

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Основные понятия квантовой физики с операциональной точки зрения

Д.Н. Клышко

*Смысл основных понятий нерелятивистской квантовой физики — волновая функция, редукция, приготовление и измерение состояния, проекционный постулат, соотношение неопределенностей — поясняется с помощью реалистических экспериментальных процедур. По мере возможности привлекаются классические аналогии. В качестве примеров рассматриваются измерения поляризации фотонов, координаты и импульса частиц, а также корреляции Эйнштейна–Подольского–Розена, эффекты Ааронова–Бома, "квантовой телепортации" и др. Обсуждаются различные признаки неклассичности квантовых моделей типа антигруппировки фотонов и нарушения неравенств Белла.*

PACS number: 03.65.Bz

## Содержание

1. Введение (975).
2. Операциональный подход (977).
3. Классические вероятности (978).
  - 3.1. Приготовление классического состояния. 3.2. Измерение классического состояния. 3.3. Аналог смешанного состояния и маргиналы. 3.4. Моменты и вероятности.
4. Квантовые вероятности (980).
  - 4.1. Классические этапы в квантовых моделях. 4.2. Полный набор операторов и измерение волновой функции. 4.3. Квантовые моменты. 4.4. Представления Шрёдингера и Гейзенберга. 4.5. Квантовая проблема моментов. 4.6. Неклассический свет. 4.7. Проекционный постулат и редукция волновой функции. 4.8. Частичная редукция волновой функции. 4.9. Корреляционные функции Вигнера. 4.10. Смешанные состояния.
5. Двухуровневые системы (990).
  - 5.1. q-биты. 5.2. Пример процедуры приготовления состояния. 5.3. Поляризация света. 5.4. Измерение поляризации фотонов. 5.5. Коррелированные фотоны. 5.6. Отрицательные и комплексные "вероятности". 5.7. Парадокс Белла для параметров Стокса. 5.8. Парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера для параметров Стокса. 5.9. "Телепортация" поляризации фотона.
6. Частица в одном измерении (1002).
  - 6.1. Измерение координаты или импульса. 6.2. Время-пролетный эксперимент. 6.3. Соотношения неопределенностей и эксперимент. 6.4. Распределение Вигнера. 6.5. Модель альфа-распада. 6.6. Модуляция волновой функции. 6.7. Квантовые магнитометры и парадокс Ааронова–Бома.

## 7. Заключение (1010).

## 8. Приложения (1012).

I. Собственные векторы операторов Стокса и парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера. II. К теории "квантовой телепортации".

## Список литературы (1014).

*Теоретическое знание бывает спекулятивным, если оно направлено на такой предмет или такое понятие о предмете, к которым нельзя прийти ни в каком опыте.*

И. Кант "Критика чистого разума"

## 1. Введение

Около 100 лет назад, с формулы Планка для теплового излучения, квантовая физика начала свой список побед. Во всех известных нам экспериментах наблюдается отличное согласие между предсказаниями квантовой теории и соответствующими экспериментальными данными. Перефразируя известное выражение Вигнера, можно говорить о "непостижимой эффективности квантового формализма".

К сожалению, эффективность формализма сочетается с непреодоленными до сих пор трудностями его интерпретации. В частности, до сих пор не образовалась единая точка зрения на смысл понятия волновой функции (ВФ). Аналогичная неопределенность свойственна также и другому важному понятию — редукции ВФ. Среди множества различных воззрений можно выделить два основных класса. Одна группа физиков, последователей Бора, считает ВФ свойством каждой изолированной квантовой системы, например, одиночного электрона (ортодоксальная или копенгагенская интерпретация), а другая, следуя Эйнштейну, полагает, что ВФ описывает лишь ансамбль — множество одинаковых систем (статистическая или ансамблевая интерпретация). Подробнее этот вопрос обсуждается в обзоре Хоума и Уиттакера

Д.Н. Клышко, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет  
119899 Москва, Воробьевы горы, Россия  
Тел. (095) 939-11-04  
E-mail: dnk@klyshko.phys.msu.ru

Статья поступила 17 февраля 1998 г.

