}} d^{3}r \, \varepsilon' u^{2} \, (\mathbf{r})/8\pi \qquad (7.1.32)$$

к энергии потерь за время ω_0^{-1}

$$\mathcal{P}/\omega_{0} = \int_{V_{p}} d^{3}r \varepsilon''(\omega_{0}) u^{2}(\boldsymbol{r})/8\pi. \qquad (7.1.33)$$

Здесь использованы равенства $\mathscr{E}_{\mathfrak{s}\mathfrak{n}} = \mathscr{E}_{\mathfrak{Mar}}, \overline{q^2(t)} = 1/2$ и формула (4.1.12) для потерь в единице объема. Следовательно,

$$Q_a^{-1} = \eta \varepsilon'' / \varepsilon' = \eta \alpha / k, \qquad (7.1.34)$$

где $\eta \approx V/V_p \ll 1 - \kappa o s \phi \phi$ ициент заполнения резонатора активным веществом, определяемый отношением интегралов в (32) и (33); $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$, α — погонный коэффициент усиления для плоских волн с волновым вектором k; в случае магнитного перехода под ε'' следует понимать магнитную проницаемость. При электронном парамагнитном резонансе $\alpha \approx -5 \cdot 10^{-2}$ см⁻¹ (§ 2.3), что при $\lambda = 3$ см и $\varepsilon' = \eta = 1$ дает $Q_a = -40$. Пусть $K_0 = 100$, тогда из (29) следует $\Delta f = 5$ МГц. Такая полоса для многих применений (связь, радиолокация, радиоастрономия) недостаточна, поэтому используют системы из нескольких связанных резонаторов и замедляющие системы.

Закон Кирхгофа для резонаторного усилителя. Формула Таунса. Для учета шумов, излучаемых активным веществом, добавим в эквивалентную схему (рис. 7.4) генератор тока со спектральной плот-

ностью, определяемой формулой Найквиста (см. [3], § 3.4):

$$i_f^2 = 4 \varkappa T R_a / |Z|^2,$$
 (7.1.35)

где $Z = R_{\rm H} + R_{\rm p} + iX$ и T—эффективная (спиновая) температура активного вещества (шумами, связанными с Q_0 , пренебрегаем). Для учета квантовых шумов $\varkappa T$ следует заменить на $\hbar\omega N$. В сопротивлении нагрузки будет выделяться спектральная мощность $\mathcal{P}_f = i_f^2 R_{\rm H}$, равная (в единицах $\hbar\omega$)

$$N = 4 \mathcal{N} d_{a} d_{\mu} / (d^{2} + 4x^{2}) = \mathcal{N} (1 - G).$$
(7.1.36)

Здесь использовано (30) в приближении $Q_0 \gg |Q_a|$. Итак, мы снова, в соответствии с законом Кирхгофа, выразили шумы через эффективную температуру и усиление. Ширина спектра шумов $\Delta \omega_{\rm m}$ (на уровне 1/2) согласно (36) совпадает с полосой усиления $\Delta \omega$ (см. (31)), и поэтому при $d_{\rm p} \rightarrow d_{\rm H}$ она стремится к нулю. Шумовая температура при $G \gg 1$ и $\hbar \omega \ll \kappa T$, как и в усилителе бегущей волны, совпадает по модулю со спиновой.

Найдем полную мощность шума при $d_{\rm p} \approx d_{\rm a} \approx -d_{\rm H}$ и $\Delta \omega \ll \omega_0$:

$$\mathcal{P} = \int_{0}^{\infty} df \hbar \omega N = -\frac{\hbar \omega_0^3 \mathcal{N}}{2\pi Q_a^2} \int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{\Delta \omega^2 / 4 + (\omega_0 - \omega)^2} = \frac{\hbar \omega_0^3 |\mathcal{N}|}{\Delta \omega Q_a^2}. \quad (7.1.37)$$

Отсюда следует формула Таунса, выражающая ширину спектра собственного излучения резонаторного усилителя через общую мощность излучения:

$$\Delta \omega = \frac{\hbar \omega_0^3 N_2}{\mathcal{P} Q_a^2 (N_2 - N_1)} \,. \tag{7.1.38}$$

Пусть $\lambda = 1$ мкм, $\mathcal{P} = 1$ мВт=10⁴ эрг/с, $N_1 = 0$, $\alpha \approx 1/\lambda Q_a = -0,01$ см⁻¹, тогда

$$\Delta f = \hbar c^3 \alpha^2 / \mathcal{P}\lambda \approx 1 \Gamma \mathfrak{u}. \tag{7.1.39}$$

Конечно, приведенный расчет $\Delta \omega$ справедлив лишь в линейном режиме усилителя ниже порога его самовозбуждения ($Q_{\rm H} < -Q_{\rm a}$). Однако можно ожидать, что и выше порога (38) дает правильный порядок для ширины спектральной линии квантового генератора (в предельном случае, когда отсутствуют «технические» шумы типа вибраций зеркал). Более последовательные расчеты с учетом нелинейности из-за эффекта насыщения [13, 50—53], ограничивающего амплитуду шумов, приводят при большом превышении порога к появлению в (38) дополнительного множителя 1/2. Это объясняется подавлением флуктуаций амплитуды, дающих одинаковый с флуктуациями фазы вклад в ширину спектра. Следует помнить, что случайное медленное изменение фазы (диффузия фазы) гармонического сигнала приводит к флуктуациям его текущей частоты и к конечной ширине его спектра. Различие в форме колебаний квантового усилителя — генератора ниже и выше порога поясняется ниже (рис. 7.7).

216
' Лишь отсутствие флуктуаций амплитуды качественно отличает излучение одномодового лазера от узкополосного шума. В случае многомодового лазера с независимыми модами и это различие исчезает.

§ 7.2. Основные понятия статистической оптики

Выше мы нашли в виде закона Кирхгофа интенсивность (спектральную яркость) излучения $I(\mathbf{k})$ как функцию частоты и направления наблюдения в дальней зоне. Хотя интенсивность является важной характеристикой излучения, ясно, что она не дает полной статистической информации об электромагнитном поле.

В настоящем разделе мы на примере нескольких типичных экспериментальных схем рассмотрим реально наблюдаемые параметры и соответствующие им удобные теоретические величины — корреляционные функции $G_{1...2n}^{(n)}$ (индекс *i* заменяет совокупность аргументов r_i , t_i , α_i).

Поскольку подавляющее большинство наблюдаемых оптических эффектов не требует для объяснения квантования поля, то мы ограничимся здесь более наглядной и простой классической теорией, приводя в необходимых случаях без вывода результаты квантовой теории (§ 7.4—7.7).

Аналитический сигнал. В статистической оптике удобно использовать вместо реальной напряженности поля $E_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ комплексную функцию $E_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, которая называется аналитическим сигналом или положительно частотной частью поля. Она однозначно определяется равенством (аргументы α , \mathbf{r} опускаем)

$$E^{(+)}(t) \equiv \int_{0}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} E(\omega), \qquad (7.2.1)$$

где *E* (ω) — фурье-трансформанта реального поля:

$$E(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} E(t)/2\pi = E^*(-\omega). \qquad (7.2.2)$$

По определению спектр аналитического сигнала $E^{(+)}(t)$ содержит лишь положительные частоты ($\omega > 0$), а спектр комплексно сопряженной (отрицательно частотной) функции $E^{(-)} = E^{(+)*}$ — только отрицательные частоты. Из определения следует связь (рис. 7.6)

$$E(t) = E^{(+)}(t) + E^{(-)}(t) = 2 \operatorname{Re} E^{(+)}(t).$$
 (7.2.3)

В случае квазимонохроматического поля с узким спектром удобно ввести «медленную» комплексную амплитуду $E_0(t)$, определяемую равенством

$$E(t) = \operatorname{Re} E_0(t) e^{-i\widetilde{\omega}t}, \qquad (7.2.4)$$

где $\overline{\omega}$ — некоторая средняя частота. Модуль $|E_0(t)|$ называется огибающей, а аргумент — медленно меняющейся фазой. Спектр $E_0(t)$ занимает интервал $\pm \Delta \omega/2$ в области нулевых частот. Можно, очевидно, полагать

$$E^{(+)}(t) = (1/2) E_0(t) e^{-i\overline{\omega}t}.$$
(7.2.5)

Показания оптических детекторов — $\Phi \ni Y$, болометров, фотопленок и т. д. — зависят от квадрата (или более высоких четных степеней) поля, усредненного по некоторому интервалу времени T за счет инерционности отклика детектора (мы отвлекаемся пока от конечности его



Рис. 7.6. Аналитический сигнал $E^{(+)}(t)$ и реальная напряженность поля E(t) в случае монохроматического спектра (а) и в общем случае (б)

пространственных размеров). Пусть $\Delta \omega \ll 1/T \ll \omega$, т. е. огибающая мало меняется за время отклика детектора, которое включает много периодов оптического поля, тогда показания детектора будут пропорциональны «мгновенной интенсивности» ¹)

$$I(t) = \overline{E^{2}(t)}/2 \approx |E^{(+)}(t)|^{2} = |E_{0}(t)|^{2}/4.$$
(7.2.6)

В § 7.7 это утверждение будет обосновано более строго. Использование здесь аналитического сигнала автоматически избавляет от осциллирующих с двойной оптической частотой слагаемых.

Случайная интенсивность. В случайном поле мгновенная интен сивность I(t) в точке r изменяется, флуктуирует как во времени, так и в пространстве²). Часто измеряются лишь простейшие характеристики поля—средняя по ансамблю или времени интенсивность в одной точке ($E^{(+)} \equiv E_{\alpha}^{(+)}(r, t)$)

$$\langle I \rangle = \langle E^{(-)}E^{(+)} \rangle \tag{7.2.7}$$

и средний квадрат интенсивности

$$\langle I^2 \rangle = \langle E^{(-)2} E^{(+)2} \rangle \tag{7.2.8}$$

или дисперсия

$$\langle \Delta I^2 \rangle \equiv \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2. \tag{7.2.9}$$

¹⁾ Мы иногда опускаем коэффициент пропорциональности, равный в плоской волне с/2л.

²) Вообще говоря, надо рассматривать случайный тензор $I_{\alpha\beta} = E_{\alpha}^{(-)}E_{\beta}^{(+)}$, где α , $\beta = x$, y, z или, в случае направленного излучения, α , $\beta = x$, y.

Параметры (7) — (9) можно, в принципе, измерить, наблюдая среднее значение и дисперсию показаний широкополосного одноквантового фотодетектора (см. ниже). Показания *n*-квантового детектора сразу дают *n*-й момент $\langle I^n \rangle \equiv G^{(n)}$.

Мы будем полагать поле стационарным, так что средние в (7) — (9) не зависят от времени, и эргодическим. При этом угловые скобки могут означать усреднение как по времени, так и по ансамблю (с по-мощью некоторой функции распределения P(I)).

При переходе к квантовой теории (§ 7.4) величина $E^{(+)}$ заменяется на оператор $\hat{E}^{(+)}$, который выражается через операторы уничтожения фотонов \hat{a}_k , и E^- — на оператор $\hat{E}^{(-)}$, выражающийся через операторы рождения \hat{a}_k^+ . Знак комплексного сопряжения при этом заменяется на знак эрмитова сопряжения «+», а угловые скобки означают уже квантовое усреднение с помощью волновой функции или матрицы плотности. Большинство квантовых состояний поля допускает также усреднение с помощью функции квазивероятности P(z) (§ 7.5), аналогичное классическому усреднению. При переходе к квантовому усреднению важен порядок написания операторов; принятая в (7), (8) последовательность называется нормальной. В рамках классической теории можно, конечно, заменить нормальный момент $G^{(n)} \equiv \langle E^{(-)n}E^{(+)n} \rangle$ на $\langle |E^{(+)}|^{2n} \rangle$.

В подавляющем большинстве случаев оптическое поле возбуждается множеством независимых источников со случайными амплитудами и фазами, как, например, в случае теплового излучения нагретого вещества или квантового усилителя (§ 7.1) или в случае многомодового лазера с независимыми модами. При этом распределение комплексной амплитуды $E_0 = E'_0 + iE''_0$ является нормальным (гауссовым) с независимыми E'_0 и E''_0 , а распределение интенсивности имеет экспоненциальную форму (рис. 7.7):

$$P_T(I) = \langle I \rangle^{-1} \exp(-I/\langle I \rangle).$$
 (7.2.10)

Таким образом, средняя интенсивность $\langle I \rangle$ полностью определяет статистику стационарного хаотического поля (в одной точке и для одного типа поляризации). Обратим внимание на то, что чаще всего встречается нулевая интенсивность: $P(0) \gg P(I)$. С помощью (10) легко найти моменты и дисперсию интенсивности:

$$G_T^{(n)} = n! \langle I \rangle^n, \quad \langle \Delta I^2 \rangle_T = \langle I \rangle^2, \tag{7.2.11}$$

индекс Т относится к хаотическому полю.

Другой характерный случай — излучение одномодового лазера со стабилизированной амплитудой (рис. 7.7). При этом

$$P(I) = \delta(I - I_0), \quad G^{(n)} = I_0^n, \quad \Delta I = 0.$$
 (7.2.12)

Формулы (10) — (12) не учитывают дискретности возможных значений энергии поля, т. е. его фотонной структуры, и поэтому пригодны лишь для классических полей, для которых фактор вырождения $\langle N \rangle$ (см. ниже) много больше единицы. Общий случай будет рассмотрен в § 7.6. Сейчас отметим лишь, что в квантовой теории непрерывное распределение (10) заменяется на «дискретно экспоненциальное», а (12) — на пуассоновское (рис. 7.7, *в*).



Рис. 7.7. Два основных типа состояний поля. Показаны примерный вид изменения поля во времени с классической точки зрения (а) и соответствующие функции распределения $P(|E_0|)$ — классические (б) и квантовые (в). В верхней части рисунка — квазимонохроматическое поле теплового излучения, квантового усилителя или генератора ниже порога (флуктунруют и амплитуда, и фаза); в нижней — поле квантового генератора выше порога (флуктуиции амплитуды подавлены эффектом насыщения)

Корреляционные функции. Рассмотренные выше распределения или моменты интенсивности не несут никакой информации о корреляции между полями в соседних точках пространства — времени и между различными декартовыми компонентами поля. Полную информацию дает набор многомерных распределений или тензорных корреляционных функций (КФ). Последние по Глауберу [54] определяются следующим образом (используется запись, пригодная и при квантовом рассмотрении):

$$G_{1\dots 2n}^{(n)} \equiv \langle E_1^{(-)} \dots E_n^{(-)} E_{n+1}^{(+)} \dots E_{2n}^{(+)} \rangle.$$
(7.2.13)

Здесь нижние индексы заменяют совокупность аргументов, например $E_1 = E_{\alpha_1}(r_1, t_1)$. Мы для простоты рассматриваем лишь КФ с четными числами полей, так как в оптике моменты типа $\langle E_1 E_2 E_3 \rangle$ обычно равны нулю¹), и, кроме того, их непросто регистрировать.

КФ стационарного поля инвариантны относительно начала отсчета времени, т. е. относительно замены временных аргументов

$$t_1, \ldots, t_{2n} \rightarrow [t_1 + \Delta t, \ldots, t_{2n} + \Delta t, \qquad (7.2.14)$$

где Δt произвольно (удобно выбрать $\Delta t = -t_1$).

¹) Исключениями являются поля на выходе нелинейных сред, возбуждаемых внешним излучением [56, 58] или нагревом [37].

В результате $G^{(n)}$ зависит от 2n-1 временных аргументов, а ее фурье-образ—спектральная $K \Phi \tilde{G}^{(n)}$ —от 2n-1 частот. Например, $K \Phi$ первого порядка ($K \Phi$ -1) имеет вид $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$; она называется функцией взаимной когерентности поля в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, а ее фурьеобраз $\tilde{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ —взаимной спектральной плотностью. При $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ $K \Phi$ -1 $G(\mathbf{r}, \tau)$ называется автокорреляционной функцией, а $\tilde{G}(\mathbf{r}, \omega)$ спектральной плотностью. Традиционные поляризационные характеристики направленного излучения, например степень поляризации или параметры Стокса, также выражаются через $K \Phi$ -1 при учете тензорных индексов [56]. При всех совпадающих аргументах $K \Phi$ переходят в моменты интенсивности (тензорные индексы опускаем)

$$G_{1...1}^{(n)} = \langle | E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1) |^{2n} \rangle = \langle I^n(\boldsymbol{r}_1) \rangle.$$
(7.2.15)

Среди всевозможных статистических моделей поля особое место занимает гауссова модель, в которой все КФ (выражаются через КФ-1 [54]:

$$G_{1...n1'...n'}^{(n)} = \sum' G_{11'}^{(1)} \dots G_{nn'}^{(1)}, \qquad (7.2.16)$$

где \sum' означает сумму из всех *n*! перестановок штрихованных индексов. Например,

$$G_{1234}^{(2)} = G_{13}^{(1)}G_{24}^{(1)} + G_{14}^{(1)}G_{23}^{(1)}.$$
(7.2.17)

Всю информацию о гауссовом (хаотическом, тепловом) поле дает корреляционная функция первого порядка $G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ или взаимная спектральная плотность $\tilde{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \omega)$.

Для грубой характеристики квазимонохроматического направленного неполяризованного гауссова поля достаточно задать в каждой точке для обоих типов поляризации (v = 1, 2) интенсивность $G_v(r)$ и масштабы когерентности $\tau_{\text{ког}} \sim 1/\Delta \omega$, $\rho_{\text{ког}}$. Смысл этих параметров поясняется ниже с помощью простых измерительных процедур.

Временная когерентность. Рассмотрим поле E'(t) на выходе из интерферометра Майкельсона (рис. 7.8). Оно состоит из двух слагаемых, отличающихся сдвигом во времени на некоторое время задержки $\tau = t' - t$:

$$E'(t) = [E(t) + E(t')]/2,$$

где E(t)—поле в плоской волне на входе в интерферометр (без учета общей для обоих лучей задержки). В соответствии с (6) находим интенсивность на выходе:

$$I'(t) = [I(t) + I(t') + 2\operatorname{Re} E^{(-)}(t) E^{(+)}(t')]/4.$$

Отсюда в случае стационарного излучения

$$\langle I' \rangle = [\langle I \rangle + \operatorname{Re} G(\tau)]/2 = \langle I \rangle [1 + \operatorname{Re} g(\tau)]/2,$$
 (7.2.18)

221

$$G(\tau) = \langle E_{\bullet}^{(-)}(0) E^{(+)}(\tau) \rangle = \langle E_{\bullet}^{*}(0) E_{\bullet}(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau}/4 \qquad (7.2.19)$$

— автокорреляционная функция для поля на входе, связанная согласно теореме Винера — Хинчина со спектральной плотностью $\tilde{G}(\omega)$ фурье-преобразованием, $g(\tau) \equiv G(\tau)/\langle I \rangle$ — нормированная КФ и $\langle I \rangle = G(0)$. Заметим, что КФ в оптике обычно нормируются на средние значения, а не на стандартные отклонения ΔI .



Рис. 7.8. Схема интерферометра Майкельсона (измерение длины продольной когерентности)



Рис. 7.9. Примерный вид зависимости средней интенсивности на выходе интерферометра Майкельсона $\langle I' \rangle$ от положения подвижного зеркала: $g(\tau)$ — нормированная функция автокорреляции поля на входе

Согласно (18) зависимость интенсивности на выходе интеферометра от времени задержки определяет вещественную часть $K\Phi$ -1. Можно показать, чот функция $G(\tau)$, как и $E^{(+)}(\tau)$, аналитична в нижней полуплоскости, поэтому ее вещественные и мнимые части связаны преобразованием Гильберта, так что в принципе можно по интерференционной картине восстановить спектр излучения. Этот метод лежит в основе фурье-спектроскопии. С другой стороны, интерференция исследуемого поля с опорной когерентной волной служит источником информации в голографической интерферометрии.

Примерный вид интерференционной картины в случае одиночной спектральной линии показан на рис. 7.9. Относительный размах колебаний выходной интенсивности называется видностью интерференционной картины или степенью когерентности. Согласно (18), (19) видность практически совпадает с $|g(\tau)|$.

Если определить время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ условием $|g(\tau_{\text{ког}})| = 1/2$, то из свойств фурье-преобразования следует $\tau_{\text{ког}} \sim 2\pi/\Delta\omega$. Отсюда длина продольной когерентности с $\tau_{\text{ког}}$ имеет порядок обратной ширины спектра, выраженной в сантиметрах в минус первой степени:

$$l_{\rm kor} \sim 2\pi c/\Delta \omega \equiv 1/\Delta \nu. \qquad (7.2.20)$$

Например, для линий с естественным уширением в видимом диапазоне $\Delta \omega \sim 2 \cdot 10^6 \, \mathrm{c}^{-1}$, $l_{\mathrm{kor}} \sim 10^5 \, \mathrm{cm}$. Наглядно это средняя длина цуга, испускаемого атом **м при** спонтанном излучении. В случае

где

222

одномодового лазера оценка по формуле Таунса (7.1.39) дает длину когерентности порядка световой секунды.

Пространственная когерентность. Корреляцию полей в двух точках r_1 и r_2 можно измерить с помощью интерферометра Юнга экрана с двумя отверстиями, установленного перпендикулярно направлению на источник (рис. 7.10).



Рис. 7.10. Схема интерферометра Юнга (измерение радиуса поперечной когерентности)

Интерференционная картина в произвольной точке за экраном аналогично (18) определяется КФ-1 общего вида:

$$G_{12}(\tau) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t+\tau) \rangle, \quad (7.2.21)$$

а на оси симметрии — функцией $G_{12}(0)$. Радиус когерентности $\rho_{\text{ког}}$ определяется расстоянием между отверстиями, при котором в центре видность падает до 50%.

Идеальный лазер, работающий на одной поперечной моде, излучает плоские или сферические волны, для которых $\rho_{\rm kor} = \infty$. В случае же многомодового лазера или, вообще, хаотического (теплового) источника $\rho_{\rm kor}$ в дальней зоне ($z \gg a^2/\overline{\lambda}$) определяется поперечным размером источника *a* и расстоянием до него *z* (рис. 7.10):

$$\rho_{\rm KOF} \sim \bar{\lambda} z/a \equiv z \vartheta_{\rm g} \equiv \bar{\lambda}/\vartheta_a, \qquad (7.2.22)$$

где ϑ_{n} — угол дифракции и ϑ_{a} — угловой размер источника. Радиус поперечной когерентности вследствие дифракции нарастает по мере распространения излучения. Форма фазовых фронтов при этом выравнивается, приближаясь к сферической. Теорема Ван Циттерта — Цернике [3, 53, 56], которая описывает это явление количественно, утверждает, что зависимость $K\Phi$ -1 от $(r_{1}$ — $r_{2})_{\perp}$ является фурье-образом распределения яркости по сечению источника.

Соотношение (22) позволило Майкельсону с помощью «звездного» интерферометра определить угловые диаметры некоторых звезд, для которых $\vartheta_a \ge 10^{-7}$ рад и $\rho_{\rm kor} \le 10$ м. При меньших ϑ_a радиус когерентности определяется уже искажениями волнового фронта атмосферой. Этого недостатка лишен интерферометр интенсивности Брауна — Твисса (см. ниже).

Объем когерентности и фактор вырождения. Объемом когерентности называют произведение площади когерентности ρ_{kor}^2 на длину когерентности $l_{\text{ког}}$. Для дальней зоны хаотического источника из (20) и (22) следует

$$V_{\rm Kor} = \overline{\lambda}^4 / \Delta \lambda \Delta \Omega_a, \qquad (7.2.23)$$

где $\Delta \lambda = \overline{\lambda^2}/l_{\text{ког}}$ и $\Delta \Omega_a \equiv (a/z)^2$ — телесный угол, под которым виден источник.

Важным безразмерным статистическим параметром излучения является фактор вырождения—средняя энергия поля (одной поляризации) в единицах $\hbar \widetilde{\omega}$, заключенная в объеме когерентности, т.е. общее число фотонов в объеме $V_{\rm ког}$ или, иначе, число фотонов, пересекающих площадь когерентности за время когерентности:

$$\delta \equiv \langle \mathscr{E} \rangle_{\text{kor}} / \hbar \overline{\omega} .$$
(7.2.24)

Выразим «С» через спектральную яркость излучения:

$$\langle \mathscr{E} \rangle_{\text{kor}} = I_{\omega\Omega} \Delta \omega \Delta \Omega_{\mathbf{a}} \tau_{\text{kor}} \rho_{\text{kor}}^2 = 2\pi \overline{\lambda}^2 I_{\omega\Omega}. \tag{7.2.25}$$

Отсюда

$$\delta = \overline{\lambda}^3 I_{\omega\Omega} / \hbar c \equiv \langle N \rangle. \tag{7.2.26}$$

Таким образом, фактор вырождения равен спектральной яркости в единицах $\hbar c/\bar{\lambda}^3$. Иначе, среднее число фотонов в объеме когерентности совпадает со средним числом фотонов в одной моде $\langle N \rangle$. В равновесном поле $\delta = \mathscr{N}(\bar{\omega}) \equiv [\exp(\hbar\bar{\omega}/\kappa T) - 1]^{-1}$ (в неравновесном под T следует понимать яркостную температуру T_{igh}). Фактор вырождения $\delta = \langle N \rangle$ является не только удобной мерой

Фактор вырождения $\delta = \langle N \rangle$ является не только удобной мерой спектральной яркости, он также определяет применимость классической статистики—при $\delta \leq 1$ (т. е. $\hbar \omega \leq \kappa T$) становится существенной фотонная структура поля.

Таблица 7.1

Основные типы распределений для числа фотонов и энергии

Состояние	Квантовая теория		Классическая теория	
	Число мод			
	1	>>1	1	>>1
Когерентное (ла- зерное)	Пуассоновское	Пуассоновское	δ(ℰーℰ₀)	Гауссово
Хаотическое (тепловое)	Геометрическое	>	Больцмановское	>
К-фотонное (сме- шанное)	$P_K = \langle N \rangle / K$ $P_0 = 1 - P_K$	>		

Разобьем пространство в дальней зоне квазимонохроматического источника на ячейки с объемом $V_{\rm ког}$. Излучение в любой паре точек, принадлежащих одной ячейке, по определению взаимно когерентно, и поле в пределах ячейки можно приближенно считать одномодовым, т. е. полагать его сферической монохроматической волной с определенными амплитудой $|E_0|$ и фазой φ . При переходе от одной ячейки к другой $|E_0|$ и φ будут флуктуировать случайным образом. Таким образом, пространственное распределение стационарного поля образует ансамбль состояний гармонического осциллятора.

۱

Поля, принадлежащие различным объемам когерентности, являются по определению некоррелированными и, вообще, независимыми. Следовательно, в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей распределение энергии в объеме V, много большем $V_{\rm ког}$, будет гауссовым с дисперсией, обратно пропорциональной числу ячеек $V/V_{\rm ког}$. В квантовой области, когда $\delta \leq 1$, гауссово распределение для многомодового поля сменяется пауассоновским (§ 7.6).

В табл. 7.1 приведены некоторые характерные типы распределений энергии поля или числа фотонов. Состояния поля, названные условно К-фотонными, не имеют классических аналогов и проявляют эффекты антигруппировки и сверхгруппировки фотонов (§ 7.6.).

Статистика фотоотсчетов. Формула Манделя. Закон распределения интенсивности поля в одной «точке» можно измерить с помощью ФЭУ, работающего в режиме счета фотонов. При этом средняя интенсивность света $\langle I \rangle$ устанавливается достаточно малой, чтобы на выходе ФЭУ возникали отдельные неперекрывающиеся импульсы тока (рис. 7.11). Многократный подсчет числа импульсов *m*, появляющихся за некоторый фиксированный интервал выборки *T*, позволяет найти закон распределения *P*(*m*) числа первичных фотоэлектронов, вырываемых падающим светом из фотокатода (общая длительность измерения должна значительно превышать, конечно, время когерентности $\tau_{\rm ког}$).