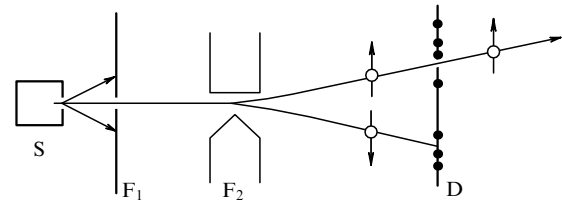
[1]. В замечательном учебнике Садбери [2] есть глава "Квантовая метафизика", в которой рассмотрены 9 различных интерпретаций квантового формализма. Среди других исследований методических проблем квантовой физики отметим работы [3–7].

В настоящем обзоре предпринята попытка уточнить смысл некоторых базовых понятий нерелятивистской квантовой физики, применяя *операциональный* подход, т.е. указывая, как они проявляются в экспериментах. Другой особенностью изложения является привлечение возможно более близких классических моделей – аналогов, так что обсуждаемую тему можно было бы назвать "классические и квантовые вероятности с точки зрения экспериментатора". На простых примерах прослеживается сходство и принципиальное различие классических и квантовых вероятностных моделей. По возможности используется общедоступный стиль изложения без громоздких математических выражений. Некоторые необходимые выкладки отнесены в Приложения.

Можно выделить следующие четыре главные темы работы: 1) логическая структура квантового описания действительности; 2) необходимость разграничения теории и ее интерпретации; 3) волновая функция — ее смысл, приготовление, модуляция, измерение и редукция; 4) "неклассичность" квантовой физики — невозможность введения совместных вероятностей для некоммутирующих операторов и неклассические оптические эффекты.

Обзор имеет следующую структуру. В разделе 2 разъясняется суть операционального подхода в физике и подчеркивается его исключительная роль при обсуждении методических проблем квантовой физики. Далее в разделе 3 на примере классических вероятностных моделей с бросанием игральной кости или монеты обсуждается ряд важных для дальнейшего изложения понятий и терминов, имеющих близкие аналоги в квантовой физике. В разделе 4 рассматриваются общие особенности квантовых моделей, дается определение основных квантовых понятий и терминов, приводится логическая схема описания квантовых динамических экспериментов по измерению различных наблюдаемых, а также и самой ВФ. Далее общий формализм поясняется на конкретных примерах в разделах 5 и 6. Они посвящены двум базовым моделям квантовой механики: модели системы с двумя уровнями и модели нерелятивистской точечной частицы, движущейся в одном измерении. Простота этих моделей, наличие классических оптических и механических аналогов делают их идеальными объектами для начального обучения квантовой физике, обсуждения методических и терминологических вопросов. Мы рассмотрим лишь некоторые существенные аспекты этих моделей, почти не затрагиваемые в учебниках. Значительная часть раздела 5 посвящена оптическим экспериментам, связанным с поляризацией фотонов и проявляющим существенно неклассические особенности.

Нас будут интересовать в основном динамические эксперименты, связанные с эволюцией квантовой системы во времени – пространстве. В качестве типичного примера рассмотрим эксперимент Штерна – Герлаха по наблюдению отклонения частицы с магнитным моментом  $\mathbf{M}$  в неоднородном магнитном поле (рис.1). Здесь четко выделяются основные элементы динамического эксперимента: *источник* частиц  $S$ , *детекторы*  $D$  (кристаллики бромистого серебра в фотоэмульсии), пространство квантовой эволюции частиц между  $S$  и  $D$ ,



**Рис. 1.** Схема эксперимента Штерна – Герлаха.  $S$  — источник частиц,  $F_1$  — экран с отверстием (коллиматор),  $F_2$  — область с неоднородным магнитным полем,  $D$  — фотопластина.  $F_1$  и  $F_2$  осуществляют пространственную и магнитную фильтрацию и могут быть отнесены к подготовительной и измерительной частям установки, соответственно. Если в  $D$  сделать маленькое отверстие, то  $F_2$  и  $D$  будут служить фильтром, изредка пропускающим частицы в состоянии с определенной проекцией спина.

фильтры  $F_1$  и  $F_2$ . Источник  $S$  и коллиматор  $F_1$  (экран с отверстием, осуществляющий пространственную фильтрацию) составляют *подготовительную* часть установки. Магнит  $F_2$  дает неоднородное магнитное поле, связывающее спиновые и кинетические степени свободы частицы. Детекторы  $D$  вместе с магнитом можно отнести к *измерительной* части установки. Здесь лишь эволюция частицы от источника до детектора описывается уравнением Шрёдингера с учетом влияния классического магнитного поля, остальные элементы  $S$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $D$  полагаются классическими устройствами с известными параметрами.

В идеальном случае регистрируется каждая индивидуальная частица. Непосредственно *измеряемой* величиной является классическая координата точки почернения  $x_1$ , определяемая с помощью, например, калиброванной линейки. Полученное размерное число принимается за априорную — до поглощения фотоэмульсией — координату частицы (конечно, точность измерения ограничена, например, размером атома серебра). Таким образом, здесь непосредственно *наблюдаемым* оператором можно принять оператор координаты  $X$  (подробнее эта процедура рассмотрена в разделе 6.1). Отсюда можно при известных параметрах *рассчитать* (исходя из уравнения Шрёдингера и начальной ВФ частицы) априорную проекцию момента частицы  $m_x$ . Это пример *косвенного* измерения оператора  $M_x$ .

Если вместо фотопластины  $D$  установить экран с небольшим отверстием, то получим аппарат, приготавливающий частицу в состоянии с определенной проекцией момента  $m_x$ . Подчеркнем, что при этом оператор  $M_x$  уже не измеряется, экран с отверстием служит дополнительным фильтром. Мы видим, что процедуры измерения и приготовления не идентичны, как это предполагается в рамках ортодоксального подхода [2, 3]. Однако возможна, в принципе, ситуация, когда детектор обнаруживает частицу в определенной точке плоскости  $D$  не уничтожая ее, что дает информацию об операторе  $M_x$  пролетающей частицы. При этом с помощью второго комплекта измерительной аппаратуры можно еще раз измерить  $M_x$  и убедиться в корреляции показаний двух детекторов.

Большими буквами  $A, B, \dots$ , как правило, обозначают операторы ( $q$ -числа), маленькими  $a, b, \dots$  — их собственные значения и параметры типа массы  $m$ , заряда  $e$ , времени  $t$  ( $c$ -числа, которым соответствуют

измеряемые классические величины). Однако это правило в некоторых случаях нарушается, например, оператор уничтожения фотонов традиционно обозначается  $a$ . В экспериментах большим буквам соответствуют регистрируемые величины (например, координата частицы  $X$ ), а маленьким — принимаемые ими в отдельных испытаниях флуктуирующие значения  $(x_1, x_2, \dots)$ .

## 2. Операциональный подход

Для установления в физике единой четкой терминологии большое, если не основное, значение имеет операциональный подход — определение основных понятий с помощью подходящих экспериментальных операций — процедур. Мы имеем в виду "умеренный" операционализм, когда лишь некоторые базовые понятия определяются через (более или менее) реалистические эксперименты. При этом возможность использования множества удобных производных понятий, не имеющих прямого отношения к эксперименту, не исключается.

В нерелятивистской квантовой физике, как и в любом завершённом, успешном разделе физики, можно выделить следующие четыре основные категории.

1. Математические модели.

2. Правила соответствия между математическим формализмом и экспериментом. Установление отображения между двумя множествами — символов и экспериментальных процедур — и есть задача операционального подхода, который лежит в основе настоящей работы.