Найдем связь статистик фотоотсчетов и поля. Пусть $T \ll \tau_{\text{ког}}$ и $A \ll A_{\text{ког}}$, тогда можно пренебречь изменением интенсивности поля за время одной выборки T и вдоль поверхности катода A. При этом условии распределение P(m) будет определяться через P(I) независимо от объема детектирования $V_{\text{дет}} = cTA$. Здесь $\tau_{\text{ког}}$, $A_{\text{ког}} = \rho_{\text{ког}}^2$ — характерные масштабы флуктуаций поля и указанные неравенства позволяют считать детектор «точечным» или «одномодовым», т. е. измеряющим одну степень свободы поля (для этого надо, чтобы он измерял один тип поляризации).

Предположим сначала, что интенсивность поля *I* постоянна, т. е. не меняется от выборки к выборке. Существенно, что даже в этом случае число фотоэлектронов в одной выборке является, согласно принципам квантовой механики, случайным, непредсказуемым. Сам процесс измерения энергии поля неизбежно вносит дополнительную пуассоновскую стохастичность в показания детектора (если исключить нереалистичный случай 100%-ного квантового выхода ФЭУ и чистого энергетического состояния поля с определенным числом фотонов). С помощью полуклассической (§ 2.1) или полностью квантовой (§ 7.7)

225

теории возмущения мы можем определить лишь вероятность $W_1 \Delta t \sim I$ ионизации одного атома катода за малый интервал Δt .

В случае достаточно малого Δt вероятность ионизации любого из N независимых атомов детектора будет в N раз больше и также



Рис. 7.11. Связь статистик поля и фотоэлектронов с полуклассической точки зрения: E — напряженность поля; i — ток ФЭУ; a) в случае поля с постоянной амплитудой E_0 число фотоэлектронов m_i , возникающих за некоторый интервал времени T, имеет пуассоновское распределение; b) флуктуации амплитуды поля при $T \ll \tau_{KOF}$ вызывают дополнительные флуктуации фотоэлектронов детектора (эффект группировки); e) многомодовый ($T \gg \tau_{KOF}$) детектор усредняет флуктуации поля, и эффект группировки не наблюдается

пропорциональна І:

$$W = NW_1 \equiv (\alpha/T) I.$$
 (7.2.27)

Здесь а — коэффициент пропорциональности, который можно представить в виде

$$\alpha = \eta V_{\text{ger}} / 2\pi \hbar \overline{\omega}, \qquad (7.2.28)$$

где $V_{\text{дет}} \equiv cTA$ — эффективный объем детектирования, $\eta \equiv \sigma l N_0 = \sigma N/A$ — квантовый выход тонкого катода толщины l, σ — сечение ионизации и $N_0 \equiv N/Al$ — концентрация атомов (считаем, что σ постоянно в пределах ширины спектра поля).

По предположению все моменты времени в пределах T равноправны, так как на катод падает «чистая» синусоидальная волна, и электрон может появиться с равной вероятностью $\alpha I \Delta t/T$ в любом малом интервале Δt . Такая вероятностная модель, как легко показать (см., например, [24]), приводит к распределению Пуассона с параметром αI :

$$P(m|I) = C(\alpha I)^m/m!, \quad C \equiv e^{-\alpha I}.$$
 (7.2.29)

Для учета флуктуаций интенсивности от выборки к выборке надо усреднить (29) с помощью распределения P (1):

$$P(m) = \int_{0}^{\infty} dI P(m|I) P(I) \equiv \langle P(m|I) \rangle.$$
 (7.2.30)

В результате получаем полуклассическую формулу Манделя для распределения фотоотсчетов, т. е. для вероятности обнаружения m импульсов на выходе $\Phi \Im Y$:

$$P(m) = \langle (\alpha I)^m e^{-\alpha I} \rangle / m!.$$
(7.2.31)

Квантовая теория, развитая в основном Глаубером (§ 7.6), дает такое же по форме выражение с тем лишь отличием, что вероятность P(I) заменяется на *квазивероятность* функцию, которая при некоторых состояниях поля имеет отрицательные значения и принимает сингулярные формы (типа производных от δ -функции).

Разложение (31) в ряд по степеням эффективности детектора α позволяет выразить P(m) через старшие моменты интенсивности $G^{(k)} \equiv \langle I^k \rangle$, где $k \gg m$:

$$P(m) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{k-m} \alpha^{k} G^{(k)}/m! (k-m)! \qquad (7.2.32)$$

При достаточно малом объеме детектирования ($\alpha \sim TA \rightarrow 0$) можно, как правило, учитывать лишь первый член этого ряда, т. е. пренебрегать экспонентой в (31). При этом P(m) можно представить в виде

$$P(m) = \frac{T^{m}}{m!} W^{(m)} = \frac{(NT)^{m}}{m!} \langle W_{1}^{m} \rangle, \qquad (7.2.33)$$

где $W^{(m)}$ — *m*-я производная P(m) по T, W_1 — вероятность ионизации первого атома в единицу времени, N — общее число атомов детектора.

Формула Манделя (31) описывает ансамбль выборок, отличающихся сдвигом во времени (благодаря предполагаемой стационарности и эргодичности поля). Легко видеть, что в случае однородного и «пространственно-эргодичного» по осям x, y излучения, распространяющегося примерно вдоль оси z, эта же формула описывает ансамбль выборок, отличающихся сдвигом в плоскости x, y. Это, в принципе, позволяет исследовать «в реальном времени» статистику нестационарных полей с помощью большого числа счетчиков, расположенных в различных точках сечения пучка на площади, много большей $A_{\rm kor}$.

Далее, из вывода формулы (31) ясно, что она справедлива и в случае произвольного объема детектирования $V_{ger} = cTA$, если под I понимать усредненную по V_{ger} интенсивность:

$$\overline{I}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{AT} \int dx' \, dy' \, dt' \, I(x', y', z, t'), \qquad (7.2.34)$$

где пределы интегрирования $x \pm a/2$, $y \pm b/2$, $t \pm T/2$ определяются размерами и постоянной времени детектора. При этом распределение P(I) надо заменить на $P(\overline{I})$. В предельном случае $A \gg A_{\text{ког}}$ и/или $T \gg T_{\text{ког}}$ («многомодовое» детектирование) флуктуации I полностью усредняются: $P(\overline{I}) = \delta(\overline{I} - \langle I \rangle)$, так что из (31) получаем снова распределение Пуассона $P(m|\langle I \rangle)$, но уже не зависящее от статистики поля. Наблюдая зависимость P(m) от A, T в промежуточном случае, можно, в принципе, получить информацию о масштабах когерентности поля.

Группировка фотонов. Связь (31) между распределениями определяет и связи между моментами фотоотсчетов

$$\langle m^k \rangle \equiv \sum_{m=0}^{\infty} m^k P(m)$$
 (7.2.35)

и моментами интенсивности

$$\langle I^{k} \rangle \equiv \int_{0}^{\infty} dI \ I^{k} P(I). \tag{7.2.36}$$

Методом производящих функций (§ 7.6) легко найти общее правило $\langle m(m-1) \dots (m-k+1) \rangle = \alpha^k \langle I^k \rangle$. (7.2.37)

Слева здесь стоит линейная комбинация моментов, называемая факториальным моментом порядка k. Отсюда, в частности, следует $\langle m \rangle = \alpha \langle I \rangle$ и

$$\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m \rangle + \alpha^2 \langle \Delta I^2 \rangle,$$
 (7.2.38)

$$\langle \Delta I^2 \rangle \equiv \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2,$$
 (7.2.39)

и аналогично для $\langle \Delta m^2 \rangle$. Таким образом, флуктуации фотоэлектронов содержат кроме обычной пуассоновской (дробовой) части дополнительный вклад от флуктуаций интенсивности света. Лишь в случае одномодового стабилизированного лазера ($\Delta I=0$) этот вклад отсутствует. В других случаях флуктуации электронов согласно (38) должны, казалось бы, всегда превышать дробовой шум, так как из определения (39) и условия $P(I) \gg 0$ следует ($\Delta I^2 \gg 0$.

Наличие этих «избыточных» флуктуаций получило название эффекта группировки фотоотсчетов, поскольку в пуассоновском потоке импульсов появление одного импульса по определению никак не влияет на появление следующего и неравенство $\langle \Delta m^2 \rangle > \langle m \rangle$ означает «тенденцию» импульсов к группировке. Аналогичный эффект $\langle \Delta N^2 \rangle > \langle N \rangle$ для чисел фотонов называется *группировкой* или корреляцией фотонов. Близкий эффект был обнаружен Брауном и Твиссом в 1956 г. в хаотическом свете ртутной лампы.

В хаотическом свете из (11) и (38) следует

$$\langle \Delta m^2 \rangle_T = \langle m \rangle (1 + \langle m \rangle),$$
 (7.2.40)

т. е. избыточная часть дисперсии в $\langle m \rangle$ раз превышает пуассоновскую, так что эффект группировки фотонов сильнее проявляется в классических полях. С классической точки зрения сильные флуктуации амплитуды волны $|E_0|$, образованной множеством независимых источников со случайными фазами, совершенно очевидны. Более неожиданной для классической теории является антигруппировка фотонов и соответственно фотоотсчетов, при которой $\Delta m^2 < \langle m \rangle$ в противоречии с (38) и исходной формулой Манделя (31), если в ней полагать $P(I) \ge 0$ (в квантовой теории последнее условие, как уже отмечалось, нарушается).

Корреляция интенсивностей. Распределение фотоотсчетов (31) не дает прямой информации о временном или пространственном спектре излучения, так как выражается через «одноточечные» КФ со всеми совпадающими аргументами (см. (32)). Чтобы определить полностью КФ *п*-го порядка, надо измерять поле в 2n точках пространства — времени. В случае КФ-1 это осуществляется с помощью интерферометров, как это было схематически описано выше.

Рассмотрим теперь измерение корреляционной функции интенсивности, а именно КФ-2 следующего частного вида:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_1, x_2) = G^{(2)}_{12}(\tau) = \langle : I(x_1) | I(x_2) : \rangle, \qquad (7.2.41)$$

где $x_i \equiv \{r_i, t_i\}, \tau \equiv t_2 - t_1$ и вектор $r_2 - r_1 \equiv \rho$ перпендикулярен направлению распространения. Двоеточия напоминают, что при переходе к квантовой теории необходимо перед усреднением переставить все операторы $E^{(+)}$ правее $E^{(-)}$.

В случае гауссова поля с помощью (17) находим

$$G_{12}^{(2)}(\tau) = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle [1 + |g_{12}^{(1)}(\tau)|^2], \qquad (7.2.42)$$

где $g_{12}^{(1)}(\tau)$ — нормированная КФ-1. Таким образом, в хаотическом поле измерение корреляции интенсивностей дает информацию и о корреляции амплитуд. Эта связь $G^{(2)}$ и $G^{(1)}$ лежит в основе спектроскопии оптического смешения [57], используются также термины спектроскопия флуктуаций интенсивности или метод корреляции фотонов.

В общем случае $G^{(2)}$ не выражается через $G^{(1)}$ и масштабы когерентности второго порядка могут отличаться от $\rho_{\text{ког}}^{(1)}$, $\tau_{\text{ког}}^{(1)}$: так, в «двухфотонном свете» $\rho_{\text{ког}}^{(2)} \gg \rho_{\text{ког}}^{(1)}$.

Для измерения временной зависимости $G^{(2)}(\tau)$ при $\rho = 0$ используют один детектор с линией задержки и электронным коррелометром. Можно также применять спектральный анализ флуктуаций фототока. Впервые эксперимент такого типа был проведен Форрестером, Гудмунсеном и Джонсоном в 1955 г. еще до появления лазеров ¹). Современная аппаратура позволяет получить спектральное разрешение вплоть до долей герца.

Для исследования пространственной когерентности второго порядка $G^{(2)}(\rho)$ необходимо использовать два детектора с переменным расстоянием ρ между ними. Согласно (42) при изменении ρ от ∞ до 0 $G^{(2)}$ возрастает в идеальном случае вдвое (рис. 7.12). Этот эффект был обнаружен Брауном и Твиссом в 1956 г. и использован ими для измерения угловых диаметров звезд [59], интенсивности которых коррелируют на расстояниях порядка сотен метров.





Рис. 7.12. Эффект корреляции и антикорреляции интенсивностей света: i_1 , i_2 — фототоки детекторов; ρ — сдвиг одного из детекторов из симметричного положения; 1— тепловое излучение; 2— лазерное; 3— двухфотонное.

Рис. 7.13. Схема эксперимента Брауна — Твисса по наблюдению корреляции интенсивностей света

Схема эксперимента Брауна — Твисса по измерению $G^{(2)}(\rho)$ в свете ртутной лампы представлена на рис. 7.13. Расщепление луча с помощью полупрозрачного зеркала позволяет измерять корреляцию поля в сколь угодно близких точках. Пусть ФЭУ работают в режиме счета фотонов, тогда корреляция отсчетов в двух каналах $\langle m_1 m_2 \rangle$ равна $\alpha_1 \alpha_2 \langle I_1 I_2 \rangle$. Отсюда с помощью (42) находим

$$\langle m_1 m_2 \rangle = \langle m_1 \rangle \langle m_2 \rangle (1 + |g_{12}^{(1)}(0)|^2).$$
 (7.2.43)

Этот результат справедлив лишь в случае одномодовых детекторов, когда постоянная времени детектора T много меньше $\tau_{\rm коr}$ и апертура детектора A много меньше $A_{\rm кor}$. Если же, например, $T \gg \tau_{\rm кor}$, то во втором слагаемом (43) появляется малый множитель порядка $\tau_{\rm кor}/T$, что уменьшает наблюдаемый эффект.

Эффект корреляции интенсивностей тесно связан с флуктуациями интенсивности света на входе интерферометра Брауна—Твисса. Действительно, пусть I_1 и I_2 —случайные интенсивности в плечах интерферометра и ΔI_1 , ΔI_2 —их флуктуации ($\Delta I_n \equiv I_n - \langle I_n \rangle$). Выход-

¹) Возможность проведения аналогичных экспериментов по «гетеродинированию» света обсуждалась еще раньше Гореликом [63].

ной сигнал $\langle i_1 i_2 \rangle$ пропорционален

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + \langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle. \tag{7.2.44}$$

Второе слагаемое здесь характеризует взаимную корреляцию ин тен сивностей. Из условия $I_1 + I_2 = I$ находим связь

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \langle (\Delta I_1 + \Delta I_2)^2 \rangle = \langle \Delta I_1^2 \rangle + \langle \Delta I_2^2 \rangle + 2 \langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle. \quad (7.2.45)$$

Таким образом, корреляция определяется дисперсиями:

$$\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle = (1/2) \left(\langle \Delta I^2 \rangle - \langle \Delta I_1^2 \rangle - \langle \Delta I_2^2 \rangle \right). \tag{7.2.46}$$

Предположим сначала, что падающий свет имеет постоянную интенсивность (излучение одномодового лазера), тогда $\Delta I_n = 0$ и согласно (46) корреляция равна нулю. При этом $\langle I_1 I_2 \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$. Пусть теперь на интерферометр падает обычный свет от теплового или люминесцентного источника, тогда согласно (11) $\langle \Delta I^2 \rangle = \langle I \rangle^2$. Предположим, что такие же связи имеют место и для вторичных пучков: $\langle \Delta I_n^2 \rangle = \langle I_n \rangle^2$. Отсюда с помощью (46) находим (рис. 7.12)

$$\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle = (1/2) \left(\langle I \rangle^2 - \langle I_1 \rangle^2 - \langle I_2 \rangle^2 \right) = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle, \quad (7.2.47)$$
$$g_{12}^{(2)} \equiv \langle I_1 I_2 \rangle / \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle = 2.$$

Проведенное рассуждение легко повторить на фотонном языке, заменив I_n на числа фотонов N_n . При этом надо добавить к дисперсии дробовые (пуассоновские) шумы, так что

$$\langle \Delta N^2 \rangle_{\pi_{23}} = \langle N \rangle, \quad \langle \Delta N^2 \rangle_T = \langle N \rangle + \langle N \rangle^2.$$
 (7.2.48)

Результат, по существу, будет тот же: в тепловом излучении имеется корреляция фотонов, вызванная их группировкой или, иначе говоря, наличием избыточных (по отношению к дробовым) шумов.

Рассмотрим далее поле с определенным числом фотонов N. Эти N фотонов распределяются полупрозрачным зеркалом случайным образом по двум каналам с вероятностями p и q=1-p. Эта картина соответствует известной вероятностной модели Бернулли [24], согласно которой вероятность того, что в первый канал попадет N_1 фотонов, определяется биномиальным распределением:

$$P(N_1) = C_N^{N_1} p^{N_1} q^{N-N_1}. (7.2.49)$$

Моменты этого распределения имеют вид

$$\langle N_1 \rangle = pN, \quad \langle N_1^2 \rangle = p^2 N^2 + pqN, \langle N_2 \rangle = qN, \quad \langle N_2^2 \rangle = q^2 N^2 + pqN.$$
 (7.2.50)

Отсюда находим

3

$$\langle N_1 N_2 \rangle = (1/2) (N^2 - \langle N_1^2 \rangle - \langle N_2^2 \rangle) = pqN (N-1).$$
 (7.2.51)

Примечательно, что теперь корреляция отрицательна:

$$\langle \Delta N_1 \Delta N_2 \rangle = \langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle = -pqN.$$

При этом (рис. 7.12)

$$g_{12}^{(2)} = 1 - 1/N. \tag{7.2.52}$$

231

Таким образом, антигруппировка фотонов в исходном пучке приводит к «антикорреляции» фотонов в разделенных пучках.

Рассмотрим, наконец, общий случай с произвольной статистикой поля. Для этого надо вторично усреднить (51) по распределению фотонов P(N) в падающем поле. В результате находим

$$\langle N_1 N_2 \rangle = pq \langle : N^2 : \rangle, \quad g_{12}^{(2)} = \langle : N^2 : \rangle / \langle N \rangle^2 \equiv g^{(2)}, \quad (7.2.53)$$

где $\langle:N^2:\rangle \equiv \langle N(N-1)\rangle$ — нормальный (или факториальный) момент и угловые скобки означают усреднение по распределению P(N). Итак, относительная корреляция чисел фотонов в двух точках поля $g_{12}^{(2)}$ —1 определяется нормированным факториальным моментом поля $g^{(2)}$. Этот же результат следует из более строгой квантовой теории поля (см. (7.6.31)).

§ 7.3. Гамильтонова форма уравнений Максвелла

В настоящем разделе будет показано, что уравнения Максвелла для поперечной части поля, т. е. поля излучения, сводятся к системе независимых уравнений для гармонических осцилляторов. Эти урав-



Рис. 7.14. К определению длины квантования L: E(z) — реальное поле; $\tilde{E}(z)$ — фиктивное периодическое в пространстве поле

нения легко представить в форме уравнений Гамильтона классической механики, что позволяет воспользоваться алгоритмом квантования, определяющим коммутатор двух операторов через скобки Пуассона для соответствующих им классических величин.

Уравнения Максвелла в k, t-представлении. Пусть нас интересует эволюция поля излучения в некоторой ограниченной области пространства за ограниченный период времени T. Разделим мысленно все пространство на одинаковые кубические ячейки с линейным размером $L > cT^{-1}$), причем одна из ячеек включает все измеряемое за время T поле.

Рассмотрим зависимость какой-либо компоненты поля от одной из координат, например $E_x(z)$, в фиксированный момент времени (рис. 7.14). Определим периодическую в пространстве функцию $\tilde{E}_x(z)$ условием $\tilde{E}_x(z+nL) \equiv E_x(z)$, где -L/2 < z < L/2, $n=0, \pm 1, \ldots$ Внутри интервала наблюдения -L/2 - L/2 фиктивное периодическое поле \tilde{E} совпадает с реальным E, поэтому \tilde{E} и E физически эквивалентны и в дальнейшем мы опустим знак «~».

Периодическое по г поле можно представить в виде суммы

¹) Предполагается, что это условие выполняется с запасом — так, чтобы поле на границах оставалось равным нулю в течение всего времени наблюдения.

пространственных гармоник (индекс х опускаем):

$$E(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m \exp(ik_m z),$$

$$k_m \equiv 2\pi m/L, \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \dots$$
(7.3.1)

Чтобы определить амплитуду *m*-й гармоники, подействуем на (1) слева оператором

$$\int_{L/2}^{L/2} dz \exp\left(-ik_n z\right),$$

1./2

÷....

$$\int_{-L/2}^{-L/2} dz \exp(-ik_n z) E(z) = \sum_m E_m L \operatorname{sinc} [\pi (m-n)] = E_n L. \quad (7.3.2)$$

Последнее равенство следует из того, что функция целого аргумента

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \left[i \left(k_m - k_n \right) z \right] = L \operatorname{sinc} \left[\pi \left(m - n \right) \right] = L \delta_{mn} \quad (7.3.3)$$

отлична от нуля лишь в одной точке m = n, в которой она равна единице (рис. 7.15). Из вещественности E(z) следует $E_{-m} = E_m^*$.

На конечных этапах вычислений обычно можно устремлять длину квантования L к бесконечности, при этом ряд Фурье (1) переходит в интеграл:

$$E(z) = (L/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dk \, E(k) \, e^{ikz}, \quad (7.3.4)$$

где теперь

$$E(k) = L^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, E(z) \, e^{-ikz}.$$
 (7.3.5)



Рис. 7.15. Функция sinc (лл) в случае дискретного (точки) и непрерывного (штриховая линия) аргументов

При выводе (5) используется следующее представление δ-функции (ср. (3)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \, e^{ikz} = \lim_{L \to \infty} L \operatorname{sinc} \left(kL/2 \right) = 2\pi \delta \left(k \right). \tag{7.3.6}$$

Множитель $L/2\pi$ добавлен в разложение (4) для того, чтобы дискретные фурье-компоненты при $L \to \infty$ совпадали с непрерывными: $E_m \to E(k_m)$. Сравнение (1) и (4) дает правило замены символов суммирования и интегрирования

$$\sum_{m} \ldots \longrightarrow (L/2\pi) \int dk \ldots$$
(7.3.7)

Величина $L/2\pi$ называется плотностью мод (в случае одного измерения и одной поляризации), обратная величина $2\pi/L$ равна расстоянию между соседними модами m, m+1 на оси k.

Повторяя описанную процедуру для других компонент поля E_y , E_z и для зависимостей от x, y, получаем трехмерный ряд Фурье для поля:

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{lmn} E_{lmn}(t) e^{i 2\pi (lx + my + nz)/L} = \sum_{k} E_{k}(t) e^{ik \cdot \mathbf{r}}, \quad (7.3.8)$$

$$E_{k}(t) = L^{-3} \int_{L^{3}} d^{3}r E(r, t) e^{-ik \cdot r} = E_{-k}^{\bullet}(t), \qquad (7.3.9)$$

$$\boldsymbol{k} = (2\pi/L) \{l, m, n\}, \quad l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (7.3.10)$$

Магнитное поле разлагается в ряд аналогичным образом. Представление произвольного поля (8) в виде суммы плоских волн позволяет задавать непрерывное пространственное распределение $E_{\alpha}(\mathbf{r})$ счетным множеством комплексных чисел $E_{k\alpha}$. «Дозволенные» векторы \mathbf{k} образуют решетку в k-пространстве, разбитом условием периодичности на ячейки с «объемом» $(2\pi/L)^3$. Заметим, что ввиду связи $E_{-k} = E_k^*$ не все числа $E_{k\alpha}$ являются независимыми. Сумму (8) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{Re}\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{F}\right) = \operatorname{Re}\sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}} + i\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}\right) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, (7.3.11)$$

где F(r, t) — произвольное вещественное поле и $F_k = F_{-k}^*$ — его гармоники.

Разложение по пространственным гармоникам (8) позволяет однозначно разделить поле E(r) на две составляющие: поперечную $E_{\perp}(r)$ и продольную $E_{\parallel}(r)$ (аргумент *t* опускаем):

$$E_{\perp}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\nu=1, 2} e_{\mathbf{k}\nu} E_{\mathbf{k}\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

$$E_{\parallel}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}3} E_{\mathbf{k}3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$
(7.3.12)

где единичные ортогональные векторы e_{kv} образуют правую тройку, причем $e_{k3} = \hat{k} = k/k$. Из (12) следуют

div
$$E = \sum_{k} i\mathbf{k} \cdot E_{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \text{div } E_{\parallel}$$
,
rot $E = \sum_{k} i\mathbf{k} \times E_{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \text{rot } E_{\perp}$ (7.3.13)

и аналогичные соотношения для магнитного поля. Подставив (13) в уравнения Максвелла (4.1.9), при є = 1 получим

$$c \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_{\perp} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\perp} = 4\pi \boldsymbol{j}_{\perp}, \quad c \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_{\perp} + \dot{\boldsymbol{H}}_{\perp} = 0, \quad (7.3.14)$$

$$-E_{\parallel} = 4\pi J_{\parallel}, \qquad H_{\parallel} = 0, \qquad (7.3.15)$$

div
$$E_{\parallel} = 4\pi\rho$$
, div $H_{\parallel} = 0.$ (7.3.16)

Следовательно, продольная часть переменного магнитного поля равна нулю, а продольная часть электрического поля определяется положением зарядов в тот же момент времени, без запаздывания, поэтому интересующее нас в оптике поле излучения в вакууме поперечно и определяется динамическими уравнениями (14) через поперечную часть заданных (сторонних) токов $\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j}$ (в дальнейшем мы опустим индекс (« | »).

Подставив (12) в (14), найдем уравнения движения для пространственных гармоник:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}} - ic\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}} = -4\pi \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k}}, \qquad (7.3.17a)$$

$$\dot{H}_{k} + ick \times E_{k} = 0, \qquad (7.3.176)$$

или, после исключения H_k ,

$$\ddot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{k}}^2 \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}} = -4\pi \dot{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{k}}.$$
(7.3.17b)

Здесь $\omega_k \equiv ck$ и

$$\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k}}(t) \equiv L^{-3} \int_{L^{3}} d^{3} \boldsymbol{r} \, \boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{j}_{-\boldsymbol{k}}^{*}(t), \qquad (7.3.18)$$

где Π_k — проекционный тензор (см. (4.1.17)). Игак, уравнения Максвелла для поперечного поля в k, t-представлении сводятся к системе неоднородных уравнений для независимых гармонических осцилляторов. Заметим, что гармоники E_k и E_{-k} всегда возбуждаются вместе ввиду того, что $E_k = E_{-k}^*$.

В случае свободного поля, т. е. когда токи в L^3 отсутствуют, пространственные гармоники согласно (17) колеблются без затухания с собственными частотами мод ω_k :

$$E_{k}(t)_{c_{BOG}} = (E_{k_{0}}e^{-i\omega_{k}t} + E'_{k_{0}}e^{i\omega_{k}t})/2, H_{k}(t)_{c_{BOG}} = \hat{k} \times (E_{k_{0}}e^{-i\omega_{k}t} - E'_{k_{0}}e^{i\omega_{k}t})/2.$$
(7.3.19)

Здесь E_{k_0} является начальной амплитудой плоской волны, распространяющейся в направлении +k, а не зависимая от нее величина E'_{k_0} —амплитудой встречной волны, распространяющейся в направлении -k. Требование $E_k = E^*_{-k}$ дает $E'_{k_0} = E^*_{-k_0}$. Отсюда, суммируя по всем k, получаем

$$E(\mathbf{r}, t)_{cB06} = \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}} E_{k0} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{k}t)},$$

$$H(\mathbf{r}, t)_{cB06} = \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \times E_{k0} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{k}t)}.$$
(7.3.20)

Таким образом, состояние свободного поля в произвольной точке r, t задается множеством комплексных векторов E_{k0} .