3. Эксперименты, в ходе которых математическая модель или правила соответствия подтверждаются или опровергаются (см. эпиграф). По Попперу возможность *фальсификации* (опровержения) — определяющий признак любого научного утверждения. Этот признак многими философами отвергается, однако без подобных критериев трудно провести границу между наукой и лженаукой типа парапсихологии.

4. Интерпретация формализма и эксперимента. Сюда входят словесные определения символов и описания идеализированных моделей, наглядные образы и рисунки. К этой составляющей примыкает философия, гносеология, семантика и т.д. Можно выделить здесь подмножество *метафизических* понятий, введенных без необходимости — вопреки заветам Оккама, Ньютона, Канта. Примером такого избыточного понятия, не нашедшего места в количественной теории, является, по нашему мнению, *частичная редукция* ВФ поля при регистрации одного из двух коррелированных фотонов (см. разделы 5.5 и 5.7). Границы этого подмножества субъективны и подвижны — когда-то и атомы можно было относить к метафизике. Метафизические понятия и наглядные модели играют важную роль на начальных этапах становления теории.

Предложенная предельно упрощенная структуризация физики (и профессиональной деятельности физиков), конечно, не единственно возможная; этой проблеме было посвящено множество усилий. Интересный подход, подчеркивающий принципиальную роль моделей, развивается А.И. Липкиным [7].

Рассмотрим соотношение неопределенностей для двух произвольных эрмитовых операторов  $A$  и  $B$ :

$$\Delta a \Delta b \geq \frac{|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|}{2}.$$

Это неравенство имеет чисто математическое происхождение и относится поэтому к 1-й категории введенной выше структуры. В частном случае, когда в качестве  $A$  и  $B$  выбраны координата  $X$  и импульс  $P$  частицы, рассматриваемое неравенство принимает знакомый вид  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ . Его операциональный смысл и соответствующие эксперименты (2-я и 3-я категории) будут рассматриваться в разделе 6.3. К 4-й категории, связанной с соотношением неопределенностей, относятся рассуждения о дуализме "волна — частица", принципе дополненности, роли взаимодействия частицы с измерительным прибором и т.д. Их характерная черта — отсутствие четких однозначных определений и проверяемых утверждений, что сближает их с искусством, как альтернативным способом отображения действительности.

Задачей операционального подхода в нашем понимании является лишь формулировка экспериментального содержания некоторых основных понятий и утверждений. При таком определении операциональный подход не имеет отношения к философии, это просто сводка определений базовых символов посредством соответствующих экспериментальных процедур (желательно реалистических), необходимая для сравнения теории с экспериментом. Операциональное определение терминов и символов содержит инструкции для экспериментатора. Теоретик, давая задание экспериментатору, должен сказать на понятном им обоим языке: "Сделай вот так ..., тогда получишь следующий результат ...". Сюда должны входить описания реалистических приготовительной и измерительной процедур. Характерной чертой надежных научных выводов является их воспроизводимость в различных лабораториях, что подразумевает обмен информацией о постановке эксперимента, т.е. наличие соответствующего языка.

Такой подход следует отличать от философского направления *операционализма*. Последний — как и различные оттенки *позитивизма* — отказывает в праве на существование понятиям, не имеющим непосредственного отношения к экспериментам. В квантовой физике можно выделить также *минимальную* точку зрения (см. [2]), удовлетворяющуюся эффективностью вычислительных алгоритмов (ее разделяет значительная часть физиков). Это по существу отказ от попыток интерпретации. Подобные экстремальные точки зрения переоценивают возможности аксиоматического подхода в физике и недооценивают важную роль наглядных моделей на начальных этапах развития новых направлений физики, а также удобства многих метафизических терминов для словесного общения и проектирования новых экспериментов.