При наличии в L^3 сторонних токов к свободному полю добавляется вынужденное, определяемое через функции $j_k(t)$ согласно неоднородному уравнению (17в). Например, монохроматическая плоская волна тока «раскачает» вынужденное поле со своей частотой ω , которая может отличаться от ω_k (ср. (4.1.20)). В общем случае функция $E_k(t)$, конечно, не гармоническая. Вынужденное поле можно искать также в виде (20), полагая E_{k0} медленными функциями координаты в случае стационарных токов (см. гл. 6, где использовалось обозначение $E_{k0} = E_k^{(+)}(z)$) или функциями времени в случае типичных для квантовой механики нестационарных задач.

Иногда удобно описывать поле с помощью векторного потенциала A(r, t). В случае кулоновской калибровки поле A полагается поперечным и оно однозначно определяется соотношениями

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{7.3.21}$$

Подставив в (14) rot \dot{A} вместо \dot{H} , получим rot ($cE + \dot{A}$) = 0, т. е.

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\dot{A}}/c. \tag{7.3.22}$$

Отсюда находим связи между пространственными гармониками реальных полей и их потенциала:

$$\dot{A}_k = -cE_k, \quad A_k = i\mathbf{k} \times H_k/k^2, \quad H_k = i\mathbf{k} \times A_k.$$
 (7.3.23)

Канонические переменные поля. Уравнения (17) для H_k и E_k напоминают уравнения Гамильтона для канонических координат и импульсов системы частиц q_i и p_i ; токи j_k при этом играют роль обобщенных сил. Однако в эксперименте обычно наблюдаются бегущие волны в дальней зоне излучателя с определенным направлением распространения, например вдоль +k, поэтому желательно, чтобы канонические переменные с индексом k относились только к «прямой» волне.

Совокупность четырех чисел $\{l, m, n, v\} \equiv \{k, v\} \equiv k$ задает плоскую волну или *моду* (тип колебания) свободного пространства (мы в дальнейшем будем нумеровать моды одним индексом k). При наличии токов мгновенное состояние поля в двух модах k и $\overline{k} \equiv$ $\equiv \{-k, v\}$ с одинаковыми линейными поляризациями e_{kv} задается двумя комплексными или четырьмя вещественными скалярными числами:

$$E_{k} = E_{k} \cdot e_{kv} = E'_{k} + iE'_{k}, \quad H_{k} = (\hat{k} \times e_{kv}) \cdot H_{k} = H'_{k} + iH''_{k},$$

$$E_{\bar{k}} = E_{-k} \cdot e_{kv} = E'_{k} - iE''_{k}, \quad H_{\bar{k}} = (-\hat{k} \times e_{kv}) \cdot H_{-k} = -H'_{k} + iH''_{k}. \quad (7.3.24)$$

Вместо магнитного поля можно использовать вектор-потенциал. Согласно (23) и (24)

$$A_{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\nu} = -iH_{\mathbf{k}}/k = (H_{\mathbf{k}}' - iH_{\mathbf{k}}')/k,$$

$$A_{\mathbf{k}} = (H_{\mathbf{k}}' + iH_{\mathbf{k}}')/k;$$

здесь k обозначает одновременно модуль вектора k и индекс моды. Образуем линейные комбинации:

$$q_{k} \equiv (L^{3}/4\pi\omega_{k}^{2})^{1/2} (E_{k}^{"} + H_{k}^{"}),$$

$$p_{k} \equiv -(L^{3}/4\pi)^{1/2} (E_{k}^{'} + H_{k}^{'}),$$
(7.3.25)

выбор коэффициентов пропорциональности будет ясен ниже из (37). С помощью (24) убеждаемся, что переменные $q_{\overline{b}}$, $p_{\overline{b}}$ для встречной

A COMPANY OF A DESCRIPTION OF A DESCRIPT

моды независимы от q_k , p_k :

$$q_{\overline{k}} \sim E_{\overline{k}}^{''} + H_{\overline{k}}^{''} = -E_{\overline{k}}^{''} + H_{\overline{k}}^{''},$$
$$p_{\overline{k}} \sim -E_{\overline{k}}^{'} - H_{\overline{k}}^{'} = -E_{\overline{k}}^{'} + H_{\overline{k}}^{'},$$

Удобно объединить вещественные «координату» q_k и «импульс» p_k моды в одну комплексную безразмерную переменную:

$$a_{k} \equiv (2\hbar\omega_{k})^{-1/2} (\omega_{k}q_{k} + ip_{k}) = (E_{k} + H_{k})/2ic_{k}, \qquad (7.3.26)$$

$$c_{k} \equiv (2\pi\hbar\omega_{k}/L^{3})^{1/2}.$$

Легко найти обратные преобразования:

$$E_{k} = ic_{k} \left(a_{k} - a_{\bar{k}}^{*} \right) = (\pi/L^{3})^{1/2} \left[- p_{k} - p_{\bar{k}} + i\omega_{k} \left(q_{k} - q_{\bar{k}} \right) \right],$$

$$H_{k} = ic_{k} \left(a_{k} + a_{\bar{k}}^{*} \right) = (\pi/L^{3})^{1/2} \left[- p_{k} + p_{\bar{k}} + i\omega_{k} \left(q_{k} + q_{\bar{k}} \right) \right].$$
(7.3.27)

Заметим, что в случае стоячей плоской волны $a_k = a_{\overline{k}}$, так что переменные q_k , p_k пропорциональны магнитному и электрическому полям соответственно:

$$E(\mathbf{r}, t) = -4 (\pi/L^3)^{1/2} p_k(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), H(\mathbf{r}, t) = -4 (\pi/L^3)^{1/2} \omega_k q_k(t) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$
(7.3.28)

В новых переменных разложение поля по плоским волнам имеет вид

$$E(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \kappa. c.,$$

$$H(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \times a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \kappa. c.,$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}}/k) a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \kappa. c.,$$

(7.3.29)

где введены комплексные векторы $a_{k} = \sum_{v} e_{kv} a_{kv}$.

Подставив (27) в (17), найдем уравнения для новых переменных:

$$q_k = p_k - (4\pi L^3 / \omega_k)^{1/2} j_k^{"},$$
 (7.3.30a)

$$\dot{p}_{k} = -\omega_{k}^{2}q_{k} + (4\pi L^{3})^{1/2}j_{k}^{\prime},$$
 (7.3.306)

$$\dot{a}_{k} = -i\omega_{k}a_{k} + (2\pi i/c_{k})j_{k}.$$
 (7.3.30b)

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$a_{k}(t) = a_{k}(0) e^{-i\omega_{k}t} + \frac{2\pi i}{c_{k}} \int_{0}^{t} dt' e^{i\omega_{k}(t'-t)} j_{k}(t').$$
(7.3.31)

Если разложить $a_k(t)$ и $j_k(t)$ в частотные интегралы Фурье, то из (30в) сразу находим вынужденную часть поля в k, ω -представлении (ср. (4.1.20)):

$$a_{k}(\omega)_{\mathbf{B}\mathbf{b}\mathbf{H}} = \frac{2\pi c_{k}^{-1}}{\omega_{k} - \omega - i\gamma_{k}} j_{k}(\omega),$$

237

где мы добавили затухание ($\gamma_k > 0$). Отсюда ясно, что при $\gamma_k \ll \omega_k$ спектр $a_k(\omega)$ амплитуды $a_k(t)$ в основном содержит лишь положительные частоты, близкие к собственной частоте ω_k . Если пренебречь отрицательно-частотной частью $a_k(t)$, т. е. полагать

$$a_k(t) \approx a_k^{(+)}(t) \equiv \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} a_k(\omega), \qquad (7.3.32)$$

то каждое слагаемое в сумме (29) описывает плоскую волну, распространяющуюся в направлении $+ \mathbf{k}$ (в отличие от суммы (8)).

В свободном поле это приближение согласно (31) при $j_k = 0$ выполняется строго:

$$a_k(t)_{cro6} = a_k(0) e^{-i\omega_k t}$$
. (7.3.33)

Отсюда, сравнивая (19) и (27), находим связь $E_{k0} = 2ic_k a_k$ (0).

Итак, положительно-частотная часть поля определяется функциями $a_k(t)$, а отрицательно-частотная — функциями $a_k^*(t)$:

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{r}} c_k a_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

$$E^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\mathbf{r}} c_k a_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$
(7.3.34)

В квантовой теории эти функции становятся операторами уничтожения и рождения фотонов: $a_k \rightarrow \hat{a}_k$, $a_k^* \rightarrow \hat{a}_k^+$.

°Гамильтониан поля и вещества. Из уравнений Максвелла следует (см., например, (4.1.24)), что мгновенная энергия поля

$$\mathscr{E}(t) = (1/8\pi) \int_{L^3} d^3 r \left(E^2 + H^2 \right) \Longrightarrow \mathscr{H}_0. \tag{7.3.35}$$

Примем это выражение за функцию Гамильтона поперечной части свободного поля. Подставив сюда разложение по плоским волнам (8), получим с учетом условия ортогональности (3) диагональную квадратичную форму:

$$\mathcal{H}_{0} = (L^{3}/8\pi) \sum_{k} (|E_{k}|^{2} + |H_{k}|^{2}).$$
 (7.3.36)

Согласно (19) \mathcal{H}_0 при j = 0 не зависит от t. С помощью (29) находим

$$\mathcal{H}_{0} = \sum_{k} (p_{k}^{2} + \omega_{k}^{2} q_{k}^{2})/2 = \hbar \sum_{k} \omega_{k} |a_{k}|^{2}.$$
(7.3.37)

Легко проверить, что из уравнений Гамильтона

$$q_k = \partial \mathcal{H} / \partial p_k, \quad \dot{p}_k = -\partial \mathcal{H} / \partial q_k, \quad (7.3.38)$$

при $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ следуют осцилляторные уравнения для q_k , p_k , a_k в соответствии с (30) при j = 0, что подтверждает правильность выбора (35).

Общий гамильтониан поля и системы заряженных частиц, расположенных внутри рассматриваемого объема L³, в нерелятивистском приближении равен (см. [26], § 16)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{0} + \sum_{i} (\boldsymbol{P}_{i} - e_{i} \boldsymbol{A}_{i}/c)^{2}/2m_{i} + \mathcal{H}_{\kappa y \pi},$$

$$\boldsymbol{A}_{i} \equiv \boldsymbol{A} (\boldsymbol{R}_{i}(t), t), \quad \mathcal{H}_{\kappa y \pi} \equiv \sum_{i < j} e_{i} e_{j}/|\boldsymbol{R}_{i} - \boldsymbol{R}_{j}|, \qquad (7.3.39)$$

где $\mathcal{H}_{кул}$ — энергия кулоновского взаимодействия частиц через продольное поле и R_i , P_i —канонические переменные *i*-й частицы с зарядом и массой e_i , m_i .

Из (38) и (39) следует связь «кинетического» и канонического импульсов для частиц:

$$m_i \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{A}_i / \boldsymbol{c}, \qquad (7.3.40)$$

где $V_i = \dot{R}_i$ — скорость *i*-й частицы. Следовательно, гамильтониан (39) можно представить в простом виде:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_i m_i V_i^2 / 2 + \mathcal{H}_{\kappa y,i}.$$
(7.3.39a)

Гамильтониан взаимодействия частиц и поперечного поля согласно (39) равен

$$\mathcal{V} = \sum_{i} \left(-\frac{e_i}{m_i c} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A}_i + \frac{e_i^2}{2m_i c^2} A_i^2 \right).$$
(7.3.41)

В случае частиц с собственным магнитным моментом μ_i следует добавить энергию спинового взаимодействия — $\mu_i \cdot H_i$.

Покажем, что из (38), (39) следуют обычные уравнения Ньютона с силой Лоренца для частиц и уравнения Максвелла со сторонними токами (14) для поля. Чтобы получить уравнения Ньютона, продифференцируем (40) по времени. Учитывая, что согласно (38), (39)

$$\dot{P}_{i\alpha} = (e_i/c) \, V_{i\beta} \, \partial A_{i\beta}/\partial R_{i\alpha} \,, \qquad (7.3.42)$$

находим

$$m_{i}\ddot{R}_{i\alpha} = \dot{P}_{i\alpha} - \frac{e_{i}}{c} \left(\frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial R_{i\beta}} V_{i\beta} \right) = e_{i}E_{i\alpha} + \frac{e_{i}}{c} \left[V_{i} \times H_{i} \right]_{\alpha}. \quad (7.3.43)$$

Напомним, что поля берутся в точке нахождения частицы, поэтому $dA_i/dt \neq \partial A_i/\partial t = -cE_i$.

Уравнения поля можно найти дифференцированием общего гамильтониана (39) по каноническим переменным поля p_k , q_k . При этом «силы», действующие на поле со стороны частиц, определяются вторым слагаемым в (39а). Продифференцируем его сначала по $A_{i\alpha}$ с помощью (40):

$$\frac{\partial}{\partial A_{i\alpha}} \frac{m_i V_i^2}{2} = m_i V_{i\beta} \frac{\partial V_{i\beta}}{\partial A_{i\alpha}} = -\frac{e_i}{c} V_{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial A_{i\alpha}} \left(-\frac{e_i}{c} V_i \cdot A_i \right). \quad (7.3.44)$$

Отсюда следует, что гамильтониан возмущения поперечного поля нерелятивистскими бесспиновыми частицами можно представить

вместо (41) в виде

$$\mathcal{V}^{\prime} = -\sum_{i} \frac{e_{i}}{c} V_{i} \cdot A_{i} = -\frac{1}{c} \int d^{3}r \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}, \qquad (7.3.45)$$

где **j**(**r**, t)—заданная плотность тока, определяемая координатами и скоростями частиц:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i} e_{i} \boldsymbol{V}_{i}(t) \,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_{i}(t)), \qquad (7.3.46)$$

и штрих напоминает, что в соответствии с (44) гамильтониан взаимодействия (45) точно описывает лишь возмущение поля частицами, но не наоборот.

Из уравнений Гамильтона (38) сразу следуют уравнения движения для произвольной функции канонических переменных $f(q_k, p_k, t)$:

$$df/dt = \partial f/\partial t + \{f, \mathcal{H}\}, \qquad (7.3.47)$$

$$\{f, g\} = \sum_{k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{k}} \frac{\partial g}{\partial p_{k}} - \frac{\partial g}{\partial q_{k}} \frac{\partial f}{\partial p_{k}} \right).$$
(7.3.48)

Легко проверить, что при линейном преобразовании (26) от q_k , p_k к новым независимым переменным a_k , a_k^* скобка Пуассона (48) принимает вид

$$\{f, g\} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{k} \left(\frac{\partial f}{\partial a_{k}} \frac{\partial g}{\partial a_{k}^{*}} - \frac{\partial g}{\partial a_{k}} \frac{\partial f}{\partial a_{k}} \right).$$
(7.3.48a)

Полагая $f \equiv a_k$, находим с помощью (37) и (45)

$$\dot{a}_{k} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial H}{\partial a_{k}^{*}} = -i\omega_{k}a_{k} + \frac{i}{\hbar c}\int d^{3}r \boldsymbol{j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}_{i}}{\partial a_{k}^{*}}.$$
 (7.3.49)

Это уравнение при учете (29) и (46) совпадает с уравнением (30в), полученным из уравнений Максвелла со сторонними токами.

Итак, мы привели уравнения поля и вещества к каноническому виду (38) с гамильтонианом (39). Прежде чем использовать этот результат для квантования уравнений поля, рассмотрим дипольное приближение для гамильтониана взаимодействия.

[°]Дипольное приближение. В квантовой электронике часто вместо точных энергий возмущения (41), (45) можно использовать приближенные выражения. В случае свободной плоской монохроматической волны H = E, так что в первом порядке по V_i/c в уравнении Ньютона можно пренебречь магнитной частью силы Лоренца:

$$m\ddot{\boldsymbol{R}}_{i} \approx e_{i} \boldsymbol{E} \left(\boldsymbol{R}_{i}, t \right). \tag{7.3.50}$$

Далее, если частицы занимают ограниченную область пространства с линейным размером *a*, много меньшим масштаба изменения поля $\lambda = c/\omega$, то поле можно разложить в ряд по **R**_i и ограничиться несколькими первыми слагаемыми. При этом из (41) получается мультипольное разложение гамильтоннана возмущения для частиц по степеням R_i/\hbar . В нулевом (дипольном) приближении $A(R_i) \approx \approx A(r_0) \equiv A_0$, где r_0 —какая-либо фиксированная точка внутри системы частиц (например, центр масс). При этом согласно (42) $\dot{P}_i = 0$ и (43) принимает вид (ср. (50))

$$m\ddot{\boldsymbol{R}}_i = e_i \boldsymbol{E}_0, \qquad (7.3.50a)$$

где $E_0 = E(r_0, t)$. Это уравнение согласно (38) следует из гамильтоннана возмущения следующего вида:

$$\mathscr{V}_{_{\mathcal{J}M\Pi}} \equiv -d(t) \cdot E_{0}, \qquad (7.3.51)$$

где

$$\boldsymbol{d}(t) = \sum_{i} e_{i} (\boldsymbol{R}_{i}(t) - \boldsymbol{r}_{0}), \quad |\boldsymbol{R}_{i} - \boldsymbol{r}_{0}| \ll \boldsymbol{\lambda}.$$

Здесь поле в отличие от (41) является заданным внешним параметром. Отметим также, что дипольный момент нейтральной системы не зависит от выбора r_0 .

Пусть вещество состоит из N отдельных неподвижных молекул с дипольными моментами d_j и центрами в r_j , тогда энергия вещества в заданном поле будет согласно (51) равна (ср. (4.1.25))

$$\mathcal{V}_{asn} = -\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{d}_{j}(t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{j}, t) = -\int d^{3}\boldsymbol{r} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t), \quad (7.3.52)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{d}_{j}(t) \,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{j}).$$
(7.3.53)

Гамильтониан возмущения *для поля* в дипольном приближении следует сразу из (45) при замене A_i на A_0 :

$$\mathcal{V}'_{\text{дип}} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{A}_{0} = -\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_{0} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{A}_{0}). \quad (7.3.54)$$

Если ограничиться случаем квазимонохроматических токов и полей, то $d \cdot A_0$ содержит постоянную составляющую и осциллирующую с двойной частотой компоненту. В результате накапливающееся взаимодействие дает лишь первое слагаемое в (54), совпадающее с (51):

$$\mathcal{V}_{dBn} \approx \mathcal{V}_{gBn} = - \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_{0}. \tag{7.3.55}$$

Таким образом, дипольный гамильтониан $\mathcal{V}_{дип}$ можно использовать и для расчета поля излучения в «одночастотных» задачах. Из (55) следует

$$\dot{a}_{k} + i\omega_{k}a_{k} = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial \mathscr{V}_{\mu\kappa\pi}}{\partial a_{k}^{*}} = \frac{c_{k}}{\hbar} d_{k} \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{0}\right), \qquad (7.3.56)$$

где $d_k \equiv d \cdot e_k$. Этот же результат получается из точного уравнения (30в) в случае нейтральной системы при учете (46), замене $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i)$ на $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)$ и V_i на $-i\omega_k\mathbf{R}_i$. Часто вместо (41) используют приближение

$$\mathcal{V}^{\circ} \approx -\sum_{i} e_{i} \mathbf{P}_{i} \cdot \mathbf{A}_{i} / m_{i} c, \qquad (7.3.57)$$

т. е. пренебрегают квадратичным по еА слагаемым (заметим, что он в случае одного электрона в гармоническом поле имеет порядок αE_1^2 , где $\alpha = \lambda^2 r_e$ — поляризуемость свободного электрона (6.2.6)). Это допустимо лишь в первом порядке теории возмущения, т. е. при расчете одноквантовых эффектов. Выражение (57) следует также из (45) при отождествлении кинетического и канонического импульсов. Из (57) получается следующее уравнение движения для частиц:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{R}}_i = -\frac{e_i}{c} \frac{d\boldsymbol{A}_i}{dt}, \qquad (7.3.58)$$

совпадающее при а≪х с (50а).

Для связанных электронов в атомах и небольших молекулах $a \sim 10^{-8}$ см и условие применимости дипольных приближений (51), (54) выполняется вплоть до рентгеновского диапазона. Напомним, что магнитные моменты, связанные со спином и орбитальным движением, имеют порядок одного *магнетона Бора* μ_0 , который на два порядка меньше одного дебая:

$$2\mu_0 = e\hbar/mc = e\lambda_c \sim ea_0/137.$$
 (7.3.59)

Однако несмотря на относительную малость мультипольных эффектов, их проявление в оптическом диапазоне имеет важное значение и легко наблюдается — например, в виде оптической активности вещества (вращения плоскости поляризации) и запрещенных линий в спектрах.

Свободный электрон под действием гармонического поля согласно (50) осциллирует с амплитудой $a_1 = eE_1/m\omega^2$ и скоростью $a_1\omega$, поэтому условия $a \ll \lambda$ и $V \ll c$ имеют одинаковый вид:

$$E_1 \ll mc^2/e\hbar \sim 10^8 \, \Gamma c,$$
 (7.3.60)

где оценка сделана для $\lambda = 1$ мкм и соответствует практически недостижимой интенсивности 10^{18} Bt/см². Тем не менее учет действия магнитного поля в световой волне (§ 6.2) приводит к квадратичной поляризуемости свободного электрона и наблюдаемым нелинейным эффектам.

§ 7.4. Квантование поля

Итак, мы представили уравнения поля в форме уравнений Гамильтона для пространственных гармоник $E_k(t)$, $H_k(t)$ (или их линейных комбинаций q_k , p_k , a_k). Теперь можно перейти к основному этапу квантового описания — нахождению правил перестановки динамических переменных поля.

Коммутационные соотношения. При переходе к квантовому описанию все канонические переменные q_k , p_k и их функции $f(q_k, p_k)$ становятся линейными операторами \hat{q}_k , \hat{p}_k , \hat{f}_k , действующими по определенным правилам на функцию состояния системы. Различие между действием произведений операторов fg и gf^{1}) можно определить с помощью скобок Пуассона (7.3.48):

$$fg - gf = [f, g] = i\hbar \{f, g\}.$$
 (7.4.1)

Здесь все переменные берутся в один и тот же момент времени. Отсюда, в частности, находим

$$\begin{bmatrix} q_k, \ p_{k'} \end{bmatrix} = i\hbar\delta_{kk'}, \qquad \begin{bmatrix} q_k, \ q_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k, \ p_{k'} \end{bmatrix} = 0, \qquad (7.4.2)$$

$$\begin{bmatrix} q_k, \ q_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k, \ a_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k'}, \ a_{k'} \end{bmatrix} = 0 \qquad (7.4.3)$$

$$\begin{bmatrix} a_k, a_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{kk'}, & [a_k, a_{k'}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k, a_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & (7.4.5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{k}, & I_{k} \end{bmatrix} = -2c_{k}^{2}\delta_{k\bar{k}'}, \quad \begin{bmatrix} I_{k}, & I_{j} \end{bmatrix} = 0/(0u_{k}), \quad (7.4.1)$$
$$\begin{bmatrix} I_{k}, & H_{k'} \end{bmatrix} = -2c_{k}^{2}\delta_{k\bar{k}'}, \quad \begin{bmatrix} I_{k}, & I_{k'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{k}, & H_{k'} \end{bmatrix} = 0, \quad (7.4.5)$$

где

$$c_k^2 = 2\pi \hbar \omega_k / L^3, \quad k \equiv \{k, v\}, \quad \overline{k} \equiv \{-k, v\}.$$
 (7.4.6)

Из (5) с помощью линейных связей (7.3.29) нетрудно найти и коммутаторы для самих полей E(r, t), H(r, t).

Классической комплексной переменной a_k^+ ставится в соответствие оператор рождения фотона a_k^+ , эрмитово сопряженный с оператором уничтожения фотонов a_k . Эрмитов оператор $a_k^+a_k = (a_k^+a_k)^+ \equiv N_k$ называется оператором числа фотонов, чаще всего именно он соответствует наблюдаемым в оптике величинам. Так, спектральная яркость излучения выражается через N_k следующим образом:

$$I_{\omega\Omega}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\nu}) = \hbar c \lambda^{-3} \langle N_{\boldsymbol{k}} \rangle.$$
(7.4.7)

Здесь в отличие от (7.1.18) добавлена операция усреднения с помощью волновой функции или оператора плотности поля р.

Часто кроме N_k представляют интерес другие операторы. Так, среднее от $a_k^+ a_k$, характеризует статистическую связь мод k и k'. Можно показать, что скорость m-квантового вынужденного перехода пропорциональна среднему от оператора $a_k^+ m a_k^m \equiv :N_k^m$:. Здесь двоеточия означают нормальное упорядочение, т. е. перестановку всех операторов a_k правее a_k^+ . Средние от этих операторов

$$G_k^{(m)} \equiv \langle : N_k^m : \rangle = \langle a_k^{+m} a_k^m \rangle \tag{7.4.8}$$

называются нормальными (нормально-упорядоченными, факториальными) моментами порядка m для моды k. Связь факториальных моментов $G^{(m)}$ с обычными $\langle N^m \rangle$ легко найти из операторных тождеств, следующих из (1) или (3):

$$[a^m, N] = ma^m, [N, a^{+m}] = ma^{+m}.$$

Отсюда

$$:N^{m}:=N(N-1)\dots(N-m+1),$$
 (7.4.9)

в случаях, когда речь идет об одной моде, индекс k опускаем.

1) Знак «∧» над операторами будем ставить лишь в необходимых случаях.

В представлении Гейзенберга волновая функция и матрица плотности постоянны, а зависимость операторов от времени определяется уравнениями Гейзенберга, которые получаются из (7.3.47) и (1):

$$df/dt = \partial f/\partial t + [f, \mathcal{H}]/i\hbar.$$
(7.4.10)

Например, полагая $f = a_h$ и используя (7.3.29), (7.3.37), (7.3.45) и (4), получаем уравнение Гейзенберга для оператора уничтожения, идентичное по форме (7.3.30в). Аналогично и все другие соотношения § 7.3 остаются в силе при замене динамических переменных на операторы в представлении Гейзенберга. При этом произведения операторов надо писать в симметризованном виде, например:

$$|a|^2 \rightarrow (a^+a + aa^+)/2 = a^+a + 1/2 = aa^+ - 1/2,$$
 (7.4.11)

в последних равенствах использовано (4). Заметим, что в операторных равенствах типа (11) под 1/2 подразумевается $\hat{I}/2$, где $\hat{I}-edu-$ ничный или тождественный оператор, $I\Psi=\Psi$.

Пространственные гармоники свободного поля зависят от времени гармонически с частотой $\omega_k = ck$. Отсюда находим разновременные коммутаторы

$$[a_{k}(t), a_{k'}^{+}(t')]_{cbob} = \delta_{kk'} \exp\left[-i\omega_{k}(t-t')\right]$$
(7.4.12)

и аналогичные соотношения для других переменных поля. При наличии сторонних токов вместо (12) может иметь место более сложная зависимость от t и t', однако при t=t' она должна давать (3) (это свойство сохранения коммутационных соотношений следует из унитарности преобразования операторов во времени).

Квантование макрополя в среде. Макроскопическое поле в немагнитном веществе описывается уравнениями Максвелла с феноменологической проницаемостью є (в линейном приближении). В окнах прозрачности $\varepsilon''(\omega) \approx 0$ и энергия свободного поля сохраняется, так что снова можно использовать гамильтонов формализм и проквантовать переменные макрополя. Если пренебречь также дисперсией $\varepsilon'(\omega)$, то процедура аналогична приведенной в § 7.3, изменяются в основном лишь скорость света ($c \rightarrow c/n$) и ориентация ортов поляризации e_k (в случае анизотропной среды).

Можно показать [37], что связь макрополя $E(\mathbf{r}, t)$ с операторами рождения и уничтожения фотонов в прозрачной среде a_k^+ , a_k при учете дисперсии в линейном приближении имеет вид (7.3.29), если в определение коэффициентов c_k добавить множитель

$$\xi_{k} = \left\{ 2\omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^{2} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{e} \right)^{-1} \right\}_{k}^{1/2} = \left(\frac{uv}{c^{2} \cos \rho} \right)_{k}^{1/2} \approx \frac{1}{n_{k}}, \quad (7.4.13)$$

где $v_k \equiv \omega_k/k = c/n_k$ и $u_k \equiv \partial \omega_k/\partial k \cos \rho_k$ — фазовая и групповая скорости, ρ_k — угол между лучевым и волновым векторами. Пространственные гармоники магнитного поля в (7.3.29) следует при этом умножить на n_k .

Квантование поля в резонаторе. Поле в замкнутой полости с идеальными зеркальными стенками можно представить в виде суммы вещественных ортогональных собственных функций $u_k(r)$, $v_k(r)$ соответствующей граничной задачи:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{k} p_{k}(t) \boldsymbol{u}_{k}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{H} = \sum_{k} \omega_{k} q_{k}(t) \boldsymbol{v}_{k}(\boldsymbol{r}), \quad (7.4.14)$$

где ω_k — собственные частоты резонатора.

Например, свободное поле в прямоугольном резонаторе является суперпозицией стоячих плоских волн (поле при этом не является поперечным (см. [22], с. 431)). Разрешенные значения волнового вектора определяются размерами резонатора L_{α} , $\alpha = x$, y, z (ср. (7.3.10)):

$$k = \pi \left\{ \frac{l}{L_x}, \frac{m}{L_y}, \frac{n}{L_z} \right\}, l, m, n = 0, 1, 2, \dots$$
(7.4.15)

Стоячая плоская волна является суперпозицией двух встречных бегущих волн с равными амплитудами $a_k = a_{-k}$, при этом согласно (7.3.28) $E \sim p_k \cos kz$ и $H \sim \omega_k q_k \sin kz$ (коэффициент пропорциональности определяется из (7.3.37) при $L^3 \equiv L_x L_y L_z$ и имеет порядок ($16\pi/L^3$)^{1/2}). Отсюда при учете соотношения неопределенности $\Delta q \Delta p \gg \hbar/2$ следует, что точность одновременного измерения $E(\mathbf{r}, t)$ и $H(\mathbf{r}, t)$ внутри резонатора ограничена.

Иногда и в свободном пространстве разлагают поле по стоячим волнам вида $\cos k \cdot r$, $\sin k \cdot r$, однако амплитуды стоячих мод не связаны непосредственно с наблюдаемыми в эксперименте величинами — ведь для практического выделения плоской волны +kдетектор должен быть расположен в дальней зоне излучателя, где волна — k отсутствует; связь «дальнего» поля с операторами a_k рассмотрена в [37].

§ 7.5°. Возможные состояния поля и их свойства

Следующая задача — рассмотреть различные состояния поля (чистые и смешанные) и их свойства, а также средние значения и распределения наблюдаемых величин в этих состояниях. При этом удобно использовать некоторую базисную систему волновых функций, с помощью которой можно представить произвольное состояние (эта процедура аналогична разложению произвольного вектора по ортам некоторой системы координат в реальном пространстве). Мы рассмотрим поочередно несколько базисов, порождаемых различными операторами — энергии \mathcal{H} , координаты q, импульса p, уничтожения фотонов $a \sim \omega q + ip$, а также связи между этими базисами. При этом будут использоваться компактные обозначения Дирака, краткая сводка которых приведена ниже.

Обозначения Дирака. Произвольное мгновенное состояние квантовой системы задается волновой функцией $\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle$, где x—некоторая совокупность аргументов (дискретных или непрерывных), достаточная для *полного описания* системы. Полное описание состояния «одномерной» бесспиновой частицы, в частности осциллятора или моды поля, дается одной переменной — координатой ($x \equiv q$), импульсом ($x \equiv p$) или энергией ($x \equiv \mathscr{E}$)¹).

Функция $\langle x | \psi \rangle$ называется x-представлением состояния системы. Само состояние без указания представления обозначается символом $|\psi\rangle$ или $|\rangle$ или еще $|t\rangle$. Комплексно сопряженная функция $\psi^*(x)$ обозначается $\langle \psi | x \rangle = \langle x | \psi \rangle^*$, т. е. можно считать, что $|\rangle^* = \langle |, \langle |^* = | \rangle$.

В *х*-представлении состояние | > задается множеством (дискретным или непрерывным) чисел $\langle x_1 | \rangle = c_1, \langle x_2 | \rangle = c_2, \ldots$, которые естественно рассматривать как компоненты некоторого вектора в многомерном пространстве. При этом $\langle x_n | \rangle$ является аналогом скалярного произведения единичного вектора (орта) $\langle x_n |$ на вектор состояния | >, т. е. проекцией | > на *n*-ю ось. Любой вектор можно представить как сумму ортов, умноженных на коэффициенты c_n :

$$|\rangle = \sum_{n} c_{n} |x_{n}\rangle \equiv \sum_{n} |x_{n}\rangle \langle x_{n}|\rangle, \qquad (7.5.1)$$

или в более компактных обозначениях:

$$|\rangle = \sum_{n} |n\rangle \langle n|\rangle.$$
(7.5.1a)

Аналогично

$$\langle |=\sum_{n} \langle |n\rangle \langle n|.$$
 (7.5.16)

В случае непрерывного аргумента суммирование в (1) и аналогичных разложениях заменяется на интегрирование:

$$|\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|\rangle. \tag{7.5.1b}$$

Векторы < | и | > называются соответственно бра- и кэт-векторами (от английского bracket — скобка).

Проекции различных ортов друг на друга равны нулю (в случае ортогональной системы):

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}, \quad \langle x | x' \rangle = \delta(x - x').$$
 (7.5.2)

Система координат (базис) называется полной, если любой вектор можно представить в виде (1). Свойство полноты выражается тензорным равенством

$$\hat{I} = \sum_{n} |n\rangle \langle n|. \tag{7.5.3}$$

Здесь \hat{I} —единичный тензор ($\hat{I} \mid > = \mid >$), а символ $\mid a > \langle b \mid$ означает тензор-диаду (или внешнее произведение), образованную из векторов

¹) Напомним, что в классической механике состояние задается числами q, p, а в квантовой — функцией $\psi(q)$ (или $\psi(p)$, $\psi(\mathcal{C})$,...).

|a> и <b|. Действие диады на векторы очевидно из ее обозначения:

$$\{|a\rangle\langle b|\}| \rangle \equiv |a\rangle\langle b| \rangle = \langle b|\rangle |a\rangle, \langle |\{|a\rangle\langle b|\} \equiv \langle |a\rangle\langle b| = \langle b|\langle |a\rangle.$$
 (7.5.4)

Тензор $|a\rangle\langle a| = \hat{P}_a$ при $\langle a|a\rangle = 1$ называется проектором, так как, действуя на вектор $|\rangle$, он выделяет его составляющую вдоль направления $|a\rangle$: $\hat{P}_a| \rangle = |a\rangle \langle a| \rangle \equiv c_a|a\rangle$.

Разложение единицы (3) позволяет легко строить различные представления скаляров $\langle a | b \rangle$, векторов $| \rangle$, тензоров (операторов) f:

$$\langle a \mid b \rangle = \langle a \mid I \mid b \rangle = \sum_{n} \langle a \mid n \rangle \langle n \mid b \rangle, \qquad (7.5.5)$$

$$|\rangle = I |\rangle = \sum_{n} |n\rangle \langle n|\rangle,$$
 (7.5.6)

$$f = I f I = \sum_{nn'} f_{nn'} | n \rangle \langle n' |, \qquad (7.5.7)$$

в последнем выражении $f_{nn'} \equiv \langle n | f | n' \rangle$.

Оператор f может действовать направо на кэт-вектор и налево на бра-вектор, при этом образуются новые векторы $f|a\rangle \equiv |b\rangle$, <a | f = <c | с другими направлениями и длинами (длиной или, точнее, нормой вектора $|a\rangle$ называется число $\langle a | a \rangle^{1/2}$). Если изменяется только длина вектора, то он называется собственным (правым или левым) для данного оператора. Удобно оператор и его собственные векторы и значения обозначать одной буквой:

$$\hat{f} \mid f_n \rangle = f_n \mid f_n \rangle. \tag{7.5.8}$$

Совокупность собственных векторов $|f_n\rangle$ обычно образует полный базис, необязательно ортогональный. Оператор f^+ , эрмитово сопряженный к оператору f, определяется равенством

$$f^+|a\rangle = \{\langle a \mid f\}^*, \tag{7.5.9}$$

или $(f^+)_{ab} = (f_{ba})^*$. Если $f^+ = f$, то f - эрмитов оператор, для него $f_{ab} = f_{ba}^*$, $f_n = f_n^*$, $\langle f_n | f_n \rangle = 0$ (при $f_n \neq f_n$.). В квантовой механике постулируется, что распределение веро-ятности P(f|t) в момент t для наблюдаемой f в ансамбле систем с одинаковым состоянием $|t\rangle$ определяется проекциями $|t\rangle$ на собственные векторы $|f\rangle$ оператора \hat{f} :

$$P(f | t) = C |\langle f | t \rangle|^{2} = C \langle t | \hat{P}_{f} | t \rangle, \qquad (7.5.10)$$

где C⁻¹— нормирующая сумма или интеграл (C = 1 для нормиро-ванных векторов). Если наблюдаемая f имеет непрерывный спектр, то P (f) имеет размерность 1/f и является плотностью распределения вероятности. Распределение (10) определено через шредингеровские величины. В представлении Гейзенберга оно имеет вид

$$P(f | t) = C \langle t_0 | P_f(t) | t_0 \rangle, \qquad (7.5.10a)$$

$$\hat{P}_f(t) \equiv |f(t)\rangle \langle f(t)|.$$

247

В случае смешанного состояния надо усреднять оператор \dot{P}_{f} с помощью оператора плотности. Например, в представлении Шредингера

$$P(f | t) = \text{Sp} \{| f > \langle f | \rho(t) \} = \langle f | \rho(t) | f \rangle$$
(7.5.106)

— распределение наблюдаемой f определяется диагональными элементами матрицы плотности в f-представлении (населенностями).

Согласно постулату о редукции волновой функции процесс измерения какой-либо величины, например энергии, с помощью классического прибора переводит систему из исходного состояния $| \rangle$ в состояние $| \mathscr{E}_1 \rangle$, где \mathscr{E}_1 определяется показанием прибора. Таким образом, процесс измерения я является одновременно процессом изготовления с известной волновой функцией. Чтобы приготовить систему в заданном заранее состоянии $| \mathscr{E}_1 \rangle$, надо поочередно измерять энергию у достаточно большого количества систем в произвольных состояниях и дождаться нужного показания \mathscr{E}_1 . Классический прибор, показавший отсчет f, перевел систему в состояние $\hat{P}_f | \rangle = |f\rangle$ —обратное действие прибора на состояние системы описывается проектором $\hat{P}_f = |f\rangle \langle f|$.

Энергетические состояния. Обычно в квантовой оптике измеряется энергия поля и соответственно в качестве базисных используются собственные функции оператора энергии для отдельных мод свободного поля, т. е. гамильтониана гармонического осциллятора

$$\mathcal{H}_{0} = (p^{2} + \omega^{2} q^{2})/2 = \hbar \omega \left(N + I/2 \right), \tag{7.5.11}$$

где $N \equiv a^{+}a^{-}$ оператор числа фотонов в моде; индекс k при рассмотрении одной моды мы будем, как правило, опускать. По определению собственные функции и собственные значения удовлетворяют равенству

$$\mathcal{H}_{0} | N \rangle = \mathcal{E}_{N} | N \rangle. \tag{7.5.12}$$

Согласно (11) энергетические состояния $|N\rangle$ или, короче, *N*-состояния (их называют также фоковскими) являются собственными и для оператора $a^+a:(\hat{N}-N)|N\rangle = 0$, где $N \equiv \mathfrak{E}/\hbar\omega - 1/2$.

Оператор \mathcal{H}_0 эрмитов, поэтому из векторов | N > можно построить полную ортонормированную систему «координат»:

$$\langle N | N' \rangle = \delta_{NN'}, \quad \sum_{N} | N \rangle \langle N | = I,$$
 (7.5.13)

$$|\rangle = \sum_{N} |N\rangle \langle N|\rangle, \quad f = \sum_{NN'} f_{NN'} |N\rangle \langle N'|. \quad (7.5.14)$$

Исходя из правила коммутации $[a, a^+] = I$, нетрудно показать (см. [37], с. 91), что N—целые числа:

$$\mathscr{E}_N = (N+1/2)\hbar\omega, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$
 (7.5.15)

Таким образом, энергия одной моды может принимать лишь дискретный эквидистантный ряд значений, отличающихся на ћю-энергию фотона. Наименьшей энергии моды с N = 0 соответствует вакуумное состояние $|0\rangle$, а состояния с N > 0 называются N-фотонными.

Нетрудно найти также результаты действия операторов *а* и *a*⁺ на *N*-состояния:

$$a \mid N \rangle = N^{1/2} \mid N - 1 \rangle, \tag{7.5.16}$$

$$a^+ | N \rangle = (N+1)^{1/2} | N+1 \rangle.$$
 (7.5.17)

Эти соотношения объясняют смысл названий операторов a и a^+ и показывают, что N-состояния не являются собственными для операторов q, p, a, a^+ . Следовательно, если поле находится в какомлибо N-состоянии (включая вакуум), то результаты измерения напряженности поля будут испытывать квантовые флуктуации. Этот вывод следует сразу из того, что \mathcal{H}_0 не коммутирует с q, p.

2

3

Согласно (17) N-состояние можно получить, подействовав N раз оператором a^+ на вакуум:

$$|N\rangle = (N!)^{-1/2} (a^+)^N |0\rangle.$$
 (7.5.18)

Однако практически перевести какую-либо моду свободного поля или резонатора в чистое N-состояние (не считая вакуумного) очень непросто, особенно при $N \gg 2$. Обычно реальное состояние моды является некогерентной смесью нескольких первых N-состояний, а в случае идеального лазера — когерентной суперпозицией множества N-состояний.

Все приведенные выше соотношения относились к фиксированному моменту времени. Временная зависимость вектора состояний одной моды свободного поля в представлении Шредингера определяется уравнением

$$i\hbar d | t \rangle / dt = \mathcal{H}_{\bullet} | t \rangle, \qquad (7.5.19)$$

и если в момент t = 0 состояние моды было N-фотонным, то согласно (12)

$$|t\rangle_{N} = |N\rangle e^{-iN\omega t} \equiv |N, t\rangle, \qquad (7.5.20)$$

где $\omega = ck$. Следовательно, в N-состоянии средние значения, моменты и распределения всех наблюдаемых, в том числе q, p, стационарны. Произвольное чистое состояние моды зависит от времени следующим образом:

$$|t\rangle = \sum_{N} c_{N} |N, t\rangle = c_{0} |0\rangle + c_{1} e^{-i\omega t} |1\rangle + \dots,$$
 (7.5.21)

где $c_N \equiv \langle N | t_0 \rangle$. При наличии токов коэффициенты в этом разложении зависят от времени, обычно медленно по сравнению с exp (— $i\omega t$).

До сих пор мы говорили о состоянии одной моды. В случае независимых мод энергетическая волновая функция всего поля получается просто перемножением модовых энергетических функций с определенными числами фотонов:

$$|\{N_k\}\rangle \equiv \prod_k |N_k\rangle_k \equiv |N_1, N_2, \ldots\rangle,$$
 (7.5.22)

$$|\{N_k\}, t\rangle = |\{N_k\}\rangle \exp(-i\mathscr{E}t/\hbar), \quad \mathscr{E} = \hbar \sum_k N_k \omega_k.$$
 (7.5.23)

Таким образом, энергетическое состояние поля задается указанием чисел фотонов $\{N_k\}$ во всех модах (числами заполнения), а произвольное состояние поля можно представить в виде суперпозиции состояний со всевозможными сочетаниями $\{N\}$:

$$|t\rangle = \sum_{\{N_k\}} c(\{N_k\}) | \{N_k\}, t\rangle.$$
 (7.5.24)

При наличии сторонних токов амплитуды состояний $c(\{N_k\})$ зависят от времени, и для их определения необходимо использовать теорию возмущения (ср. § 2.1).

Когерентные состояния. Как показал Глаубер [54], удобную базисную систему образуют также собственные функции неэрмитова оператора уничтожения фотонов:

$$a \mid z \rangle = z \mid z \rangle. \tag{7.5.25a}$$

Состояния $|z\rangle$ называются когерентными. Поскольку $a \sim \omega q + ip$, то можно ожидать, что спектр *a* непрерывный и комплексный, т. е. z = z' + iz'' произвольное комплексное число.

Из определения (25а) следует, что действие произвольной операторной функции $f(\hat{a})$ на вектор $|z\rangle$ сводится к его умножению на обычную (*c-числовую*) функцию f(z):

$$f(\hat{a}) \mid z \rangle = f(z) \mid z \rangle. \tag{7.5.26}$$

Сопряженное к (25а) равенство имеет вид

$$\langle z \mid a^+ = z^* \langle z \mid$$
 (7.5.256)

- кэт-векторы <z | являются левыми собственными векторами для оператора a^+ .

С помощью (25), (26) сразу находим среднее число фотонов в когерентном состоянии | z>, или, короче, в z-cocmoянии:

$$\langle N \rangle_z \equiv \langle z \mid N \mid z \rangle = |z|^2.$$
 (7.5.27)

В случае *z*-состояния элементарно вычисляются также все факториальные моменты (см. (7.4.9)) числа фотонов:

$$G_{z}^{(m)} \equiv \langle z | : N^{m} : | z \rangle = | z |^{2m} = \langle N \rangle_{z}^{m}.$$

$$(7.5.28)$$

Это равенство выражает свойство факторизации моментов.

В (28) использовано обозначение : $N^m := :a^+a \dots a^+a := a^{+m}a^m$. Вообще двоеточия :...: означают операцию перестановки операторов a^+ и a в нормальном порядке, при котором все операторы aв произведениях оказываются правее операторов a^+ . При этом пренебрегается некоммутативностью операторов, т. е. внутри двоеточий операторы можно писать в любом порядке. Заметим, что операция :...: нелинейная, например, оператор : aa^+ : = : $a^+a + I$: = a^+a не равен оператору : a^+a : + $I = a^+a + I$.

Из (25), (26) следует

$$\langle :f(a^+, a): \rangle_z = f(z^\bullet, z).$$
 (7.5.29)

Чтобы найти среднее от произвольного оператора $f(a^+, a)$ в z-состоянии, достаточно представить его с помощью равенства $aa^+=a^+a+I$ в виде суммы нормальных операторов и заменить a^+ на z^* и a на z. Часто приведение к нормальной форме можно выполнить с помощью разложения в ряд:

$$f(a^{+}, a) = \sum_{mn} c_{mn} a^{+m} a^{n},$$

$$\langle f(a^{+}, a) \rangle_{z} = \sum_{mn} c_{mn} z^{*m} z^{n}.$$
 (7.5.30)

Например,

$$\begin{array}{l} \langle aa^+ \rangle_z = \langle a^+a + I \rangle_z = |z|^2 + 1, \\ N^2 \equiv a^+aa^+a = a^+ (a^+a + I) a = :N^2 : + N, \\ \langle N^2 \rangle_z = |z|^4 + |z|^2. \end{array}$$

С помощью последнего равенства можно выразить второй момент и дисперсию $\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ через первый момент:

$$\langle N^2 \rangle_z = \langle N \rangle_z (\langle N \rangle_z + 1), \quad \langle \Delta N^2 \rangle_z = \langle N \rangle_z.$$
 (7.5.31)

Полученная связь характерна для пуассоновской случайной величины (см. ниже).

В общем случае задача «нормализации» произвольного оператора является непростой (см. примеры в [55]). Иногда при этом помогает использование следующего операторного тождества [53]:

$$e^{\mu a^{+} + \eta a} = C e^{\mu a^{+}} e^{\eta a} = C^{-1} e^{\eta a} e^{\mu a^{+}}, \qquad (7.5.32)$$

где $C = \exp(\mu \eta/2)$. При $\eta = -\mu^*$ оператор (32) называется оператором *смещения* и обозначается $D(\mu)$:

$$D(\mu) \equiv \exp(\mu a^{+} - \mu^{*}a).$$
 (7.5.33)

Из (18), (33) и полученного ниже равенства (38) следует

$$D(z)|0\rangle = |z\rangle. \tag{7.5.34}$$

Можно показать [54], что классический сторонний ток j_k переводит моду из вакуумного $|0\rangle$ в когерентное состояние $|z\rangle$, т. е. его действие описывается оператором смещения. Амплитуда z при этом совпадает с классической амплитудой, определяемой из (7.3.31).

Покажем, что действительно разброс энергии осциллятора в z-состоянии будет пуассоновским, т. е. фотоны в случае когерентного состояния поля ведут себя в некотором смысле подобно хаотическому потоку песчинок. Для этого надо найти матрицу преобразования $<\!\!N\,|\,z\!>$, связывающую базисы $|\,N\!>$ и $|\,z\!>$. Умножим (25а) слева на $<\!\!N\,|$:

$$\langle N \mid a \mid z \rangle = z \langle N \mid z \rangle.$$
 (7.5.35)

•Отсюда при учете (9) и (17)

$$N+1)^{1/2} \langle N+1 | z \rangle = z \langle N | z \rangle.$$

Из этой рекуррентной связи находим

$$\langle N | z \rangle = (N!)^{-1/2} z^N \langle 0 | z \rangle.$$
 (7.5.36)

Оставшийся неопределенным элемент <0 | z> можно полагать вещественным, при этом он находится из условия нормировки

$$\langle z | z \rangle = \sum_{N} |\langle N | z \rangle|^2 = \langle 0 | z \rangle^2 \exp |z|^2 = 1.$$
 (7.5.37)

Отсюда следует разложение *z*-состояния по *N*-состояниям:

$$|z\rangle = \sum_{N} |N\rangle \langle N |z\rangle, \qquad (7.5.38)$$

$$\langle N | z \rangle = (N!)^{-1/2} z^N \exp(-|z|^2/2).$$
 (7.5.39)

Напомним, что $\langle N | z \rangle$ является *N*-представлением когерентной волновой функции, а $\langle z | N \rangle = \langle N | z \rangle^*$ — *z*-представлением энергетической волновой функции. Следовательно, вероятность обнаружения *N* фотонов в моде в случае ее когерентного состояния определяется распределением Пуассона с параметром $\langle N \rangle = |z|^2$:

$$P(N|z) = \langle N \rangle^{N} \exp(-\langle N \rangle)/N!$$
(7.5.40)

Легко с помощью (39) убедиться, что различные *z*-векторы не ортогональны друг другу (в отличие от *N*-векторов):

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \sum_{N} \langle z_1 | N \rangle \langle N | z_2 \rangle = \exp\left[-|z_1 - z_2|^2/2 + i \operatorname{Im}(z_1^* z_2)\right], \quad (7.5.41)$$
$$|\langle z_1 | z_2 \rangle|^2 = \exp\left(-|z_1 - z_2|^2\right). \quad (7.5.42)$$

Этот недостаток не исключает свойства полноты (как и в случае косоугольной системы обычных координат), т. е. возможности разложения произвольных векторов и операторов по векторам $|z\rangle$ и днадам $|z_1\rangle\langle z_2|$ соответственно. Действительно, из (38) следует

$$|z\rangle \langle z| = e^{-|z|^{2}} \sum_{M,N} \frac{z^{*M} z^{N}}{(M!N!)^{1/2}} |M\rangle \langle N|.$$
 (7.5.43)

Просуммируем эти диады по всем $z \equiv \rho e^{i\varphi}$:

$$\int d^{2}z \, |z\rangle \langle z| = \sum_{MN} |M\rangle \langle N| (M!N!)^{-1/2} \int_{0}^{\infty} d\rho e^{-\rho^{2}} \rho^{M+N+1} \int_{0}^{2\pi} d\varphi e^{i(N-M)\varphi},$$
(7.5.44)
где $d^2z = dz' dz'' = \rho d\rho d\phi$. Интеграл по ϕ дает $2\pi\delta_{NM}$, а интеграл по ρ равен N!/2. Отсюда с учетом (13) получаем разложение операторной единицы по *z*-диадам, т. е. условие полноты в виде

$$I = \pi^{-1} \int d^2 z \, |z\rangle \langle z \, |. \tag{7.5.45}$$

Следовательно, произвольный вектор можно представить в виде

$$| \rangle = \pi^{-1} \int d^2 z | z \rangle \langle z | \rangle.$$
 (7.5.46)

В частности,

$$|z_1\rangle = \pi^{-1} \int d^2 z |z\rangle \langle z |z_1\rangle.$$
 (7.5.47)

Это соотношение при учете (41) показывает, что орты $|z\rangle$ выражаются друг через друга, т. е. *z*-базис является *переполненным* (грубо говоря, число координат превышает число измерений пространства).

Зависимость когерентного состояния от времени легко найти, подставив (20) в (38):

$$|z, t\rangle = \sum |N\rangle \langle N|z\rangle e^{-iN\omega t} = |ze^{-i\omega t}\rangle \equiv |z(t)\rangle. \quad (7.5.48)$$

Таким образом, свободная эволюция не меняет когерентного (как и энергетического — см. (20)) характера состояния, в отличие от q- или p-состояний (см. ниже).

Если все моды находятся в когерентных состояниях, то вектор состояния всего поля будет

$$|\{z_k\}\rangle = |z_1\rangle_1|z_2\rangle_2 \dots \equiv |z_1, z_2, \dots\rangle.$$
 (7.5.49)

Согласно (7.3.34) этот вектор является собственным для оператора положительно-частотной части поля $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ с собственным значением

$$\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv i \sum_{k} c_k \boldsymbol{e}_k z_k \exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega_k t\right). \tag{7.5.50}$$

Среднее значение поля в *z*-состоянии равно удвоенной вещественной части этого выражения:

$$\langle \{z_k\} | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \{z_k\} \rangle = 2 \operatorname{Re} E^{(+)}(\mathbf{r}, t).$$
 (7.5.51)

Далее, согласно (29) все нормально-упорядоченные моменты поля (корреляционные функции)

$$G_{1\dots 2n}^{(n)} \equiv \langle \hat{E}_{1}^{(-)} \dots \hat{E}_{n}^{(-)} \hat{E}_{n+1}^{(+)} \dots \hat{E}_{2n}^{(+)} \rangle$$
(7.5.52)

(через которые обычно определяются показания оптических детекторов) в случае когерентного состояния факторизуются, т. е. выражаются через произведения первых моментов:

$$G_{1...2n}^{(n)}(\{z_k\}) = E_1^{(-)} \dots E_{2n}^{(+)}.$$
(7.5.53)

Здесь собственные значения полей $E_i^{(\pm)} = E_{\alpha_i}(\mathbf{r}_i, t_i)$ определяются через совокупность $\{z_k\}$ по формуле (50).