"Наивного реалиста" и "метафизика" отличает любопытство: "А что там происходит на самом деле?" "Прагматик" или "инструменталист" полагают такой вопрос не имеющим научного смысла, поскольку любой ответ на него нельзя фальсифицировать, т.е. вопрос относится к той же категории, что и известная задача о числе ангелов на конце иглы. Единственная на их взгляд задача физики — конструирование математических моделей (по возможности универсальных), которые отображают некоторые черты реального мира, в основном, его симметрию, и проверка их адекватности. На это со стороны метафизика следует встречное обвинение в *расширенном солипсизме* (см. [2]). Старая философская проблема о соотношении между *сущностью* и *явлением*

проявилась в квантовой физике в обостренной форме. Если определить научное знание как отображение некоторой части природы на другую ее часть — на наше сознание, — то ясно, что такое отображение в принципе не может быть полным или точным, и вопрос: "А что там происходит на самом деле?" не имеет смысла.

Сторонники *буквальной* интерпретации ВФ [2] полагают, что каждому квантовому объекту можно приписать его "истинную" ВФ. В случае одной частицы ВФ заменяет ее классические кинематические параметры — координату и скорость; часто подразумевается, что ВФ сопровождает частицу в виде некоторого (комплекснозначного) поля или "облачка". В случае двух индивидуальных частиц это "облачко" существует в 8-мерном пространстве–времени и изменяется там в соответствии с уравнением Шрёдингера. Соответственно, при каждом измерении, давшем наблюдаемый результат  $a_1$ , полагают, что с этой индивидуальной ВФ происходит "реальное" изменение — мгновенная редукция  $|\psi\rangle \rightarrow |a_1\rangle$  ( $a_1$  — измеренное собственное значение оператора  $A$ ) (см. разделы 4.7, 4.8, 5.5–5.9).

В настоящее время выбор определенной интерпретации квантового формализма — дело вкуса. Однако, по нашему мнению, следует все же избегать злоупотребления научно необоснованными терминами типа мгновенная редукция, нелокальность (раздел 5.7), телепортация (раздел 5.9), хотя бы для того, чтобы не питать лженауки. С другой стороны, операциональное определение базовых терминов представляется основной компонентой любой физической теории. Она особенно важна в процессе преподавания квантовой физики.

### 3. Классические вероятности

В настоящем разделе будут рассмотрены классические аналоги некоторых понятий и процедур квантовой физики. На простых классических моделях мы попытаемся дать наглядное представление о понятии *состояния* (*чистого* и *смешанного*), *приготовления* состояния и *измерения*, а также обосновать следующие два утверждения, которые, по-видимому, сохраняют смысл и в квантовом случае.

1. Приписывание набора вероятностей (мы будем этот набор называть "состоянием", чтобы подчеркнуть аналогию с квантовой терминологией) индивидуальной системе, проявляющей случайность, имеет в некоторых идеальных случаях четкий операциональный смысл, определяемый *приготовительной* процедурой.

2. Нет принципиального, качественного различия между одним испытанием и сколь угодно большим конечным числом однородных испытаний — в обоих случаях эксперимент не дает достоверного результата.

#### 3.1. Приготовление классического состояния

При бросании обычной игральной кости возможно шесть исходов или *элементарных событий*: выпадение цифр  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  или  $6$  на верхней грани (имеется в виду "честное", т.е. достаточно хаотическое бросание кости с практически непредсказуемыми результатами). Назовем совокупность этих шести возможностей *пространством элементарных событий*. Это пространство состоит из дискретных пронумерованных точек,  $n = 1, \dots, N$  ( $N = 6$ ). Каждому событию припишем из физических или иных соображений определенную

вероятность  $p_n$  и примем далее колмогоровские аксиомы неотрицательности  $p_n \geq 0$ , нормированности  $\sum p_n = 1$  и аддитивности (см., например, [8]). Совокупность вероятностей назовем *состоянием* данной индивидуальной кости и будем ее записывать так:  $\Psi \equiv (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \equiv \{p_n\}$ . Если кость сделана из однородного материала и имеет идеально симметричную форму, то естественно принять все вероятности одинаковыми,  $p_n = 1/6$ .