Координатные и импульсные состояния. По определению собственные векторы $|q\rangle$ оператора координаты \hat{q} удовлетворяют условию

$$\hat{q} \mid q \rangle = q \mid q \rangle.$$
 (7.5.54)

Из $\hat{q}^+ = \hat{q}$ следует $q^* = q$ и $\langle q | \hat{q} = q \langle q |$. Аналогично определяются собственные векторы $| p \rangle$ оператора импульса: $\hat{p} | p \rangle = p | p \rangle$. Спектр q непрерывный, поэтому q-представление произвольного вектора состояния, условия ортонормированности и полноты имеют вид

$$|\rangle = \int dq |q\rangle \langle q|\rangle, \qquad (7.5.55)$$

$$\langle q | q' \rangle = \delta(q - q'),$$
 (7.5.56)

$$\hat{I} = \int dq \, |q\rangle \langle q \, |. \tag{7.5.57}$$

Согласно (56) *q*-векторы имеют неограниченную норму: $\langle q | q \rangle = \infty$, что приводит к некоторым затруднениям. В качестве примера найдем с помощью общего правила (10) плотность распределения вероятности координаты для системы в состоянии $|\rangle = |q_1\rangle$:

$$P(q \mid q_1) = C \mid \langle q \mid q_1 \rangle \mid^2 = C [\delta(q - q_1)]^2, \qquad (7.5.58)$$

$$C^{-1} = \int dq \, |\langle q | q_1 \rangle|^2 = \int dq \, [\delta (q - q_1)]^2. \tag{7.5.59}$$

Квадрат δ -функции приобретает смысл, если использовать какоелибо ее представление с конечной шириной Δq . При этом $\delta(0) = 1/\Delta q$ (см. (6.2.107)) и можно заменить $\delta(q)^2$ на $\delta(q)/\Delta q$. Ширина Δq выбирается из физических соображений — она должна быть много меньше интервала, на котором рассматриваемые функции (те, на которые умножается δ -функция перед интегрированием) заметно изменяются. В данном примере, однако, Δq сокращается, так как $C = \Delta q$:

$$P(q | q_1) = \delta(q - q_1). \tag{7.5.60}$$

Иногда удобнее использовать дискретные q- и p-представления с обычной нормировкой $\langle q_m | q_n \rangle = \langle p_m | p_n \rangle = \delta_{mn}$. Для перехода к дискретным спектрам $\{q_n\}$ и $\{p_n\}$ рассматриваемые волновые функции $\psi(q) \equiv \langle q | \rangle$ и их фурье-образы $\psi(p) \equiv \langle p | \rangle$ надо считать или периодичными, или отличными от нуля лишь на конечных интервалах L и $\hbar K$ соответственно (ср. процедуру дискретизации волновых чисел в § 7.3). Это ограничение эквивалентно предположению о малости изменения $\psi(q)$, $\psi(p)$ на отрезках $\Delta q \equiv 1/K$, $\Delta p \equiv \hbar/L$ и физически всегда оправдано для достаточно больших L и K.

Найдем далее функцию преобразования $\langle q | p \rangle$ (т. е. *q*-представление *p*-состояния), приняв

$$\langle q \mid \hat{p} = --i\hbar \frac{d}{dq} \langle q \mid.$$
 (7.5.61)

В этом соотношении q является непрерывным параметром вектора $\langle q |$ и дифференциальный оператор действует на этот параметр. Умно-

жив (61) на | р>, получим уравнение

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q \mid p \rangle = p \langle q \mid p \rangle \tag{7.5.62}$$

с очевидным решением

$$\langle q | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ipq/\hbar}.$$
 (7.5.63)

Константа нормировки здесь найдена с помощью подстановки в (56) разложения единицы по диадам | p> < p |:

$$\int dp \langle q \mid p \rangle \langle p \mid q' \rangle = \delta (q - q').$$

Согласно (63) в q-состоянии все импульсы равновероятны, а в p-состоянии все координаты равновероятны:

$$\begin{array}{l}
P(p \mid q) \sim |\langle p \mid q \rangle|^2 = 1/2\pi\hbar, \\
P(q \mid p) \sim |\langle q \mid p \rangle|^2 = 1/2\pi\hbar.
\end{array}$$
(7.5.64)

Аналогично можно найти функцию двух переменных $\langle q|z \rangle \equiv \psi_z(q)$, квадрат которой определяет плотность распределения координаты P(q|z) в z-состоянии (отметим, что символ P(z|q) не имеет смысла, поскольку неэрмитову оператору *a* не соответствует физическая наблюдаемая). Из (7.3.26) и (61) имеем

$$\langle q | a = (\tilde{q} + d/d\tilde{q}) \langle q | /\sqrt{2},$$
 (7.5.65)

где $\tilde{q} \equiv (m\omega/\hbar)^{1/2} q$ и мы ввели массу *m* эквивалентного осциллятора. Умножение на $|z\rangle$ при учете (25) дает

$$\left(\partial/\partial \tilde{q} + \tilde{q} - \sqrt{2} z\right) \langle q \mid z \rangle = 0.$$
(7.5.66)

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$\langle q | z \rangle = C_1(z) \exp\left[-(\bar{q} - \sqrt{2} z)^2/2\right].$$
 (7.5.67)

Аналогично

$$\langle p | z \rangle = C_2(z) \exp\left[-(\tilde{p} + i\sqrt{2}z)^2/2\right],$$
 (7.5.68)

где $\tilde{p} = p/(\hbar \omega m)^{1/2}$. Нормирующие константы здесь определены лишь с точностью до фаз:

$$C_{1} = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp\left[-z''^{2} + i\varphi_{1}(z)\right],$$

$$C_{2} = (\pi\hbar\omega m)^{-1/4} \exp\left[-z'^{2} + i\varphi_{2}(z)\right].$$
(7.5.69)

Согласно определению (7.3.26)

$$\bar{q} = (a + a^+)/\sqrt{2}, \quad \bar{p} = (a - a^+)/i\sqrt{2}, \quad (7.5.70)$$

поэтому из (25) сразу следует

$$\langle \tilde{q} \rangle_z \equiv \langle z | \tilde{q} | z \rangle = \sqrt{2} z', \quad \langle \tilde{p} \rangle_z = \sqrt{2} z''.$$
 (7.5.71)

В результате следующие из (67), (68) распределения можно представить в виде

$$P(\tilde{q} | z) = \pi^{-1/2} \exp \left[-(\tilde{q} - \langle \tilde{q} \rangle)^2\right], P(\tilde{p} | z) = \pi^{-1/2} \exp \left[-(\tilde{p} - \langle \tilde{p} \rangle)^2\right].$$
(7.5.72)

Итак, в когерентном состоянии распределения координаты и импульса осциллятора имеют гауссову форму с дисперсиями

$$\langle \Delta q^2 \rangle = \hbar/2m\omega, \quad \langle \Delta p^2 \rangle = \hbar\omega m/2, \quad \langle \Delta \tilde{q^2} \rangle = \langle \Delta \tilde{p^2} \rangle = 1/2 \ (7.5.73)$$

и минимально возможным произведением неопределенностей¹)

$$\Delta q \,\Delta p = \hbar/2. \tag{7.5.74}$$

Распределения координаты и импульса при $z \neq 0$ отличаются от вакуумного лишь сдвигами начала координат на $\sqrt{2}z'$ и $\sqrt{2}z''$,



Рис. 7.16. Распределение координаты осциллятора, находящегося в энергетическом (вверху) и когерентном (внизу) состояниях при одинаковой средней энергии пяти фотонов (q в единицах $\sqrt{\frac{k}{h}/m\omega}$) их дисперсии при этом не возрастают (в отличие от дисперсии энергии — см. (31)). Относительные ширины распределений $\Delta q/\langle q \rangle$ и $\Delta p/\langle p \rangle$ обратно пропорциональны z' и z''.

Из (48) следует, что эволюция осциллятора в *z*-состоянии описывается простой заменой *z* на $z_0e^{-i\omega t}$. Пусть $z_0 = z_0^* \equiv q_0/\sqrt{2}$, тогда согласно (71) надо в (72) полагать

$$\langle \tilde{q} \rangle = q_0 \cos \omega t, \quad \langle \tilde{p} \rangle = -q_0 \sin \omega t.$$
(7.5.75)

В результате распределения сдвигаются, не меняя формы (рис. 7.16):

$$P(\tilde{q} | z, t) = \pi^{-1/4} \exp \left[-(\tilde{q} - q_0 \cos \omega t)^2\right],$$

$$P(\tilde{p} | z, t) = \pi^{-1/4} \exp \left[-(\tilde{p} + q_0 \sin \omega t)^2\right].$$
(7.5.76)

Таким образом, средние значения координаты и импульса в случае когерентного состояния зависят от времени так же, как и соответствующие величины в классическом осцилляторе. При возрастании |z₀| относительные флуктуации уменьшаются и квантовый осциллятор становится все более похожим на классический.

Заметим, что волновая функция (67) при подстановке $z_t \equiv z(t) = z_0 e^{-i\omega t}$ должна удовлетворять уравнению Шредингера в *q*-представлении:

$$\begin{pmatrix} \frac{2i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^2 \end{pmatrix} \psi_z(q, t) = 0,$$

$$\psi_z(q, t) \equiv \langle q \mid z_t \rangle$$

$$(7.5.77)$$

1) Здесь, как обычно, символ Δx обозначает две различные величины: оператор $x - \langle x \rangle$ и число $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2}$.

(здесь и далее используются безразмерные величины $q \equiv q$, $p \equiv p$). Это требование позволяет определить фазу в (69). В результате «когерентную» волновую функцию можно представить в виде

$$\psi_{z}(q, t) = \pi^{-1/4} \exp\left[-(q - \sqrt{2}z_{t})^{2}/2 - z_{t}^{"2} + i(z_{t}'z_{t}' - \omega t/2)\right] = \pi^{-1/4} \exp\left\{-(q - \langle q_{t} \rangle)^{2}/2 + i[(q - \langle q_{t} \rangle/2) \langle p_{t} \rangle - \omega t/2]\right\}.$$
 (7.5.78)

Выше мы нашли матрицы преобразования от *q*-представления к *p*- и *z*-представлениям. Аналогично можно найти функции $\langle N | q \rangle \equiv \psi_N(q)$, определяющие распределения координаты в энергетических состояниях и распределение энергии в *q*-состояниях. Эти функции удовлетворяют уравнению (77) при замене $\partial \psi / \partial t$ на $-iN \omega \psi$ и равны полиномам Эрмита, умноженным на вакуумную функцию $\langle 0 | q \rangle = \exp(-q^2/2)$. Их можно найти, умножив (18) на $\langle q |$ и заменив $\langle q | a^+$ на $2^{-1/2}(q - d/dq) \langle q |$:

$$\langle q | N \rangle = (2^{N}N! \pi^{1/2})^{-1/2} (q - d/dq)^{N} \exp(-q^{2}/2).$$
 (7.5.79)

Сжатые состояния. Следует помнить, что в случае неэнергетических состояний распределения и моменты зависят от времени (см. (75), (76) для когерентного состояния). Можно показать, например, что *q*-состояния периодически становятся *p*-состояниями и наоборот (рис. 7.18).

Рассмотрим изменение дисперсий координаты и импульса в случае произвольного начального состояния. Решения уравнений Гейзенберга для операторов координаты и импульса имеют «классический» вид:

$$\hat{q}(t) = \hat{q}\cos\tau + \hat{p}\sin\tau, \quad \hat{p}(t) = \hat{p}\cos\tau - \hat{q}\sin\tau, \quad (7.5.80)$$

где $\tau \equiv \omega t$, $\hat{q} \equiv \hat{q}(0)$, $\hat{p} \equiv \hat{p}(0)$.

В общем случае из (80) находим следующую зависимость дисперсий координаты и импульса от времени:

$$D_q(\tau) = D_p(\tau - \pi/2) = D_q \cos^2 \tau + D_p \sin^2 \tau + D_{qp} \sin 2\tau. \quad (7.5.81)$$

Здесь введены обозначения:

$$D_{x}(t) \equiv \langle [\Delta x(t)]^{2} \rangle, \quad \Delta x(t) \equiv x(t) - \langle x(t) \rangle, \quad D_{x} \equiv D_{x}(0),$$

$$D_{qp}(t) \equiv \langle \Delta q(t) \Delta p(t) + \Delta p(t) \Delta q(t) \rangle/2 = = \langle a(t)^{2} - a^{+}(t)^{2} \rangle/2i - \langle q(t) \rangle \langle p(t) \rangle;$$

усреднение производится по начальному состоянию осциллятора $|t_0\rangle$. Таким образом, дисперсии координаты и импульса осциллируют в противофазе с частотой 2ω , а их сумма является интегралом движения:

$$D_q(t) + D_p(t) = D_q + D_p = 2(\langle N \rangle - \langle a^+ \rangle \langle a \rangle) + 1 = 2D_{aa^+} (7.5.82)$$

Согласно (81) дисперсии постоянны, лишь если $D_q = D_p$ и $D_{qp} = 0$. С помощью (70) можно проверить, что эти условия выполняются в случае энергетических ($D_q = D_p = N + 1/2$) и когерентных ($D_q = D_p = 1/2$) состояний. В последнее время обсуждается возможность изготовления и регистрации так называемых *сжатых* состояний [77], в которых $D_q \ll 1/2$ (или $D_p \ll 1/2$) и $D_q D_p = 1/4$ (рис. 7.17). В таких состояниях флуктуации координаты механического осциллятора или электромагнитного поля при повторных стробоскопических измерениях с подходящей $V = \frac{1}{2}$





Рис. 7.17. Когерентное (а) и сжатые (б, в) состояния осциллятора; зависимости средней координаты и неопределенности координаты от времени. Графики построены с помещью (7.5.81) при $q_0 = 5$, $D_{qp} = 0$, $\Delta q \Delta p = 1/2$ и $\Delta q = 1/\sqrt{2}$ (a), 0,2 (б), 2,5 (в)

разом, в принципе нулевые флуктуации не ограничивают предельно достижимую точность измерения координаты или импульса. Сжатые состояния могут представлять интерес для передачи информации и для измерения малых сил, вызываемых, например, гравитационными волнами [61]. Отметим здесь, что некоторые вопросы квантовой теорни измерений до сих пор привлекают к себе внимание [60, 61].

Мы рассмотрели четыре типа состояний, порождаемых операторами p^2+q^2 , p+iq, p, q, и связи между этими состояниями. Аналогично можно построить множество других типов состояний. Отметим собственные состояния оператора фазы [7, 13], наиболее близко соответствующие классическому колебанию с определенной фазой.

Различные состояния удобно условно изображать на фазовой плоскости (\tilde{q}, \tilde{p}) в виде фигур различной формы с линейными размерами, равными неопределенностям $\Delta \tilde{q}, \Delta \tilde{p}$ в этих состояниях (рис. 7.18). Площадь любой фигуры не может быть по порядку меньше единицы. Классическое состояние осциллятора изображается точкой $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$, когерентное — кружком с единичным диаметром и центром в $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$, *N*-фотонное — тонкой окружностью с диаметром $(N+1/2)^{1/2}$ и

центром в начале координат, q-состояние — тонкой вертикальной линией, p-состояние — горизонтальной линией. Следует помнить, однако, что фигуры имеют чисто качественный смысл, строго им не соответствуют какие-либо совместные распределения P(q, p), которые в квантовой механике не существуют.

Как и сами состояния, отображающие их фигуры на фазовой плоскости изменяются из-за естественной эволюции (описываемой уравнением Шредингера) или из-за *редукции* в результате обратного воздействия измерительного прибора. Например, после точного измерения *q* когерентный кружок на рис. 7.18 превратится в вертикальную пря-258 мую. Процессу эволюции при свободных колебаниях соответствует вращение изображающей фигуры против часовой стрелки вокруг начала координат с угловой скоростью ω или вращение осей координат \tilde{q} , \tilde{p} по часовой стрелке.

Смешанные состояния. Если поле взаимодействует (или взаимодействовало) с другим квантовым объектом, например с атомом, то

отдельных волновых функций поля $\psi(x_F, t)$ и атома $\psi(x_A, t)$ не существует по определению; можно говорить лишь об общей функции $\psi(x_E, x_A, t)$. Также нельзя говорить и о векторе состояния | \rangle_k данной моды k, если она связана с другой модой k' или модами. Например, классический точечный источник с частотой ω возбуждает сферическую волну, и поэтому все плоские волны с $|k| = \omega/c$ связаны. Аналогичное перемешивание равночастотных («поперечных») мод дает дифракция. Разночастотные («продольные») моды перемешиваются за счет ангармонизма вещества [37].

۱

Во всех тех случаях, когда система описывается с помощью неполного набора переменных, говорят, что она находится в *смешанном* состоянии (§ 3.1). При этом она вместо *вектора* состояния | \rangle характеризуется некоторым *оператором* ρ , называемым *оператором плотности*. В частном слу-



Рис. 7.18. Условное изображение различных состояний квантового осциллятора на фазовой плоскости. Размеры изображающих фигур соответствуют неопределенностям (по горизонтали — координаты, по вертикали — импульса, по радиусу энергии, по азимуту — фазы): 1 вакуумное состояние; 2 — когерентное; 3 — координатное; 4 — сжатое; 5 — импульсное; 6 — энергетическое; 7 — фазовое

чае чистого состояния оператор плотности ρ является диадой-проектором: $\rho_{\text{чист}} = |\rangle \langle |$, а в смешанном состоянии ρ равен сумме проекторов (см. (7)).

Оператор плотности, как и любой оператор поля, можно количественно задавать в различных базисах (представлениях) с помощью матриц плотности вида $\rho_{NN'} \equiv \langle N | \rho | N' \rangle$, $\rho_{qq'}$, $\rho_{zz'}$ и т. д. Для представления оператора плотности поля обычно используется *N*-базис, однако в некоторых случаях удобнее *z*-базис. Для одной моды ρ можно выразить через *N*- и *z*-проекторы следующим образом (индекс моды *k* опускаем):

$$\rho = \sum_{NN'} \rho_{NN'} | N \rangle \langle N' | =$$
 (7.5.83a)

$$= \int d^2 z P(z) |z\rangle \langle z|. \qquad (7.5.836)$$

Заметим, что здесь используется диагональное z-представление, что допустимо во многих случаях и связано с переполненностью z-базиса. Формула (836) называется представлением Глаубера—Сударшана или P-представлением. Условия нормировки и эрмитовости р имеют вид

$$\sum_{N} \rho_{NN} = 1, \quad \rho_{NN'} = \rho_{N'N}^{*},$$
$$\int d^{2}z P(z) = 1, \quad P(z) = P^{*}(z).$$

Среднее от любого оператора поля f выражается через ρ по формуле $\langle f \rangle = \text{Sp}(\rho f)$ (§ 3.2) или согласно (83)

$$\langle f \rangle = \sum_{NN'} \rho_{NN'} f_{N'N} = \int d^2 z P(z) \langle z | f | z \rangle.$$
 (7.5.84a)

Отсюда с помощью (29) находим

$$\langle :f(a^{+}, a): \rangle = \int d^{2}z P(z) f(z^{*}, z).$$
 (7.5.846)

Таким образом, функция P(z) позволяет легко находить среднее от нормальных операторов. В частности, нормальные моменты определяются следующим образом:

$$G^{(n)} = \int d^2 z \ P(z) \ |z|^{2n}. \tag{7.5.85}$$

Формулы (84) показывают, что весовая функция P(z) играет роль вероятности того, что осциллятор имеет комплексную амплитуду z (т. е. $\tilde{q} = \sqrt{2} z'$, $\tilde{p} = \sqrt{2} z''$). Однако P(z) может принимать отрицательные значения и даже при $P(z) = \delta^{(2)}(z-z_1)$ (т. е. в случае чистого z-состояния) \tilde{q} и \tilde{p} испытывают нулевые флуктуации, поэтому P(z) называют *квазивероятностью*.

Квазивероятность *z*-состояния P(z) позволяет находить также и закон распределения P(f) произвольной наблюдаемой f. Для этого надо в (84a) заменить f на проектор P(f) = |f| < f:

$$P(f) = \int d^2 z P(z) |\langle z | f \rangle|^2 = \int d^2 z P(f | z) P(z).$$
 (7.5.86)

Двумерный фурье-образ квазивероятности P (z) называется характеристической функцией (нормальной):

$$\chi(\mu, \mu^*) \equiv \langle e^{\mu a} + e^{-\mu^* a} \rangle = \int d^2 z P(z) e^{\mu z^* - \mu^* z}.$$
(7.5.87)

Это определение дает для всех состояний обычную (необобщенную) функцию (в отличие от $P(z)^{1}$)). Из определения χ следует, что для вычисления $G^{(n)}$ можно использовать вместо операции интегрирования (85) более простую операцию дифференцирования:

$$G^{(n)} = \left(-\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu^*}\right)^n \chi\left(\mu, \ \mu^*\right)|_{\mu=0}.$$
 (7.5.88)

Итак, смешанное состояние моды можно задавать с помощью матрицы ρ_{NN} , или одной из функций P(z), $\chi(\mu, \mu^*)$.

¹⁾ Например, P (z) для N-состояний пропорциональна производной порядка 2N от δ-функции [56].

Смешанное состояние многомодового поля задается матрицей плотности

$$\langle N_1, N_2, \ldots | \rho | N'_1, N'_2, \ldots \rangle \equiv \langle \{N_k\} | \rho | \{N'_k\} \rangle$$

или квазивероятностью $P(\{z_k\})$, или ее фурье-образом $\chi(\{\mu_k, \mu_k^*\})$. В случае независимых мод эти величины факторизуются («приводятся»). Следует подчеркнуть, что при использовании квазивероятности операция квантового усреднения для нормальных операторов (которые обычно и представляют интерес) принимает «классический» вид (846), который сохраняется и в случае многомодового поля. Например, функции корреляции (52) определяются усреднением их значений в когерентном состоянии (53) с помощью квазивероятности:

$$G_{1...2n}^{(n)} = \int \ldots \int P\left(\{z_k\}\right) G_{1...2n}^{(n)}\left(\{z_k\}\right) \prod_k d^2 z_k.$$
(7.5.89)

Напомним, что $z_k \equiv z(\mathbf{k}, v)$ здесь имеет смысл амплитуды (в единицах $2c_k$) плоской волны E_{k0} , распространяющейся в направлении \mathbf{k} и имеющей поляризацию e_v .

Рассмотрим далее некоторые примеры смешанных состояний поля.

В случае стационарного поля оператор плотности не зависит от времени, т. е. [ρ , \mathcal{H}] = 0, что в *N*-представлении дает

$$\langle \{N_k\} \mid \rho \mid \{N'_k\} \rangle \sum_k (N'_k - N_k) \omega_k = 0.$$

Следовательно, стационарная матрица плотности диагональна по числам заполнения мод с различными частотами. Функция $P(\{z_k\})$ при этом зависит лишь от модулей $|z_k|$, так как $z_k(t) \sim e^{-i\omega t}$.

В стационарном состоянии все одновременные моменты $\langle f^{m}(t) \rangle$ и функции корреляции $\langle f(t) g(t+\tau) \dots \rangle$ не зависят от t. Обычно принимается, что имеет место свойство эргодичности, т. е. что средние по ансамблю $\langle f \rangle$ совпадают с реально измеряемыми величинами $f_{\mathfrak{skcn}}(t)$, усредненными по времени, и что наблюдаемые изменения (флуктуации) $f_{\mathfrak{skcn}}(t)$ во времени вызваны неопределенностью \hat{f} в чисто квантовом или смешанном ансамбле. Важную роль играют также периодически нестационарные состояния, к которым, в частности, относятся когерентные состояния.

Часто можно использовать приближение статистически независимых мод: $\rho = \prod_k \rho_k$. При этом диагональный элемент $\langle N_k | \rho_k | N_k \rangle$ имеет смысл населенности (числа заполнения) N-фотонного состояния k-й моды. В случае стационарного поля с независимыми модами населенности полностью задают все свойства поля. В частности, среднее число фотонов в моде, определяющее основной фотометрический параметр—спектральную яркость, равно

$$\langle N_k \rangle = \operatorname{Sp} \left(a_k^+ a_k \rho_k \right) = \sum_{N=0}^{\infty} N \langle N | \rho_k | N \rangle.$$
 (7.5.90)

В равновесном, или *T*-состоянии, оператор плотности определяется распределением Гиббса: $\rho_k \sim \exp(-\mathcal{H}_k/\pi T)$, где *T*-температура термостата (§ 3.2). В *T*-состоянии населенность *N*-фотонного уровня (т. е. вероятность обнаружить в моде одновременно *N* фотонов или вероятность энергии моды принять значение $\hbar\omega(N+1/2)$) зависит от *N* экспоненциально:

$$P_T(N) = Ce^{-Nx}, (7.5.91)$$

где

$$C = P(0) = 1 - e^{-x}, \quad x = \hbar \omega / \pi T.$$

Распределение (91) называется *планковским*, или *геометрическим*, так как оно образует геометрическую прогрессию, или распределением *Бозе*—Эйнштейна. Подставив (91) в (90), находим среднее число фотонов в моде, называемое также фактором вырождения («газа» фотонов):

$$\langle N \rangle_T = (e^x - 1)^{-1} \equiv \mathcal{N} \equiv \delta.$$
 (7.5.92)

Это равенство позволяет в качестве параметра распределения вместо *х* использовать δ , при этом (91) принимает вид

$$P_T(N) = P(0)/(1+1/\delta)^N, \quad P(0) = 1/(1+\delta).$$
 (7.5.93)

Экспоненциальное распределение энергии имеют также моды неравновесного поля в случае, когда они возбуждаются хаотически многими независимыми источниками — т. е. при тепловом излучении, люминесценции или сверхлюминесценции (в линейном режиме см. § 7.1). При этом зависимость $\langle N_k \rangle$ от $|\mathbf{k}| = \omega/c$ определяет частотный спектр излучения, а зависимость от направления \mathbf{k}/k — угловой спектр и направленность некогерентного излучения. Напомним здесь, что в нелазерном свете обычно все $\langle N_k \rangle \ll 1$. Например, для зеленых солнечных лучей $\langle N_k \rangle \sim 10^{-2}$, так что вероятности обнаружить 0, 1 и 2 фотона в одной моде равны примерно 0,99, 10^{-2} и 10^{-4} .

Можно показать [54], что квазивероятность в хаотически возбужденной моде является двумерной гауссовой функцией с дисперсией $\langle N \rangle / 2$:

$$P_T(z) = \exp(-|z|^2 / \langle N \rangle) / \pi \langle N \rangle.$$
(7.5.94)

Отсюда при учете (87)

$$\chi_T(\mu, \mu^*) = \exp(-\mu\mu^* \langle N \rangle)$$
 (7.5.95)

и согласно (88) отличны от нуля лишь четные симметричные моменты

$$G_T^{(m)} \equiv \langle :N^m : \rangle_T = m! \langle N \rangle^m.$$
(7.5.96)

Из (96) и (28) следует, что *т*-квантовый переход в *T*-поле в m! раз вероятнее, чем в *z*-поле с тем же $\langle N \rangle$ (см. (6.4.6)), что объясняется длинным «хвостом» *T*-распределения. При m=2 (96) описывает еруппировку фотонов (§ 7.2, 7.6).

Подставив (94) в (86), можно убедиться, что распределения координаты и импульса в хаотическом состоянии также являются гауссовыми с нулевыми средними значениями и дисперсиями, определяемыми связью $\langle N \rangle + 1/2 = \langle \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2 \rangle/2$, т. е.

$$\langle \Delta \tilde{q}^2 \rangle_T = \langle \Delta \tilde{p}^2 \rangle_T = \langle N \rangle_T + 1/2 = (1/2) \operatorname{cth} (x/2).$$
 (7.5.97)

Заметим, что аддитивные многомодовые параметры поля, например его напряженность E_{α} в точке (r, t), будут иметь гауссово распределение независимо от состояний отдельных мод (при условии их независимости) в силу центральной предельной теоремы.

Как уже отмечалось, чистое *z*-состояние не относится к классу стационарных, поскольку $z(t) = \rho \exp(-i\omega t + i\varphi)$. Однако из него можно построить «стационарное когерентное» состояние, образовав смесь *z*-состояний с одинаковыми амплитудами ρ и случайными фазами φ . Такому состоянию соответствует, очевидно, квазивероятность вида [54]

$$P(z) = \delta(|z| - \rho)/2\pi\rho = \delta(|z|^2 - \rho^2)/\pi, \qquad (7.5.98)$$

которая описывает ансамбль идеальных лазеров с неопределенной фазой. Легко проверить с помощью (86), (40), что распределение энергии в таком ансамбле остается пуассоновским с $\langle N \rangle = \rho^2$.

§ 7.6°. Статистика фотонов и фотоэлектронов

Рассмотрим более подробно статистику числа фотонов N (см. также [13]). Для простоты в основном речь будет идти об одной моде. Ниже будет показано, что распределение $P(N) \equiv \rho_{NN}$ или моменты $\langle N^m \rangle \equiv \sum N^m P(N)$ можно экспериментально изучать по статистике числа фотоотсчетов, т. е. числа фотоэлектронов, вырываемых светом из катода $\Phi \ni Y$ за некоторое время выборки T. Подобные методы лежат в основе спектроскопии оптического смешения [57], в которой вместо традиционного спектрального анализа света производится статистический анализ фототока на выходе $\Phi \ni Y$.

Статистика фотонов. Закон распределения *P* (*N*) в данный момент времени в случае произвольного мгновенного состояния моды определяется общим правилом

$$P(N) = \text{Sp} \{ \rho \mid N > \langle N \mid \}, \qquad (7.6.1)$$

где $|N > \langle N| = \hat{P}(N)$ — проекционный оператор. Полагая в (7.5.86) $f = \hat{N} = a^+ a$, получаем *z*-представление для ρ_{NN} :

$$P(N) = \int d^2 z P(z) |z|^{2N} e^{-|z|^2/N!}$$
(7.6.2)

Далее, воспользовавшись (7.5.846), можно выразить P(N) через бесконечный набор нормальных моментов порядка $m \gg N$:

$$P(N) = \frac{1}{N!} \langle : \hat{N}^{N} e^{-\hat{N}} : \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} G^{(N+k)}.$$
(7.6.3)

Таким образом, распределение числа фотонов имеет вид распределения Пуассона $\mu^{Ne^{-\mu}/N!}$ со случайным параметром $\mu \equiv \hat{N}$, требующим дополнительного квантового усреднения с нормальным упорядочением.

Выше были приведены два примера распределений P(N): пуассоновское (7.5.40) для когерентного *z*-состояния моды и геометрическое (7.5.93) для хаотического *T*-состояния. Эти распределения являются однопараметрическими — они полностью задаются, например, первым моментом $\langle N \rangle$. Можно показать (см., например, [13]), что в поле одномодового лазера распределение P(N) является пуассоновским при большом превышении инверсии над порогом самовозбуждения и геометрическим ниже порога. Вблизи порога лазер имеет форму распределения, промежуточную между этими двумя крайними случаями. Это распределение в простейших моделях определяется двумя параметрами, например $\langle N \rangle$ и превышением инверсии над порогом.

Полезно рассмотреть еще один класс состояний осциллятора — некогерентную смесь вакуума $|0\rangle$ и *К*-фотонного состояния $|K\rangle$. При этом P(N) отлично от нуля лишь в двух точках:

$$P(N) = P(0) \delta_{N0} + P(K) \delta_{NK}.$$
(7.6.4)

Отсюда $\langle N \rangle = KP(K)$ и можно все величины выразить через один параметр — среднее число фотонов:

$$P(K) = \langle N \rangle / K, \quad P(0) = 1 - P(K),$$
 (7.6.5)

$$\langle N^{m} \rangle = K^{m} P(K) = K^{m-1} \langle N \rangle, \quad 0 \ll N \ll K.$$
(7.6.6)

В предельном случае $\langle N \rangle = K$ получаем чистое энергетическое состояние с K фотонами, однако интереснее более реалистичный случай $\langle N \rangle \ll K$. Такие состояния могут получаться при K-фотонном распаде в одну моду одного возбужденного атома. При повторении этого процесса во времени возникает «K-фотонный» свет — излучение, состоящее из отдельных групп по K фотонов. Двухфотонный свет генерируется также при спонтанном ($\langle N \rangle \ll 2$) параметрическом рассеянии (§ 6.5) «обычного» света, в котором фотоны распределены по Пуассону или по Бозе — Эйнштейну.

На рис. 7.19 представлены графики трех указанных типов распределений. Ниже будет показано, что резкий обрыв *K*-фотонного распределения для N > K приводит при $\langle N \rangle > K - 1$ к эффекту антигруппировки фотонов, а при K > 1, $\langle N \rangle \ll K - 1 - \kappa$ эффекту сверхгруппировки (принято, что пуассоновское распределение не обладает группировкой).

Часто при вычислениях и интерпретации экспериментальных данных удобнее иметь дело не с обычными моментами $\langle N^m \rangle$, а с факториальными моментами

$$G^{(m)} \equiv \langle :N^{m} : \rangle = \langle N(N-1) \dots (N-m+1) \rangle \qquad (7.6.7)$$

и их производящими функциями

$$Q(x) = \sum_{N=0}^{\infty} (1+x)^N P(N) = \langle :e^{xN} : \rangle; \qquad (7.6.8)$$

последнее равенство следует из (3). Отметим отличие Q(x) от функцин $\langle e^{xN} \rangle$, дающей при дифференцировании обычные моменты. Если



Рис. 7.19. Характерные формы распределений чисел фотонов: а) геометрическое распределение; б) пуассоновское; в) двухфотонное смешанное. Штриховая линия гауссова функция со средним значением 9,5 (см. (20))

функция Q(x) известна, то факториальные моменты и само распределение P(N) легко найти, дифференцируя ее в точках x=0 и —1. Действительно, из определений следует

$$G^{(m)} = Q^{(m)}(0), \tag{7.6.9}$$

$$P(N) = Q^{(N)}(-1)/N!, \qquad (7.6.10)$$

где

$$Q^{(m)}(x) \equiv d^{m}Q(x)/dx^{m}.$$
(7.6.11)

Подставляя в (8) поочередно распределения (7.5.40), (7.5.93), (4), находим производящие функции для трех рассмотренных типов состояний осциллятора:

$$Q_z(x) = e^{x \langle N \rangle}, \tag{7.6.12}$$

$$Q_T(x) = 1/(1 - x \langle N \rangle),$$
 (7.6.13)

$$Q_{K}(x) = 1 + \langle N \rangle [(1+x)^{K} - 1] / K.$$
(7.6.14)

9 Д. Н. Клышко

Отсюда по правилу (9) сразу следует

$$G_{z}^{(m)} = \langle N \rangle^{m}, \quad G_{T}^{(m)} = m! \langle N \rangle^{m}, \quad (7.6.15)$$

$$G_{K}^{(m)} = \langle N \rangle (K-1) \dots (K-m+1), \quad 1 < m \leqslant K.$$

Ценным свойством производящих функций (ПФ) является то, что, как следует из определения (8), ПФ Q(x) для суммы $N = \sum N_i$ независимых случайных целых чисел N_i равна произведению ПФ для этих чисел:

$$Q(x) = \prod_{i} Q_{i}(x). \tag{7.6.16}$$

Например, пусть множество из *М* одинаковых атомов независимо¹) излучает *К*-фотонный свет, тогда с помощью (14) и (16) находим

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{M} \{1 + \langle N_i \rangle [(1+x)^K - 1] / K \approx \exp\{\langle N \rangle [(1+x)^K - 1] / K\},$$
(7.6.17)

где принято $M \to \infty$ и $\langle N_i \rangle \to 0$ при конечном $\langle N \rangle = \sum \langle N_i \rangle$. В случае K = 1 (17) переходит в (12), т. е. слабое однофотонное излучение большого числа независимых атомов дает пуассоновское распределение (в отсутствие интерференции). При K > 1 (17) описывает пуассоновское распределение для групп из K фотонов. Например, при двухфотонном излучении

$$Q(x) = \exp \left[\mu \left(2x + x^2 \right) \right], \quad \mu \equiv \langle N \rangle / 2, P(2N) = \mu^N e^{-\mu} / N!, \quad P(2N+1) = 0.$$
(7.6.18)

Приведенный пример охватывает, очевидно, и случай, когда M является числом независимых мод, а N — суммарным числом фотонов в этих модах.

Рассмотрим другой пример применения правила композиции независимых распределений (16). Пусть теперь нас интересует общее число фотонов N в M независимых модах с геометрическим распределением и одинаковыми средними числами фотонов $\langle N_k \rangle = \langle N \rangle / M = \delta$ (этот параметр называют фактором вырождения). Производящая функция согласно (13) и (16) равна

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{M} \frac{1}{(1-x \langle N_k \rangle)} = \frac{1}{(1-x\delta)^M}.$$
 (7.6.19a)

Отсюда при $M \gg 1$, $x \delta \ll 1$ и конечном $\langle N \rangle$ получаем снова пуассоновское распределение:

$$Q(x) \approx e^{x \langle N \rangle} \qquad (M \gg 1). \tag{7.6.196}$$

Таким образом, общее число фотонов в множестве независимых мод с геометрическим распределением стремится к пуассоновскому распределению. Заметим, что при $\langle N \rangle \gg 1$ дискретное распределение Пуассона можно аппроксимировать непрерывным нормальным распределением

¹⁾ При этом мы пренебрегаем интерференцией, что допустимо в случае многомодовых детекторов с большим объемом детектирования (§ 7.2).

(рис. 7.19, б) с совпадающими первым моментом и дисперсией:

$$P(N) \approx \exp\left\{-(N - \langle N \rangle)^2/2 \langle N \rangle\right\}/\sqrt{2\pi \langle N \rangle}.$$
(7.6.20)

Относительные флуктуации при <N>>1 становятся малыми:

$$\Delta N / \langle N \rangle = \langle N \rangle^{-1/2} = (\hbar \omega / \langle \mathfrak{G} \rangle)^{1/2} \ll 1.$$
 (7.6.21)

Итак, при больших средней энергии и числе мод мы получили гауссово распределение в соответствии с центральной предельной теоремой и классической термодинамикой.

В общем случае из (19а) следует распределение Паскаля:

$$G^{(k)} = \frac{(k+M-1)!}{(M-1)!} \,\delta^k = \langle N \rangle^k \left(1 + \frac{1}{M}\right) \dots \left(1 + \frac{k-1}{M}\right),$$

$$P(N) = \frac{(N+M-1)!}{N! (M-1)!} \frac{\delta^N}{(1+\delta)^{M+N}}.$$
(7.6.22)

Отсюда, полагая k = 2, находим, что относительные флуктуации падают с ростом числа мод:

$$\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} = \left(\frac{1}{\langle N \rangle} + \frac{1}{M}\right)^{1/2} \,. \tag{7.6.23}$$

Группировка и антигруппировка фотонов. Среди всевозможных типов мгновенных состояний квантового осциллятора выделяются когерентные состояния как наиболее близкие в некотором смысле к состоянию классического осциллятора с определенными координатой и скоростью. Согласно (7.5.40) распределение числа фотонов N в z-состоянии является пуассоновским, так что дисперсия совпадает со средним числом фотонов:

$$\langle \Delta N^2 \rangle_z = \langle N \rangle = |z|^2. \tag{7.6.24}$$

Таким образом, распределение N в когерентном квантовом ансамбле совпадает с распределением по одинаковым ячейкам хаотически разбросанных в пространстве или во времени классических частиц. В произвольном состоянии дисперсия $\langle \Delta N^2 \rangle$ может, конечно, отличаться от $\langle N \rangle$, при этом в случае $\langle \Delta N^2 \rangle > \langle N \rangle$ говорят об эффекте *группировки* фотонов, а в случае $\langle \Delta N^2 \rangle < \langle N \rangle$ — об антигруппировке. Для количественной характеристики этих эффектов удобно использовать нормированный второй факториальный момент:

$$g \equiv \frac{\langle :N^2 : \rangle}{\langle N \rangle^2} = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle^2} = 1 + \frac{\langle \Delta N^2 \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle^3}.$$
 (7.6.25)

Для пуассоновского распределения g=1, при группировке g>1и при антигруппировке g<1. Поскольку скорость вынужденного двухквантового перехода пропорциональна $\langle :N^2: \rangle$, то g определяет отношение двухквантовых эффективностей данного поля и когерентного поля с той же средней энергией. Заметим, что если в определении g (25) не учитывать знака нормального упорядочения, то g будет всегда превышать единицу:

$$g_{\text{Kaac}} \equiv \langle N^2 \rangle / \langle N \rangle^2 = 1 + \langle \Delta N^2 \rangle / \langle N \rangle^2 \ge 1.$$
 (7.6.26)

В хаотическом Т-состоянии всегда имеет место группировка фотонов, поскольку согласно (15) для геометрического распределения

$$\langle \Delta N^2 \rangle_T = \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle) \tag{7.6.27}$$

и $g_T = 2$. Превышение дисперсии над $\langle N \rangle$ вызывается сравнительно медленно убывающим характером геометрического (экспоненциального) распределения (рис. 7.19), при котором «группы» из N фотонов с $N \neq \langle N \rangle$ встречаются чаще, чем в случае пуассоновского распределения. В результате относительные флуктуации числа фотонов в T-состоянии при $\langle N \rangle \gg 1$ стремятся к единице (а не к нулю, как в *z*-состоянии):

$$[(\Delta N/\langle N \rangle)_T = (1/\langle N \rangle + 1)^{1/2} \to 1.$$
 (7.6.28)

Иногда говорят, что первое и второе слагаемые в (27) или (28) отражают соответственно корпускулярный и волновой аспекты в дуализме волна — частица для фотона или что эффект группировки (т. е. второе слагаемое) свидетельствует о тенденции фотонов к объединению, «слипанию». Эта терминология маскирует тот факт, что дисперсия какой-либо наблюдаемой f характеризует состояние, а не свойства f и игнорирует существование состояний с антигруппировкой, т. е. с меньшими чем $1/\sqrt{\langle N \rangle}$ относительными флуктуациями и с двухфотонной эффективностью, меньшей, чем в *z*-состоянии с той же средней энергией.

Очевидным примером класса состояний с антигруппировкой являются энергетические состояния. В *К*-фотонном состоянии флуктуации *N* отсутствуют, $P(N) = \delta_{NK}$, так что $\langle N^m \rangle = \langle N \rangle^m$ и $g = 1 - K^{-1} < 1$.

Рассмотренная выше смесь вакуума и K-фотонного состояния (4) также обладает антигруппировкой при условии $\langle N \rangle > K - 1$. Действительно, из (6) следует

$$g_K = (K-1)/\langle N \rangle. \tag{7.6.29}$$

Следовательно, однофотонный распад одиночных атомов переводит поле в состояние с антигруппировкой, g=0, что и было недавно обнаружено при наблюдении резонансной флуоресценции (§ 5.2) пучка атомов натрия [62]. Конечно, реальное усреднение производится не по ансамблю экспериментальных установок, а во времени.

Наглядно этот эффект объясняется тем, что при распаде одного атома не может возникнуть двух фотонов, поэтому излучаемые фотоны всегда разделены некоторым интервалом времени τ , необходимым для повторного возбуждения и девозбуждения того же атома или следующего атома в пучке (рис. 7.20, *в*). Напомним, что наша «одномодовая» теория относится лишь к интервалам времени *T*, много меньшим τ , поэтому P(N)=0 для N>1.

Излучение с антигруппировкой («однофотонный» свет) может возникать также в результате многофотонного поглощения (§ 6.4) «обыч-

ного» (хаотического или когерентного) излучения. Дело в том, что *K*-фотонное поглощение, очевидно, сказывается лишь на «хвосте» распределения P(N) при $N \ge K$, что приводит к разреживанию групп фотонов и уменьшению флуктуаций в исходном излучении. С другой стороны, эффект насыщения при однофотонном поглощении (§ 4.3), наоборот, подчеркивает флуктуации, т. е. группирует фотоны (на этом основан метод получения очень коротких — пикосекундных импульсов в лазерах с синхронизацией мод).

Формула (29) при K>1 и $\langle N \rangle \ll K-1$, т. е. в случае слабого многофотонного света, дает $g \gg 1$ (рис. 7.21). Этот эффект можно назвать



Рис. 7.20. Примерный вид распределения 10 фотонов во времени в случаях: а) хаотического света (эффект группировки); б) когерентного света; в) однофотонного света (антигруппировка); г) двухфотонного света (сверхгруппировка)



Рис. 7.21. Зависимость параметра группировки g от среднего числа фотонов (N) в случаях: I — однофотонного света; 2 — двухфотонного; 3 — трехфотонного; 4 — когерентного; 5 — хаотического. В области I имеет место антигруппировка фотонов, в II — группировка и в III — сверхгруппировка

«сверхгруппировкой» фотонов. Он наглядно объясняется регулярным объединением фотонов в группы по K фотонов, разделенных большим интервалом времени (рис. 7.20, г). Удобным способом получения направленного двухфотонного света является параметрическое рассеяние (§ 6.5) обычного света в пьезокристаллах. Ниже будет показано (см. (53)), что эффект сверхгруппировки можно использовать для абсолютного (безэталонного) измерения квантового выхода фотодетекторов [37].

Состояния поля с антигруппировкой фотонов и упомянутые выше сжатые состояния привлекают к себе в последние годы большое внимание, как свое время и эффект группировки, обнаруженный Брауном и Твиссом в 1955 г. Наблюдавшийся в 1977 г. эффект антигруппировки фотоэлектронов считается доказательством неадекватности полуклассической теории излучения (см. (26)). Действительно, согласно представлениям этой теории одномодовый лазер со стабилизированной амплитудой должен вызывать фототок с минимально возможными флуктуациями, которые, как и обычный дробовой шум, должны иметь пуассоновский характер ввиду равноправия всех моментов времени. Таким образом, более равномерного, чем пуассоновское, распределения фотоэлектронов во времени вызвать, казалось бы, невозможно. В противоположность этому с наглядной фотонной точки зрения поток равноотстоящих во времени фотонов (получаемых, например, при периодическом возбуждении одиночного атома) вызовет равномерный поток фотоэлектронов (при достаточно большом квантовом выходе η).

Характерно, что в состояниях с g < 1, например *К*-фотонных, квазивероятности *P*(*z*) имеют сильные сингулярности и принимают отрицательные значения [54, 56], что дает основание считать такие состояния существенно неклассическими, т. е. не имеющими классического аналога.

Рассмотрим далее квантовую трактовку интерференционных экспериментов типа Юнга и Брауна — Твисса (§ 7.2). При квантовании поля удобно теперь разлагать поле не по плоским волнам, а по ортогональным собственным функциям $u_n(r)$ соответствующей граничной задачи, учитывающей наличие экранов со щелями и полупрозрачных зеркал. В простейшем случае монохроматического поля и одномодовых детекторов все поле можно представить в виде одной моды:

$$E(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) a(t) + u^{*}(\mathbf{r}) a^{+}(t) \equiv E^{(+)} + E^{(-)}, \quad (7.6.30)$$

где $a(t) = ae^{-i\omega t}$ — оператор уничтожения фотона в этой моде.

Показания однофотонного детектора, расположенного в точке r_1 , пропорциональны средней интенсивности

$$G_1^{(1)} \equiv \langle E_1^{(-)} E_1^{(+)} \rangle = |u_1|^2 \langle N \rangle,$$

где индекс 1 заменяет аргумент r_1 , $N \equiv a^+a$ и усреднение производится по начальному состоянию поля. Подчеркнем, что функция u(r) — решение классического волнового уравнения, она описывает распространение классических волн, их дифракцию и интерференцию. Таким образом, понятия фотона и волны нисколько не противоречат друг другу, здесь нет необходимости говорить о дуализме волна — частица. Операторы a, a^+ , N не зависят от координаты, поэтому фотон — элементарное возбуждение всего поля и вопрос «через какую щель прошел фотон» не имеет смысла. Пространственная структура поля определяется функцией u(r), ее квадрат дает вероятность обнаружения фотона в произвольной точке r, поэтому она играет роль волновой функции фотона.

Корпускулярные свойства фотона проявляются здесь лишь при детектировании, когда энергия всего поля $\hbar\omega$ (в случае $|t_0\rangle = |1\rangle$) «стягивается» в одну «точку». Особенно наглядно это проявляется при наблюдении вспышек на экране сцинтиллятора. Отметим, что часто обсуждаемый дуализм волновых пакетов не специфичен для квантовой механики, этим свойством обладают и классические волны.

Далее, корреляция показаний m однофотонных детекторов, расположенных в точках r_1, \ldots, r_m , будет пропорциональна нормальному моменту порядка m:

$$G_{1...m}^{(m)} = \langle E_{1}^{(-)} \dots E_{m}^{(-)} E_{m}^{(+)} \dots E_{1}^{(+)} \rangle = |u_{1} \dots u_{m}|^{2} \langle :N^{m} : \rangle. \quad (7.6.31)$$

Первый множитель здесь определяет влияние пространственного расположения детекторов. Для случая m=2 этот результат был получен в § 7.2 с помощью наглядной модели, основанной на предположении о биномиальном распределении фотонов в точках r_1 , r_2 .

Пусть, например, на интерферометр интенсивности (рис. 7.13) падает двухфотонный свет, тогда с учетом (15) показания коррелятора будут пропорциональны величине

$$G_{12}^{(2)} = |u_1 u_2|^2 \langle N \rangle,$$

а средние отсчеты пропорциональны $G_n^{(1)}$. Отсюда относительная корреляция равна

$$g_{12}^{(2)} \equiv G_{12}^{(2)} / G_1^{(1)} G_2^{(1)} = 1 / \langle N \rangle.$$
 (7.6.32)

В случае чистого двухфотонного состояния $\langle N \rangle = 2$ и имеет место так называемая отрицательная корреляция, или антикорреляция, с $g_{12}^{(2)} < 1$ (рис. 7.12).

Выше для простоты говорилось о статистике одной моды, однако многие выводы обобщаются и на многомодовое поле. Так, при спонтанном двухфотонном распаде (§ 6.2) и параметрическом рассеянии (§ 6.5) фотоны в парах обычно принадлежат разным модам k_1 и k_2 , отличающимся как по частоте, так и по направлениям. К вакууму при этом добавляется небольшая примесь состояния $|1\rangle_1|1\rangle_2$, что дает равенство моментов:

$$\langle N_1 N_2 \rangle = \langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle.$$

В результате при $\langle N_i \rangle \ll 1$ вероятность обнаружения двух фотонов много больше произведения однофотонных вероятностей:

$$g(k_1, k_2) \equiv \langle N_1 N_2 \rangle / \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle = 1 / \langle N_i \rangle \gg 1.$$
 (7.6.33)

Это неравенство, которое также можно интерпретировать как эффект сверхеруппировки (ср. (29) при K=2), было экспериментально подтверждено методом совпадений фотоотсчетов двух ФЭУ.

Статистика фотоэлектронов. Пусть $V_{get} \ll V_{kor}$, тогда излучение, падающее на катод ФЭУ, можно полагать одномодовым (§ 7.2). Ниже мы, исходя из наглядных комбинаторных соображений, покажем, следуя Скалли [52] (см. также [13, 53, 54, 56]), что формула Манделя (7.2.31) сохраняет свой вид и в рамках квантовой теории, если в ней α*I* заменить на ηN , где η —квантовый выход ФЭУ и N—оператор числа фотонов в объеме детектирования (N отличается от числа фотонов в моде множителем V_{get}/V_{kor}). Рассмотрим сначала поле в чистом энергетическом состоянии

Рассмотрим сначала поле в чистом энергетическом состоянии с числом фотонов N, взаимодействующее с фотодетектором (ФЭУ). Пусть вероятность регистрации одного фотона равна η ($0 \ll \eta \ll 1$), тогда вероятность регистрации любых m фотонов из их общего числа $N \gg m$ определяется, очевидно, биномиальным распределением Бернулли (рис. 7.22):

$$P(m | N) = C_N^m \eta^m (1 - \eta)^{N - m}.$$
(7.6.34)

Отсюда в случае произвольного состояния поля находим следующую связь между распределением фотонов $P(N) \equiv \rho_{NN}$ и распределением фотоэлектронов (или, иначе, фотоотсчетов):

$$P(m) = \sum_{N=m}^{\infty} P(m \mid N) P(N).$$
(7.6.35)

В случае $\eta = 1$ имеем $P(m|N) = \delta_{mN}$ и распределения электронов и фотонов совпадают. При $\eta < 1$ биномиальное преобразование (35) вносит



Рнс. 7.22. Распределения чисел фотонов P(N) и фотоэлектронов P(m) при эффективности детектора 0,3 и четырехфотонном начальном состоянии поля

дополнительную стохастичность, искажает P(N) и затрудняет решение обратной задачи — определение статистики поля по измеренной статистике фотоотсчетов (с помощью (43) можно показать, что P(N) формально выражается через P(m) также преобразованием вида (35), но с заменой η на $1/\eta$).

Отметим, что если под η понимать вероятность «выживания» фотона при прохождении света через слой вещества с однофотонным поглощением, то *m* будет иметь смысл числа фотонов на выходе из слоя, а N — на входе. При этом $\eta = e^{-\alpha l}$, где α — коэффициент поглощения и l — толщина слоя. Таким образом, формула (35) и все следующие из нее ниже результаты описывают также и преобразование статистики

поля при его линейном поглощении в холодном веществе.

Перейдем от N-представления к z-представлению с помощью (2). В результате из (35) следует квантовый вариант формулы Манделя (7.2.31), выражающий распределение фотоэлектронов через квазивероятность P(z) состояния z:

$$P(m) = \int d^2 z P(z) (\eta | z |^2)^m e^{-\eta | z |^2}/m!$$
 (7.6.36a)

Это выражение при учете (7.5.846) можно представить в инвариантном виде:

$$P(m) = \langle :(\eta N)^m e^{-\eta N} : \rangle / m!, \qquad (7.6.366)$$

где $N = a^+a$. Итак, распределение фотоэлектронов имеет вид распределения Пуассона, но с дополнительным квантовым усреднением, включающим операцию нормального упорядочения. Заметим, что полученное выражение отличается от распределения фотонов (3) лишь заменой N на ηN .

Интегральное преобразование (36а) легко выполнить для когерентного и хаотического состояний моды. При этом оказывается, что функциональные формы распределений электронов и фотонов в этих двух случаях совпадают. Действительно, полагая в (36а) $P(z) = \delta^{(z)}(z-z_1)$, находим

$$P_{z}(m) = \langle m \rangle^{m} e^{-\langle m \rangle}/m!; \qquad (7.6.37a)$$

далее, из (36а) и (7.5.94) следует

$$\mathcal{O}_{T}(m) = \langle m \rangle^{m} / (1 + \langle m \rangle)^{m+1},$$
 (7.6.376)

где $\langle m \rangle = \eta \langle N \rangle$.

Напомним, что под P(m) можно понимать также распределение фотонов на выходе холодного слоя с однофотонным поглощением ($\eta = e^{-\alpha l}$). Таким образом, линейное поглощение при T=0 K не изменяет вида распределения фотонов в случае хаотического и когерентного падающего излучения (в отличие от случая N-фотонного излучения см. (1)). Поглощение или усиление при $T \neq +0$ сопровождается хаотическим спонтанным излучением, что меняет форму распределения.

Полученные связи (35), (36) между распределениями фотоэлектронов и фотонов имеют довольно сложный характер. Гораздо проще связи между производящими функциями (см. (43)) и факториальными моментами этих распределений:

$$m^{(k)} = \eta^k N^{(k)},$$
 (7.6.38)

где

$$m^{(k)} \equiv \langle m(m-1) \dots (m-k+1) \rangle, \qquad (7.6.39)$$

$$N^{(k)} \equiv \langle :N^k : \rangle = \langle N(N-1) \dots (N-k+1) \rangle.$$
(7.6.40)

Здесь функции от m усредняются с помощью дискретного распределения P(m):

$$\langle f(m) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) P(m);$$
 (7.6.41)

квантовое среднее <f (N)> в N-представлении имеет аналогичный вид. Формулу (38) легко вывести с помощью производящих функций

формулу (38) легко вывести с помощью производящих функции для фотонов $Q_{\phi or}(x)$ (см. (8)) и электронов:

$$Q_{9\pi}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (1+x)^m P(m). \qquad (7.6.42)$$

Подставив сюда (36б), находим

$$Q_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}(x) = Q_{\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{r}}(\mathfrak{n}x) = \langle :e^{x\mathfrak{n}N} : \rangle.$$
(7.6.43)

Отсюда при учете (9) следует (38).

Из (38) легко получаем связи между обычными моментами:

$$\langle m \rangle = \eta \langle N \rangle, \tag{7.6.44}$$

$$\langle m^2 \rangle = \eta (N) + \eta^2 (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle), \qquad (7.6.45)$$

и между дисперсиями (ср. (7.2.38)):

$$\Delta m^2 = \langle m \rangle (1 - \eta) + \eta^2 \langle \Delta N^2 \rangle. \qquad (7.6.46)$$

Таким образом, к обычному дробовому шуму фототока (m) добавляются с весом η^2 «фотонные» шумы $\langle \Delta N^2 \rangle$ (что представляется естественным), но одновременно вычитается член $\eta^2 \langle N \rangle$ (что для полуклассики неожиданно). В случае антигруппировки фотонов $\langle \Delta N^{*} \rangle < \langle N \rangle$, так что шумы фототока меньше пуассоновских, т. е. электроны появляются с какойто степенью регулярности, как бы «отталкиваясь» друг от друга.

Заметим, что согласно (38) параметры группировки (как и вообще все норми рованные факториальные моменты) для электронов и фотонов connadatom:

$$g = m^{(2)} / \langle m \rangle^2 = N^{(2)} / \langle N \rangle^2.$$

Если в приведенных формулах понимать под N общее число фотонов в М независимых модах, то они будут описывать статистику М-модового детектора. Так, из (16) и (43) находим

$$Q_{\mathfrak{s}\mathfrak{n}}(x) = \prod_{k=1}^{M} Q_k(\eta x), \qquad (7.6.47)$$

где Q_k(x) — производящая функция для k-й моды.

В случае мод с геометрическим (тепловым) распределением фотонов из (13) получаем (ср. (19а))

$$Q_{\mathfrak{s}\mathfrak{g}}(x) = 1/(1 - x\eta\delta)^{M},$$
 (7.6.48)

где $\delta = \langle N_i \rangle / M$ — среднее число фотонов в одной моде. При $M \gg 1$ и $x\eta \delta \ll 1$ эта функция стремится к (ср. (196))

$$Q_{\mathfrak{sl}}(x) \approx e^{x r_i \mathfrak{s} M} = e^{x \langle m \rangle}. \tag{7.6.49}$$

Следовательно, многомодовый детектор под действием теплового поля дает пуассоновскую статистику отсчетов и не обнаруживает эффекта группировки (как и само многомодовое поле -- см. (19б)).

При конечном числе мод М из (48) получаем распределение и факториальные моменты, совпадающие с (22) при замене δ на $\eta\delta$ (или $\langle N \rangle$ на (m)). В частности, из (23) находим относительные флуктуации

$$\Delta m / \langle m \rangle = (1 / \langle m \rangle + 1 / M)^{1/2}. \tag{7.6.50}$$

Аналогично, заменяя в (18) х на ηx , находим производящую функцию для многомодового детектора, на который падает двухфотонный свет:

$$Q_{3x}(x) = \exp\left[\langle m \rangle (x + \eta x^2/2)\right]. \tag{7.6.51}$$

Существенно, что эта функция при n+1 отличается по структуре от (18), что предоставляет интересную возможность абсолютного (безэталонного) измерения квантового выхода ФЭУ п. Действительно, из (51) находим

$$\langle m^2 \rangle = \langle m \rangle (\langle m \rangle + 1 + \eta),$$
 (7.6.52)

или

$$\eta = \langle \Delta m^2 \rangle / \langle m \rangle - 1 = \langle m \rangle (g-1). \qquad (7.6.53)$$

Таким образом, измерение среднего числа и дисперсии (или параметра группировки) числа фотоотсчетов дает информацию о квантовом выходе.

§ 7.7°. Взаимодействие атома с квантованным полем

До сих пор при расчете вероятностей квантовых переходов мы использовали полуклассический подход, при этом спонтанные переходы описывались нестрого с помощью дополнительных правил или аналогий, вводимых без достаточного обоснования. В настоящем разделе этот недостаток будет исправлен. Будет показано, что взаимодействия двух стационарных квантовых систем удобно описывать феноменологически с помощью нормальных и антинормальных корреляционных функций (КФ). Эти функции более непосредственно связаны с обменом энергией, чем обычно используемые симметризованные КФ. Будет рассмотрена также симметрия КФ, связь различных КФ друг с другом, с микропараметрами систем и с их функциями Грина — откликами на когерентное возмущение.

Вероятности поглощения и излучения. Рассмотрим взаимодействие одного атома и квантованного поля. Пусть в начальный момент t_0 атом и поле были независимы: $|t_0\rangle = |m\rangle|i\rangle \equiv |mi\rangle$, где $|m\rangle$, $|i\rangle$ — начальные состояния атома и поля соответственно. В первом порядке теории возмущения амплитуда перехода $c_{nf}(t)$ в какое-либо состояние $|nf\rangle$ определяется матричным элементом оператора взаимодействия $\langle nf|\mathscr{V}|mi\rangle$ (§ 2.1). В дипольном приближении

$$\boldsymbol{c}_{nf} = -\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} dt' \langle nf | \boldsymbol{d}(t') \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{E}(t') | mi \rangle, \qquad (7.7.1)$$

где операторы берутся в представлении взаимодействия, т. е. без учета возмущения.

Разобьем эти операторы на положительно и отрицательно частотные части. При $t - t_0 \equiv T \gg 1/\omega$ быстроосциллирующие (примерно с двойной средней частотой $\bar{\omega}$) произведения $d^{(+)} \cdot E^{(+)}$ и $d^{(-)} \cdot E^{(-)}$ не дают вклада в интеграл (1), поэтому можно полагать

$$-\mathscr{V}(t) \approx d^{(-)}(t) \cdot E^{(+)}(t) + d^{(+)}(t) \cdot E^{(-)}(t).$$
(7.7.2)

Это уже знакомое нам приближение вращающейся волны (§ 2.2).

Предположим далее, что начальное и конечное состояния атома и/или поля — энергетические, тогда первое слагаемое в (2) дает вклад лишь при передаче кванта от поля к атому, а второе — от атома к полю. Следовательно, вероятность перехода с поглощением равна

$$P_{\uparrow}(nf \mid mi) = \hbar^{-2} \int_{t_0}^{t} dt' dt'' d_{mn}^{(+)}(t') d_{nm}^{(-)}(t'') E_{if}^{(-)}(t') E_{fi}^{(+)}(t''), \quad (7.7.3)$$

здесь использовано равенство $f_{mn}^{(+)} = (f_{nm}^{(-)})^*$ и предполагается для простоты параллельность векторов **d** и **E**. В случае излучения надо, очевидно, поменять в (3) индексы (+) и (—) местами. Заметим, что приближение (2) не сказывается на вероятности перехода в случае энергетических состояний одной из взаимодействующих систем, так как при этом произведения вида $f_{mn}^{(+)}f_{mn}^{(+)}$ равны нулю. Если нас не интересует, в какое именно конечное состояние переила система, то следует просуммировать выражение (3) по всевозможным состояниям $|nf\rangle$. Эти состояния образуют полную систему, поэтому общая вероятность перехода атома вверх будет равна (ср. (2.4.6))

$$P_{\uparrow} = \hbar^{-2} \int_{t_0}^{t} dt' dt'' F^{(-)}(t', t'') G^{(+)}(t', t''), \qquad (7.7.4a)$$

где

$$F^{(-)}(t', t'') \equiv \langle d^{(+)}(t') d^{(-)}(t'') \rangle, \quad G^{(+)}(t', t'') \equiv \langle E^{(-)}(t') E^{(+)}(t'') \rangle$$
(7.7.5)

— антинормальная корреляционная функция (КФ) для дипольного момента атома и нормальная КФ для напряженности поля в начальном состоянии (которое, очевидно, может быть и смешанным).

Аналогично вероятность излучения какого-либо кванта определяется квадратом (1) при учете лишь второго слагаемого в (2):

$$P_{\downarrow} = \hbar^{-2} \int_{t_0}^{t} dt' \, dt'' \, F^{(+)}(t', t'') \, G^{(-)}(t', t''). \tag{7.7.46}$$

Таким образом, вероятность передачи кванта энергии от одной системы к другой определяется произведением невозмущенных корреляционных функций — нормальной для передающей системы и антинормальной для принимающей (в случае независимых начальных состояний, из которых по крайней мере одно является некогерентным). Последняя оговорка исключает когерентные взаимодействия, зависящие от фаз состояний.

Среднее изменение общего числа фотонов за время T во втором порядке теории возмущения равно, очевидно, разности (46) и (4а):

$$\Delta N = \hbar^{-2} \int_{t_0}^{t} dt' dt'' (F^{(+)}G^{(-)} - F^{(-)}G^{(+)}).$$
 (7.7.6)

В основных состояниях нормальные КФ равны нулю, поэтому спонтанное излучение атома определяется $F^{(+)}$ (этот вывод уже использовался в гл. 5), а вероятность регистрации фотона холодным детектором определяется $G^{(+)}$ (§ 7.2, 7.6).

Заметим, что полученный результат (6) справедлив для любых систем с энергией взаимодействия вида $\sum f_i g_i$.

Спонтанное излучение. Согласно (4б) вероятность спонтанного перехода равна

$$P_{\rm cn} = \hbar^{-2} \int_{t_0}^t dt' \, dt'' \, F^{(+)} \, G^{\rm vac}, \qquad (7.7.7)$$

где G^{vac} — антинормальная КФ поля в состоянии вакуума. Согласно (7.3.34)

$$G^{\text{vac}}(t', t'') = \sum_{k'k''} c_{k'}c_{k''} \langle 0 | a_{k'}(t') a_{k''}^+(t'') | 0 \rangle = \sum_{k} c_{k}^2 e^{-i\omega_{k}(t'-t'')}, \quad (7.7.8)$$

где $c_k^2 = 2\pi \hbar \omega_k / L^3$. Заметим, что независимо от состояния поля

$$G^{(-)}(t', t'') = G^{(+)}(t'', t') + G^{\text{vac}}(t', t'').$$
(7.7.9)

При учете только двух уровней (см. (5.2.14))

$$d^{(+)}(t) = d_0 \sigma^{12} e^{-i\omega_0 t}, \quad d^{(-)}(t) = d_0^* \sigma^{21} e^{i\omega_0 t}, \quad (7.7.10)$$

где $d_0 = d_{12}, d_{11} = d_{22} \equiv 0, \omega_0 \equiv \omega_{21} > 0, \sigma^{12} = (\sigma^{21})^+ \equiv |1\rangle \langle 2|$. Так как

$$\sigma^{kl}\sigma^{mn} = \sigma^{kn}\delta_{lm}, \quad \langle \sigma^{mn} \rangle = \rho_{nm}, \qquad (7.7.11)$$

то

$$F^{(+)}(t', t'') = |d_0|^2 e^{i\omega_0 (t' - t'')} \rho_{22},$$

$$F^{(-)}(t', t'') = |d_0|^2 e^{-i\omega_0 (t' - t'')} \rho_{11}.$$
(7.7.12)

Таким образом, корреляционные функции двухуровнего атома пропорциональны населенностям: нормальная—верхнего уровня, антинормальная— нижнего.

С учетом (8) и (12) формула (7) принимает вид

$$P_{cn} = \hbar^{-2} |d_0|^2 \rho_{22} \sum_k C_k^2 \sin^2 \vartheta_k \int dt' [dt'' e^{i(\omega_k - \omega_0)(t'' - t')}],$$

где ϑ_k — угол между **k** и **d**₀. При t, $t_0 \rightarrow \pm \infty$ интеграл дает

$$[2\pi\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{0}})]^{2}=2\pi T\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{0}}). \qquad (7.7.13)$$

Переходя к интегрированию по модам (см. 7.3.7), получаем

$$W_{\rm cn} = \frac{P}{T} = \frac{|d_0|^2 \rho_{22}}{2\pi\hbar} \int d^3k \omega_k \sin^2 \vartheta_k \delta(\omega_k - \omega_0). \qquad (7.7.14)$$

Интеграл по всем направлениям от sin² ϑ равен $8\pi/3$, и в результате при $\rho_{22} = 1$ снова получаем знакомое выражение для вероятности спонтанного перехода возбужденного двухуровневого атома:

$$W_{\rm cn} = (4k_0^3/3\hbar) |d_0|^2,$$
 (7.7.15)

где $k_0 \equiv \omega_0/c$.

Спонтанное излучение трехуровневой системы было уже рассмотрено в § 5.2, где было показано, что $P_{cn}(T)$ осциллирует с частотой расщепления ω_{32} верхних двух уровней (эффект квантовых биений при когерентном начальном состоянии атома). Напомним также, что спонтанное излучение N двухуровневых атомов дает эффект сверхизлучения, при котором W_{cn} увеличивается в N^2 раз (§ 5.3).

Взаимодействие стационарных систем. Если начальные невозмущенные состояния обоих взаимодействующих систем являются стационарными, то все КФ в (6) зависят лишь от разности переменных интегрирования $t''-t' \equiv \tau$ (это предположение исключает эффект квантовых биений (§ 5.2) и когерентные состояния поля (§ 7.5). Если, кроме того, время наблюдения $t-t_0 \equiv T$ много больше времен корреляции атома и поля, то двойной интеграл в (6) пропорционален T и можно ввести не зависящие от времени скорости переходов вверх и вниз $W \equiv P/T$.

Определим корреляционные функции одной переменной:

$$F_{\tau}^{(\pm)} \equiv F^{(\pm)}(t, \ t+\tau) = \langle d^{(\mp)}(0) \ d^{(\pm)}(\tau) \rangle = F_{-\tau}^{(\pm)^*},$$

$$G_{\tau}^{(\pm)} \equiv G^{(\pm)}(t, \ t+\tau) = \langle E^{(\mp)}(0) \ E^{(\pm)}(\tau) \rangle = G_{-\tau}^{(\pm)^*},$$
(7.7.16)

тогда (6) преобразуется следующим образом:

$$\Delta N = \hbar^{-2} \int_{0}^{t} d\tau \left(T - \tau \right) \left[F_{\tau}^{(+)} G_{\tau}^{(-)} - F_{\tau}^{(-)} G_{\tau}^{(+)} + (\tau \to -\tau) \right]. \quad (7.7.17)$$

Если *Т* много больше времен корреляции атома и поля, то из (17) следует

$$W = \hbar^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, (F_{\tau}^{(+)} G_{\tau}^{(-)} - F_{\tau}^{(-)} G_{\tau}^{(+)}), \qquad (7.7.18)$$

где $W \equiv (P_{\downarrow} - P_{\uparrow})/T$ и знак W определяет направление передачи кванта (полю при W > 0).



Рис. 7.23. Стационарное взаимодействие атома и поля. Связь атома и поля часто является «узким горлом» для обмена энергией между термостатами T_1 , T_2

Наша исходная модель описывает эволюцию состояний атома и поля во времени. Угловые скобки в (16) означают усреднение по ансамблю экспериментов с одинаковыми начальными условиями и различными т. Если, однако, предположить, что обе системы находятся в контакте со своими термостатами (рис. 7.23), которые непрерывно восстанавливают и поддерживают исходные стационарные состояния, то мы получим эргодическую модель. При этом (18) описывает непрерывный поток квантов энергии, передаваемых от одного термостата к другому посредством связи атом — поле.

Выразим теперь КФ (16) через микропараметры систем. Усреднение с помощью стационарных матриц плотности (необязательно равновес-

ных) дает

$$G_{\tau}^{(+)} = \sum_{k} c_{k}^{*} \langle N_{k} \rangle e^{-i\omega_{k}\tau},$$

$$G_{\tau}^{(-)} = \sum_{k} c_{k}^{*} (\langle N_{k} \rangle + 1) e^{i\omega_{k}\tau},$$

$$F_{\tau}^{(+)} = \sum_{m > n} |d_{mn}|^{2} \rho_{mm} e^{-i\omega_{m}n\tau},$$

$$F_{\tau}^{(-)} = \sum_{m > n} |d_{mn}|^{2} \rho_{nn} e^{i\omega_{m}n\tau},$$
(7.7.19)

где $\langle N \rangle_k \equiv \langle a_k^+ a_k \rangle$ —средние числа фотонов в модах и ρ_{nn} —относительные населенности уровней атома. При подстановке (19) в (18) скорость обмена квантами принимает вид

$$W = 2\pi\hbar^{-2} \sum_{k, m > n} c_k^2 |d_{mn}|^2 \,\delta(\omega_k - \omega_{mn}) \,[(\langle N_k \rangle + 1) \,\rho_{mm} - \langle N_k \rangle \rho_{nn}].$$
(7.7.20)

Три слагаемых в последнем множителе соответствуют трем типам переходов между каждой парой уровней, постулированных Эйнштейном (гл. 2).

Добавив в (20) энергию кванта $\hbar \omega_k$, получим, очевидно, мощность излучения или поглощения:

$$\mathcal{P} = (2\pi)^2 L^{-3} \sum_{k, m > n} \omega_k^2 |d_{mn}|^2 \,\delta(\omega_k - \omega_{mn}) \,(\rho_{mm} - \Delta_{nm} \langle N_k \rangle), \quad (7.7.21)$$

где $\Delta_{nm} \equiv \rho_{nn} - \rho_{mm} - \rho$ азность населенностей. Эта формула при $\langle N_k \rangle = 0$ описывает спонтанное излучение атома в вакуум, а при $\rho_{mm} = 0$ — радиационный нагрев холодного атома. Заметим, что введенные равенством (16) нормальные и антинор-

Заметим, что введенные равенством (16) нормальные и антинормальные КФ не вещественны и не обладают определенной четностью (в отличие от классических КФ). Можно, однако, образовать вещественные четные (симметризованные) и нечетные (антисимметризованные) комбинации:

$$F_{\tau}^{(s)} \equiv \operatorname{Re} F_{\tau} = \frac{1}{2} \langle d_0 d_{\tau} + d_{\tau} d_0 \rangle = F_{-\tau}^{(s)},$$

$$F_{\tau}^{(a)} \equiv \operatorname{Im} F_{\tau} = \frac{1}{2i} \langle d_0 d_{\tau} - d_{\tau} d_0 \rangle = -F_{-\tau}^{(a)},$$
(7.7.22)

и аналогичные функции $G_{\tau}^{(s)}$, $G_{\alpha}^{(a)}$ для поля. Здесь введена также «полная» КФ F_{τ} , равная сумме нормальной и антинормальной КФ:

$$F_{\tau} \equiv \langle d_0 d_{\tau} \rangle = \langle d_0^{(-)} d_{\tau}^{(+)} + d_0^{(+)} d_{\tau}^{(-)} \rangle = F_{\tau}^{(+)} + F_{\tau}^{(-)} = F_{-\tau}^{\bullet}. \quad (7.7.23)$$

Чтобы найти обратное преобразование (выразить $F_{\tau}^{(\pm)}$ через F_{τ}), необходимо использовать спектральное разложение.

Часто используют только симметричную комбинацию $F_{\tau}^{(s)}$, и именно ее называют КФ. Ниже будет показано, что антисимметричная комбинация $F_{\tau}^{(a)}$ тесно связана с откликом системы на когерентное внешнее возмущение, т. е. с ее восприимчивостью или функцией Грина. Отметим, что в экспериментальной оптике обычно имеют дело с некогерентными системами, так что в соответствии с (18) КФ $F_{\tau}^{(\pm)}$ более непосредственно описывают наблюдаемые эффекты.

Из определений (22) и (19) находим микроскопические формулы:

$$G_{\tau}^{(s)} = \sum_{k} c_{k}^{2} \left(2 \langle N_{k} \rangle + 1 \right) \cos \left(\omega_{k} \tau \right), \qquad (7.7.24)$$

$$G_{\tau}^{(a)} = \sum_{k} c_{k}^{2} \sin\left(\omega_{k}\tau\right) = \operatorname{Im} G_{\tau}^{\operatorname{vac}}, \qquad (7.7.25)$$

$$F_{\tau}^{(s)} = \sum_{m > n} |d_{mn}|^2 (\rho_{mm} + \rho_{nn}) \cos(\omega_{mn}\tau), \qquad (7.7.26)$$

$$F_{\tau}^{(a)} = \sum_{m > n} |d_{mn}|^2 \Delta_{nm} \sin(\omega_{mn}\tau).$$
 (7.7.27)

Ниже будет показано (см. (32), (36)), что в случае линейной или равновесной системы отличие между различными типами КФ сводится, по существу, к различным вкладам в них нулевых флуктуаций.

Спектральное представление. Фурье-образы стационарных КФ называются спектральными плотностями (флуктуаций соответствующей величины, например напряженности электрического поля или дипольного момента атома). Из определений (16) ясно, что фурье-образ $F_{\omega}^{(+)}$ нормальной КФ $F_{\tau}^{(+)}$ отличен от нуля лишь при $\omega > 0$, а антинормальной КФ — при $\omega < 0$, поэтому их можно объединить в одну функцию F_{ω} — фурье-образ функции F_{τ} :

$$F_{\omega} \equiv \int d\tau e^{i\omega\tau} F_{\tau}/2\pi, \quad F_{\omega} = F_{\omega}^{(s)} + iF_{\omega}^{(a)} = F_{\omega}^{(+)} + F_{\omega}^{(-)} \ge 0, \quad (7.7.28)$$

$$F_{\omega}^{(\pm)} = F_{\omega}\theta(\pm\omega), \quad F_{\omega}^{(s)} = (F_{\omega} + F_{-\omega})/2, \quad F_{\omega}^{(a)} = (F_{\omega} - F_{-\omega})/2i$$

и аналогично для полевых КФ $G_{\omega}^{(\pm)}$. Здесь введены также фурье-образы симметричных и антисимметричных вещественных КФ, которые обладают следующими свойствами:

$$F_{\omega}^{(s)} = F_{\omega}^{(s)*} = F_{-\omega}^{(s)}, \quad F_{\omega}^{(a)} = -F_{\omega}^{(a)*} = -F_{-\omega}^{(a)}.$$
(7.7.29)

Подставляя обратное преобразование

$$F_{\tau}^{(\pm)} = \int_{0}^{\infty} d\omega e^{\mp i\omega\tau} F_{\pm \omega}$$
(7.7.30)

в (18) с добавлением множителя $\hbar \omega$, получаем спектральное разложение мощности:

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{0}^{\infty} d\omega \,\omega \left(F_{\omega} G_{-\omega} - F_{-\omega} G_{\omega} \right) = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \,\omega F_{\omega} G_{\omega}, \qquad (7.7.31a)$$

где все спектральные КФ положительны. Таким образом, здесь разделены положительные и отрицательные слагаемые, соответствующие излучению и поглощению. Если же перейти к фурье-образам симметричных и антисимметричных КФ, то (31a) примет вид

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi}{i\hbar} \int_{0}^{\infty} d\omega \,\omega \left(F_{\omega}^{(s)} G_{\omega}^{(a)} - F_{\omega}^{(a)} G_{\omega}^{(s)}\right), \qquad (7.7.316)$$

в котором нет такого разделения.

Явные выражения для спектральных КФ через микропараметры легко определяются фурье-преобразованием (19) и (24)—(27):

$$G_{\omega}^{(+)} = \sum_{k} c_{k}^{2} \langle N_{k} \rangle \delta(\omega - \omega_{k}),$$

$$G_{\omega}^{(-)} = \sum_{k} c_{k}^{2} \langle N_{k} \rangle + 1) \delta(\omega + \omega_{k}),$$

$$G_{\omega}^{(s)} = \sum_{k} c_{k}^{2} \left(\langle N_{k} \rangle + \frac{1}{2} \right) \left[\delta(\omega - \omega_{k}) + \delta(\omega + \omega_{k}) \right],$$

$$G_{\omega}^{(a)} = \frac{i}{2} \sum_{k} c_{k}^{2} \left[\delta(\omega - \omega_{k}) - \delta(\omega + \omega_{k}) \right],$$

$$F_{\omega}^{(+)} = \sum_{m > n} |d_{mn}|^{2} \rho_{mn} \delta(\omega - \omega_{mn}),$$

$$F_{\omega}^{(-)} = \sum_{m > n} |d_{mn}|^{2} \rho_{nn} \delta(\omega + \omega_{mn}),$$

$$F_{\omega}^{(s)} = \frac{1}{2} \sum_{mn} |d_{mn}|^{2} (\rho_{mm} + \rho_{nn}) \delta(\omega + \omega_{mn}),$$

$$F_{\omega}^{(a)} = \frac{1}{2i} \sum_{mn} |d_{mn}|^{2} \Delta_{nm} \delta(\omega + \omega_{mn}).$$
(7.7.32)

Сравнение последнего выражения с формулой (4.2.18) для линейной восприимчивости (поляризуемости) одного атома α_{ω} при $\gamma = 0$ показывает, что антисимметричная спектральная КФ стационарной системы совпадает (с точностью до множителя $2\pi/i\hbar$) с мнимой частью восприимчивости системы по отношению к когерентному возмущению:

$$\alpha_{\omega}'' = (2\pi/i\hbar) F_{\omega}^{(a)}.$$
 (7.7.33)

Функцию отклика α_{τ} и ее фурье-образ называют запаздывающей функцией Грина системы. Заметим, что при экспериментальном или теоретическом определении восприимчивости вещества поле должно находиться в когерентном квантовом состоянии (§ 7.5) и наоборот, для определения восприимчивости вакуума (§ 4.1) надо использовать вещество в когерентном состоянии. Из сравнения (32) и (8) следует $G_{\omega}^{(\alpha)} = (\operatorname{Im} G_{\tau}^{\operatorname{vac}})_{\omega}$, т. е. роль α в случае поля выполняет антинормальная КФ вакуума.

Напомним, что α_{ω}^{*} в свою очередь однозначно определяет $\alpha_{\omega}^{'}$ (§ 4.1). Таким образом, кинетические параметры стационарной системы однозначно выражаются через ее невозмущенные флуктуационные характеристики ¹). В случае равновесных систем эта связь обратима и любая из четырех КФ системы определяет остальные.

¹⁾ Такие связи называют формулами Кубо (см., например, [48]).

Равновесные системы. ФДТ. В случае термодинамического равновесия имеют место распределения Планка для фотонов и Больцмана для населенностей:

$$\langle N_k \rangle = 0$$

где

CHART MANAGER

$$N_k = \emptyset((\mathbf{w}_k), \quad \mathbf{p}_{mm} = \Delta_{nm} \emptyset((\mathbf{w}_{mn})), \quad (1.1.34)$$

7724

$$\mathscr{N}(\omega) = \left[\exp\frac{\hbar\omega}{\varkappa T} - 1\right]^{-1} = \mathscr{N}_{\omega}. \tag{7.7.35}$$

Благодаря наличию в (32) δ-функций температурные множители № можно вынести из-под знака суммы, и в результате все КФ выражаются друг через друга или через мнимую часть восприимчивости. Например, в случае атома

$$F_{\omega}^{(+)} = \frac{\hbar}{\pi} \mathscr{N}_{\omega} \alpha_{\omega}^{"} \theta_{\omega},$$

$$F_{-\omega}^{(-)} = \frac{\hbar}{\pi} (\mathscr{N}_{\omega} + 1) \alpha_{\omega}^{"} \theta_{\omega} = F_{\omega}^{(+)} \exp \frac{\hbar \omega}{\kappa T},$$

$$F_{\omega}^{(s)} = \frac{\hbar}{\pi} \left(\mathscr{N}_{\omega} + \frac{1}{2} \right) \alpha_{\omega}^{"},$$
(7.7.36)

где θ_{ω} равно единице при $\omega > 0$ и нулю при $\omega < 0$. Последнее соотношение называется флуктуационно диссипативной теоремой (ФДТ) или теоремой Каллена—Вельтона—Найквиста.

Пусть атом и поле находятся в равновесных состояниях с температурами T_1 и T_2 соответственно, тогда (31), согласно (36) и аналогичным соотношениям для полевых КФ, принимает вид

$$\mathcal{P} = -4i \int_{0}^{\infty} d\omega \, \omega \alpha_{\omega}^{"} G_{\omega}^{(a)} \left(\mathcal{N}_{1} - \mathcal{N}_{2} \right), \qquad (7.7.37)$$

где $\mathscr{N}_n = [\exp(\hbar\omega/\varkappa T_n) - 1]^{-1}$. При близких температурах последний множитель в (37) пропорционален $T_1 - T_2$, при этом отношение $\mathscr{P}/[T_1 - T_2]$ определяет через $\alpha_{\omega}^{"}$ «теплопроводность» связи атом — поле, через которую идет теплообмен двух термостатов.

Мы ограничились здесь одноквантовыми переходами и линейной восприимчивостью, описываемыми первыми порядками теории возмущения. Аналогичное рассмотрение можно провести и для многоквантовых переходов, нелинейных восприимчивостей и КФ высших порядков. Соответствующие обобщения ФДТ, полученные Ефремовым и Стратоновичем, кратко описаны в [37].

В заключение отметим, что взаимодействие атома с полем приводит не только к обмену энергией, но и к некоторому смещению его энергетических уровней. В случае вакуумного состояния поля это смещение приводит к изменению собственных частот на величину порядка 10° Гц (для водорода). Этот эффект называется сдвигом Лемба (см., например, [27]). При возбужденном состоянии поля сдвиг уровней называется эффектом Штарка в переменном поле (5.2.32). Это явление часто необходимо учитывать в лазерной спектроскопии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
- 2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
- 3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую раднофизику и оптику. - М.: Наука, 1981.
- 4. Климонтович Ю. Л. Квантовые генераторы света и нелинейная оптика.- М.: Просвещение, 1966.
- 5. Квантовая электроника: Маленькая энциклопедия/Отв. ред. М. Е. Жаботинский. — М.: Советская энциклопедия, 1969.
- 6. Бертен Ф. Основы квантовой электроники: Пер. с фр./Под ред. Г. В. Скроцкого.— М.: Мир, 1971.
- 7. Файн В. М. Фотоны и нелинейные среды (Квантовая радиофизика, т. 1).- М.: Сов. радио, 1972.
- 8. Пантелл Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники: Пер. с англ./Под ред. Ю. А. Ильинского. — М.: Мир, 1972.
- 9. Ярив А. Квантовая электроника: Пер. с англ./Под ред. Я. И. Ханина. М.: Сов. радио, 1980.
- 10. Пекара А. Новый облик оптики: Введение в квантовую электронику и нелинейную оптику: Пер. с пол./Под ред. Р. В. Хохлова. М.: Сов. радио, 1973.
- 11. Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов (Квантовая радиофизика, т. 2).-М.: Сов. радио, 1975. 12. Тарасов Л. В. Физические основы квантовой электроники. — М.: Сов. радио,
- 1976.
- 13. Лоидон Р. Квантовая теория света: Пер. с англ./Под ред. Г. В. Скроцкого.--М.: Мир, 1976.
- 14. Апанасевич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. -- Минск.: Наука и техника, 1977.
- 15. Мейтленд А., Данн М. Введение в физику лазеров: Пер. с англ./Под ред. С. И. Анисимова. — М.: Наука, 1978.
- 16. Звелто О. Физика лазеров: Пер. с англ./Под ред. Т. А. Шмаонова. М.: Мир, 1979.
- 17. Страховский Г. М., Успенский А. В. Основы квантовой электроники. 2-е изд., перераб. -- М.: Высшая школа, 1979.
- 18. Качмарек Ф. Введение в физику лазеров: Пер. с пол. /Под ред. М. Ф. Бухенского. — М.: Мир, 1981.
- 19. Тарасов Л. В. Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения. — М.: Радио и связь, 1981.
- 20. Елютин П. В. Теоретические основы квантовой радиофизики.— М.: Изд-во МГУ. 1982.
- 21. Дунская И. М. Возникновение квантовой электроники. М.: Наука, 1974.
- 22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1982.
- 23. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Госатомиздат, 1961.
- 24. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику, ч. І. Случайные процессы.- М.: Наука, 1976.
- 25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1964.

- 26. Ланбау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 6-е изд., перераб. М.: Наука. 1973.
- 27. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы: Пер. с англ./Под ред. В. Л. Стрижевского.— М.: Мир, 1979.
- 28. Макомбер Дж. Динамика спектроскопических переходов: Пер. с англ./Под ред. М. А. Ельяшевича. — М.: Мир, 1979.
- 29. Александров Е. Б. Оптические проявления интерференции атомных остояний.-УФН, 1972, т. 107, № 4, с. 595.
- 30. Андреев А. В., Ильинский Ю. А., Емельянов В. И. Коллективное спонтанное излучение.— УФН, 1980, т. 131, № 4, с. 653.
- 31. Делоне Н. Б., Крайнов В. П., Ходовой В. А. Двухуровневая система в сильном световом поле.— УФН, 1975, т. 117, № 1, с. 189.
- 32. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ./Под ред. Ю. Л. Климонтовича и С. М. Осовца.— М.: Мир, 1980.
- 33. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики.— М.: ВИНИТИ, 1964.
- 34. Бломберген Н. Нелинейная оптика: Пер. с англ./Под ред. С. А. Ахманова и Р. В. Хохлова.— М.: Мир, 1966.
- 35. Келих С. Молекулярная нелинейная оптика: Пер. с пол./Под ред. И. Л. Фабелинского. М.: Наука, 1980.
- 36. Фабелинский И. Л. Молекулярное рассеяние света. М.: Наука, 1965.
- 37. Клышко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика.— М.: Наука, 1980. 38. Летохов В. С., Чеботаев В. П. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии.— М.: Наука, 1975.
- 39. Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М.: Наука, 1981.
- 40. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. М.: Атомиздат, 1978.
- 41. Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. М.: Радио и связь, 1982.
- 42. Най Дж. Физические свойства кристаллов: Пер. с англ./Под ред. Л. А. Шувалова.— М.: ИЛ, 1960.
- 43. Миногин В. Г., Летохов В. С. Давление лазерного излучения на атомы. М.: Наука, 1986.
- 44. Барачевский В. А., Лашков Г. И., Цехомский Г. И. Фотохромизм и его при-менение. М.: Химия, 1977.
- 45. Нелинейная спектроскопия/Под ред. Н. Бломбергена: Пер. с англ./Под ред. С. А. Ахманова. М.: Мир, 1979.
- 46. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта.— М.: Наука, 1985.
- 47. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах/Под ред. Б. И. Беспалова. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979.
- 48. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
- 49. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
- 50. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.--М.: Наука, 1980.
- 51. Лекс М. Флуктуации и когерентные явления: Пер. с англ. /Под ред. С. П. Малышенко. -- М.: Мир, 1974.
- 52. Арекки Ф., Скалли М., Хакен Г., Вайдлих В. Квантовые флуктуации излучения лазера: Пер. с англ./Под ред. А. П. Казанцева. — М.: Мир, 1974.
- 53. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики: Пер. с англ./Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1970.
- 54. Глаубер Р.— В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика: Пер. с англ. и фр./Под ред. О. В. Богданкевича и О. Н. Крохина. — М.: Мир, 1966, с. 91.
- 55. Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике: Пер. с англ. М.: Наука, 1972.
- 56. Перина Я. Когерентность света: Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
- 57. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов /Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка: Пер. с англ./Под ред. Ф. В. Бункина.— М.: Мир, 1978.
- 58. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике.-М.: Изд-во МГУ, 1971.

- 59. Браун Р. Измерение угловых диаметров звезд.— УФН, 1972, т. 108, № 4, с. 531.
- 60. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И. УФН, 1974, т. 114, с. 41.
- 61. Braginsky V. B., Vorontsov Y. I., Thorne K. S.— Science, 1980, v. 209, № 4456, p. 547.
- 62. Пачль Г. Счет фотонов как средство фундаментальных исследований. --- Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 12, с. 2513.
- 63. Горелик Г. С. О демодуляционном анализе света.— УФН, 1948, т. 34, № 3, c. 321.
- 64. Лазерная и когерентная спектроскопия/Под ред. Дж. Стейнфелда: Пер. с англ./ Под. ред. В. С. Летохова. - М.: Мир, 1982.
- 65. Гинзбург В. Л. О природе спонтанного излучения.— УФН, 1983, т. 140, № 4. c. 687.
- 66. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г., Якубович Е. П. Резонансное взаимодействие света с веществом. — М.: Наука, 1977.
- 67. Шуберт М., Вильгельми Б. Введение в нелинейную оптику: Пер. с англ./ Под ред. М. А. Ковнера. — М.: Мир, ч. 1, 1973; ч. 2, 1979. 68. Цернике Ф., Мидвинтер Д. Прикладная нелинейная оптика: Пер. с англ./Под
- ред. С. А. Ахманова. М.: Мир, 1976.
- 69. Лазерная спектроскопия атомов и молекул/Под ред. Г. Валхерна: Пер. с англ./ Под ред. В. С. Летохова. — М.: Мир, 1979.
- 70. Летохов В. С. Нелинейные селективные фотопроцессы в атомах и молекулах.-М.: Наука, 1983.
- 71. Ярив А. Введение в оптическую электронику: Пер. с англ./Под ред. О. В. Богданкевича. М.: Высшая школа, 1983.
- 72. Гришанин Б. А. Квантовая электроника для радиофизиков. М.: Изд-во МГУ, 1981.
- 73. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.---М.: Наука, 1984.
- 74. Карлов Н. В. Лекции по квантовой электронике. М.: Наука, 1983.
- 75. Маныкин Э. А., Самарцев В. В. Оптическая эхо-спектроскопия. М.: Наука, 1984.
- 76. Гигантское комбинационное рассеяние света: Пер. с англ./Под ред. В. М. Аграновича. — М.: Мир, 1984.
- 77. Walls D. F. Squeezed states of light.- Nature, 1983, v. 306, p. 141.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адаптивная оптика 198 Адиабатическое возмущение 52, 91 — размагничивание 143 Альтернативный запрет 152 Амплитуда медленно меняющаяся 160 — перехода 19, 29, 275 — плоской волны 24 — состояния 51, 93 Аналитический сигнал 217 Ансамбль Гиббса 39 — микроканонический 43 Антигруппировка фотонов 108, 167, 225, 274

Базис 246 — переполненный 253 — энергетический 54 Биения квантовые 105, 171, 277 Бра-вектор 246

Вакуум 52, 61, 100, 191, 249 Вектор Блоха 85, 100 — Паули 84, 90 — Пойнтинга 131, 160 — поляризации 24, 159 собственный 247 — состояния 55, 246 Вероятность перехода 21, 95, 150, 275 Видность 222 Волны новые 65, 76 - свободные (нормальные) 65 — ударные 158 Восприимчивость 56, 80, 108 — вакуума 60, 281 — нелинейная 119 Время выборки 263 — жизни 105, 112 - когерентности (корреляции) 30, 222 — релаксации 36, 51, 82 Выпрямление оптическое 124, 130 Вырождение носителей 48 — уровней 27, 44 - фотонов 224 Вычитание частоты 185

Гармоники пространственные 233 Генератор параметрический 185 Генерация гармоник 187 — комбинационных частот 194

Голография 168, 197, 201 Группировка фотонов 228, 267 Давление света 129 Дельта-функция 21, 32, 152, 165, 233 Диада 83, 246, 253, 259 Дисперсия (случайной величины) 86, 218 — (частотная) 65 — аномальная 138 индуцированная 138, 156, 166 — нелинейная 157 — отрицательная 73 пространственная 65, 140 — частотно-угловая 156 Длина вектора 347 взаимодействия 197 волны комптоновская 128 дифракционная 177 квантования 233 когерентности 158, 181, 222 самофокусировки 176 Добротность вещества (магнитная) 213 — нагруженная 215 — резонанса 70 Закон Бугера 9, 98, 169 — дисперсии 64, 75 — Кирхгофа 155, 207, 215 — сохранения импульса 156 Затухание свободной поляризации 98 Зона ближняя 180 волновая 182 — дальняя 160, 181, 223, 245 — запрещенная 47, 73 Излучение вынужденное 7, 21 --- двухфотонное 151 — дипольное 100 коллективное (кооперативное) 110 — собственное 99 спонтанное 100, 190, 211, 276 стационарное 221 тепловое 103, 158 — черного тела 211 Измерение квантового выхода 274 Импульс кинетический 239 Инверсия (координат) 125

Гетеродинирование света 230

Инверсия (населенностей) 29, 45, 69 — в полупроводнике 47 Интенсивность 24, 210, 218 Интерференция состояний 151 Ионизация многофотонная 167 — туннельная 168

Квазивероятность 219, 227, 260 Квазиуровень Ферми 48 Кинетика населенностей 25 — фотонов 26 Когерентность 11, 31, 158 — временная 221 — пространственная 223, 230 Коммутатор 244 Компонента антистоксова 137 — стоксова 137 Корреляция 82, 229, 270 Коэффициент двухфотонного поглощения 152 — отражения 9, 73 — передачи 27, 189, 193, 206 — поглощения 9, 26 — усиления 24

— усиления 24 — Эйнштейна 31, 41, 206 Кэт-вектор 246

Лазер 8, 13 — полупроводниковый 46, 48

Магнетон Бора 20, 89, 242 Мазер 9, 12 Матрица вторых моментов 29 — Паули 83 — плотности 38 преобразования базисов 251, 257 — рассеяния 161, 189 Мода 35, 160, 236 поперечная 210, 259 Модель двухуровневая 77 — Лоренца 66 Модуляция добротности 81 Момент второй 82, 203 - высший 86 — дипольный 20, 56, 66, 79, 85 - квадрупольный 66 - количества движения (импульса) 84, 90, 93 — магнитный 82, 89, 239 — магнитодипольный 20, 66 нормальный (факториальный) 228, 243, 250, 264, 273 - первый 203 — поля 203

Накачка 8, 12 Населенность 8, 15, 25, 42, 44 Насыщение 9, 79, 96, 168, 216 Неравенство Коши 42 Норма вектора 347 Нутация 94, 109

Обозначения Дирака 245 Обратная связь 9, 185, 212 — — распределенная 187 Обращение волнового фронта 157, 195, 197 Объем детектирования 227 когерентности 223 Огибающая 217 Ограничение интенсивности света 167 Оператор дипольного момента 20, 85 — единичный 101, 253 — Паули 90 плотности 38, 259 -- положительно-частотный 102, 106, 253 проектирования 61, 182, 247 — рождения 21, 84, 219, 238, 243 смещения 251 — унитарный 54 — уничтожения 21, 84, 219, 238, 243 -- эволюции 54 Отношение гиромагнитное 77, 90 Параметр волновой 173 конфокальный 178 — регенерации 214 — Стокса 221 Переход вынужденный 8, 17, 22, 33 магнитодипольный 20 — многофотонный 118, 150 --- спонтанно-вынужденный 153, 158, 173 — спонтанный 33, 52, 100, 153 — фазовый 113 Пленение излучения 104 Плотность мод 35, 234 - оптическая 27 потока фотонов 24, 79, 162 — — энергии 60 распределения вероятности 247 — состояний 47 — спектральная 30, 35, 205, 221, 280 — тока 240 — энергии 24, 31, 82 Поглощение двухфотонное 167 индуцированное (нелинейное) 166 Показатель затухания 72 — преломления 64, 72 Поле действующее (локальное) 67 Полоса усиления 27 Поляризация 56, 68 — нелинейная 161

コートノビーション 名

したないないないというないのないのです。

ないたいで、「たいないない」というで、

Поляризуемость 56, 69, 127 Поляритон 73 Поправка Лоренца 133 Постоянная Ридберга 34, 128 - тонкой структуры 34, 128 Потенциал векторный 236 — Гиббса 143 термодинамический 63 - химический 63 --- эффективный 64 Правило Миллера 135 — отбора 20 — сумм 70 Представление Гейзенберга 55, 82, 102 — Глаубера — Сударшана 259 — Дирака (взаимодействия) 55 — Шредингера 55, 249 Преобразование Гильберта 59, 222 — унитарное 54 — Фурье 58, 160 -- частоты 184 Прецессия 86 Приближение борновское 108, 201 вращающейся волны (резонансное) 21, 78, 93, 275 — двухуровневое 89 — дипольное 20, 240 --- заданной накачки (параметрическое) 172, 184 клейнмановское 121 — марковское 51 медленно-меняющейся амплитуды 165 — одномерное 159 Приготовление состояния 95, 104, 248 Принцип детального равновесия 53 — Неймана 126 — Онсагера 58 — Паули 46 причинности 59, 68, 120, 150 Пробой оптический 167 Провал Беннета 81 Проектор 247 Прозрачность самоиндуцированная 98 Пространство Гильберта 84 Процесс каскадный 157 параметрический 155 Радиус Бора 20, 128 — когерентности 223 Разделение изотопов 132, 168 Распределение Бернулли 271 — Бозе — Эйнштейна 262 — Больцмана 8, 29, 44 — геометрическое 262 — Гиббса 44, 262 — Максвелла 77 — Планка 33

— Пуассона 227 — Ферми — Дирака 46, 77

Рассеяние анизотропное 144

Рассеяние гиперпараметрическое 190, 196 - гиперрэлеевское 129 — когерентное 194 комбинационное (рамановское) 136, 171 — комптоновское 129 140. — Мандельштама — Бриллюэна 171, 194 — на поляритонах 192 — неупругое 139 — обращенное 174 параметрическое 189, 269 — рэлеевское 136 — света на свете 190, 196 — температурное (энтропийное) 141 томсоновское 129 Реакция излучения 103 — термоядерная 168 Редукция 258 Релаксация 9, 25, 36, 49 поперечная (спин-спиновая) 51 — продольная (спин-решеточная) 53 Самомодуляция 178 Самосжатие 179 Самофокусировка 174 Сверхгруппировка фотонов 269 Сверхизлучение 16, 110 Сверхлюминесценция 113, 211 параметрическая 190 Свет двухфотонный 229, 269 Светоэкситон 73 Сдвиг Лемба 34, 103, 282 Сечение взаимодействия (перехода) 9, 24 — двухфотонное 152 томсоновское 130 Сила давления света 64, 129 — Лоренца 127, 239 — Миллера 131 осциллятора 67 — света 211 Синхронизация мод 81 Синхронизм 111, 156, 180 — групповой 159 Скобки Пуассона 240, 243 Скорость групповая 24, 65 — перехода 21, 30 – релаксации 78 Солитон 99, 179 Соотношения коммутационные 242 — Крамерса — Кронига 59, 120 — Менли — Роу 124, 162, 184 — неопределенностей 105, 256 Сопротивление отрицательное 213 Состояние безызлучательное 112 виртуальное 54, 150 — импульсное 254

— координатное 254
Состояние сжатое 257 смешанное 39, 259 — чистое 38 — энергетическое 42, 86, 248 Спектроскопия активная 157, 197 — бездоплеровская 169 — двухфотонная 152, 170 — когерентная 92 насыщения 170 — оптического смешения 229 — рамановская 152 — рамановского усиления 197 — Фурье 222 — эхо 116 Спин 89 Способность излучательная 211 поглощательная 207 Среда центросимметричная 126, 149 Структура тонкая и сверхтонкая 107 Сумма статистическая 44 Сфера Блоха 85, 99 Температура отрицательная 8, 45 — шумовая 45, 208 — эффективная (спиновая) 45, 191, 216 — яркостная 34, 174 Теорема Винера — Хинчина 222 — флуктуационно-диссипативная 282 Теория возмущения 18, 56 Термостат 10, 32, 50, 278 Торможение излучением 103 Трение радиационное 130 Угол анизотропии 160 — дифракционный 210 прецессии 86, 95 — рассеяния 191 Унитарность 56 Упорядочение нормальное 102, 105, 243 Уравнения Блоха 83, 88 - Гамильтона 238 -- Гейзенберга 82 — Гельмгольца 154, 182 - кинетическое 51, 77 — Ландау — Власова 154 — Максвелла 60 — Неймана 49 Ньютона 239 параболическое 178 — переноса 26, 161 — Френеля 65 характеристическое 83 — Шредингера 17 Уровень Ферми 46 Усиление параметрическое 185 Усилитель квантовый 207 парамагнитный 12, 27, 209 — резонаторный 212 Уширение неоднородное 81, 114

Фактор вырождения 35, 224 — насыщения 79 g-фактор 89 Факторизация 40, 250 Флуктуации амплитуды 216 — вакуума 35, 101, 191 — интенсивности 167, 218, 227 — квантовые 39, 130, 189 --- нулевые 35, 191, 258 - поляризации 139 — равновесные 74 — тепловые 39 фотоэлектронов 228 Флуоресценция резонансная 107 Фонон оптический 75 Формула Клаузиуса — Мозотти 133 Форм-фактор 22, 152 - Кубо 77, 281 — Манделя 225, 271 — Найквиста 216 — Раби 95 — Таунса 216, 223 Функция аналитическая 59 - Грина (отклика) 59, 61, 70, 77, 182, 281 - когерентности 29, 221 — Планка 206 производящая 265, 273 — распределения 50, 146 - собственная 248 - состояния 63 — ступенчатая (Хевисайда) 59, 103 характеристическая 260 Частота боровская (перехода) 16 — плазменная 67 прецессии 90 — Раби 22 Часть положительно-частотная 21, 217 Четность состояния 20, 149 Число активных частиц 9 — заполнения 250, 261 — мод 173 — фотонов 104 — — на моду 35, 173, 211, 224 Френеля 112, 173

Ширина линии 22, 52 — естественная 34, 104 — доплеровская 22 — квантового генератора 216 — полевая 80 — столкновительная 22 — синхронизма 193 Шпур 30, 56, 84 Шумы квантового усилителя 207 — параметрического усилителя 191 Эволюция 48, 50, 259 Экситон 75 Электродинамика квантовая 204 Электрострикция 63, 134 Эллипсометрия нелинейная 197 Энергия внутренняя 63 - свободная 63 Энтропия 46, 62 Эрмитовость 42 Эффект Брауна — Твисса 229, 269 — Доплера 22, 107, 169 — Зеемана 45 — Капицы — Дирака 130 — Керра 144

- -- оптический 134, 144
- — рамановский 197

Эффект Комптона 131

- насыщения см. насыщение
- --- нестационарный 92
- Покельса 124
- -- просветления 168
- Рамана обращенный 174, 197
- Фарадея 124
- Штарка 45, 109, 170, 282
- электрокалорический 63, 143
- Эхо оптическое 114

Яркость 210

- вакуума 191, 211 спектральная 34, 191, **2**10, 243

оглавление

I

Предисловие	3 5
Глава 1. Введение	77
9 1.2. история квантовой электроники	10
Глава 2. Вынужденные квантовые переходы	14
§ 2.1. Амплитуда и вероятность перехода	14
§ 2.2. Переходы в монохроматическом поле	20
§ 2.3. Сечение и коэффициент поглощения	24
§ 2.4. Вынужденные переходы в случайном поле Корреляционные функции (29). Скорость перехода (30). Коэффи- циент Эйнштейна В (31). Спектральная плотность поля (31).	29
§ 2.5. Поле в качестве термостата	32
Глава 3. Матрица плотности, населенности и релаксация	37
§ 3.1. Определение и свойства матрицы плотности	37
§ 3.2. Населенности уровней	4 4
§ 3.3. Эволюция матрицы плотности Неравновесные системы (48). Уравнение Неймана (49). Взаимо- действие с термостатом (50). Эволюция замкнутой системы (50). Поперечная и продольная релаксации (51). Представление взаи- модействия (54). Теория возмущения (56).	48

Глава	4. Восприимчивость вещества	57
§ 4.1.	Определение и общие свойства восприимчивости	57
§ 4.2.	Теория дисперсии Закон дисперсии (64). Учет поглощения (65). Классическая теория дисперсии (66). Квантовая теория дисперсии (67). °Сила осциллятора (69) Изаянрованый резонанс (70). °Поляристочи (73).	64
§ 4.3.	Двухуровневая модель и эффект насыщения	77
§ 4.4°	.Уравнения Блоха Кинетические уравнения для средних (81). Матрицы Паули и разло- жение операторов (83). Вектор и сфера Блоха (85). Высшие момен- ты и распределения (86). Уравнения Блоха (87). Уравнение для поляризации (89). Магнитный резонанс (89).	. 81
Глава	5. Нестационарная оптика	92
§ 5.1.	Вынужденные нестационарные эффекты Атом как гироскоп (93). Аналитическое решение (95). Эффект ну- тации (96). Самоиндуцированная прозрачность (98).	93
§ 5.2.	Собственное излучение атома. Излучение диполя (100). Вероятность спонтанного перехода (100). "Нормально-упорядоченное излучение (101). Связь спонтанного и теплового излучений (103). Об излучении дробных долей фотона (104) "Квантовые биения (105)	99
§ 5.3.	Коллективное излучение	110
Глава	6. Нелинейная оптика	117
§ 6.1.	Нелинейные восприимчивости — определения и общие свойства Нелинейные восприимчивости (119). °Различные определения (120). °Перестановочная симметрия (122). °Прозрачное вещество (123). Родь симметрии среды (125)	119
§ 6.2.	Модели оптического ангармонизма	126
§ 6.3.	Макроскопическая нелинейная оптика Исходные соотношения (154). Классификация нелинейных эффек- тов (155). Роль линейной и нелинейной дисперсий (158). °Одномер- ное приближение (159). Соотношение Мэнли — Роу и переста- новочная симметрия (162). °Вывод одномерных уравнений (164).	154
§ 6.4.	Непараметрические взаимодействия	166
§ 6.5.	Параметрические взаимодействия Приближение заданной накачки — ближняя зона (180). Дальняя зона (181). Взаимодействие трех волн (183). Преобразование ча- стоты вверх (184). Параметрическое усиление и генерация (185). Встречное взаимодействие (186). Генерация второй гармоники (187). °Матрица рассеяния (189). °Параметрическое рассеяние света	179

2

(189). °Рассеяние света на поляритонах (193). Четырехволновые взаимодействия (194). Нелинейная спектроскопия (196). Динамическая голография и обращение волнового фронта (197).

Глава 7. Статистическая оптика	203
§ 7.1. Закон Кирхгофа для квантовых усилителей	205
§ 7.2. Основные понятия статистической оптики Аналитический сигнал (217). Случайная интенсивность (218). Кор- реляционные функции (220). Временная когерентность (221). Про- странственная когерентность (223). Объем когерентности и фактор вырождения (223). Статистика фотоотсчетов. Формула Манделя (225). Группировка фотонов (228). Корреляция интенсивностей (229).	217
§ 7.3. Гамильтонова форма уравнений Максвелла	232
§ 7.4. Квантование поля	242
§ 7.5°. Возможные состояния поля и их свойства	245
.§ 7.6°. Статистика фотонов и фотоэлектронов	263
§ 7.7°. Взаимодействие атома с квантованным полем	275
Список литературы	283
Предметный указатель	286

.

۱

ŋ

1

;

Давид Николаевич Клышко ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

Редактор Н. А. Петрунина Художественный редактор Г. М. Коровина Технический редактор И. Ш. Аксельрод Корректоры Е. Ю. Рычагова, Н. Б. Румянцева

ИБ № 12928

Сдано в набор 30.09.85. Подписано к печати 07.05.86. Т-11510. Формат 60×90/14. Бумага тип. № 1. Гаринтура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 18,5. Усл. кр.-отт. 18,5. Уч.-изд. л. 19,92. Тираж 9400 экз. Заказ № 1934. Цена 1 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Огдена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 113054 Москва М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука» 121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6. Зак. 2763