Но в общем случае это не так. Можно *приготовить* кость со смещенным центром тяжести или другую более сложную механическую модель типа рулетки, у которой, например,

$$\Psi \equiv (0,01; 0,01; 0,01; 0,01; 0,01; 0,95). \quad (3.1.1)$$

Ясно, что *каждой* кости (или рулетке) можно приписать определенное состояние  $\Psi$  — шесть чисел, которые содержат полную вероятностную информацию о данной кости, о характере ее асимметрии. Состояние (набор вероятностей) данной кости определен ее формой, конструкцией, положением центра тяжести и другими физическими параметрами, так что со временем оно практически не изменяется (таким образом, мы исключаем из понятия состояния данной кости особенности процедуры бросания, результаты которого предполагаются практически полностью случайными, непредсказуемыми).

Часто состояние характеризуют с помощью набора чисел  $\{\mu_k\}$  — *моментов*, порождаемых состоянием по правилу

$$\mu_k \equiv \langle n^k \rangle \equiv \sum_n n^k p_n.$$

Комбинация из первого и второго моментов  $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \equiv \Delta n^2$  называется *дисперсией*. Корень из дисперсии  $\Delta n$  (*стандарт* или *неопределенность*) характеризует отклонение от среднего (*флуктуацию*). Например, для правильной кости  $\langle n \rangle = 3,5$  и  $\Delta n = 1,7$ , а для состояния (3.1.1) имеем  $\langle n \rangle = 5,85$  и  $\Delta n = 0,73$ . По полному набору моментов можно, в принципе, восстановить состояние, т.е. вероятности (в квантовых моделях это не всегда так, см. разделы 4.5, 5.6–5.8, 6.4).

Любое возможное состояние кости можно отобразить в виде точки в воображаемом 6-мерном *пространстве состояний*, если вдоль базисных осей этого пространства откладывать  $p_n$  или, иначе,  $c_n \equiv \sqrt{p_n}$ . В последнем случае изображающая точка в силу условия нормировки принадлежит многомерной сфере  $S^5$ , и вектор состояния можно записывать так:  $\Psi = \{c_n\}$  (ср. со сферой Пуанкаре  $S^2$ , разделы 5.3, 5.4).

Пусть теперь  $N = 2$ . Можно представить себе монету, приготовленную из намагниченного железа. При этом за счет магнитного поля Земли вероятности выпадения "орла"  $p_+$  и "решки"  $p_- = 1 - p_+$  для данной монеты зависят от степени и направления ее намагниченности. Каждой индивидуальной монете можно приписать определенное состояние  $\Psi = (p_+, p_-)$ .

#### 3.2. Измерение классического состояния

На основании известного по процедуре приготовления состояния  $\Psi$  можно *предсказывать* тот или иной исход индивидуального испытания. Однако эти предсказания всегда имеют вероятностный характер (за исключением

особого случая, когда одна из компонент  $\Psi$  равна 1). Можно поставить обратную задачу измерения состояния  $\Psi$ .

Ясно, что измерить  $\Psi$  данной монеты с помощью одного испытания невозможно. Выпадение, например, "орла" может соответствовать любому состоянию, кроме  $\Psi_1 = (0, 1)$  (индекс у  $\Psi$  означает число испытаний  $M$ ). Надо или бросать одну и ту же монету много раз или изготовить большое количество одинаково приготовленных монет — *однородный ансамбль*. Если считать, что монеты при бросании не меняют свойств, не изнашиваются, то эти способы эквивалентны (свойство эргодичности вероятностной модели).

С точки зрения измерения частотное определение вероятности — единственно возможное. Бросив монету 10 раз и наблюдая каждый раз выпадение "орла", можно с некоторой степенью надежности утверждать, что  $\Psi \approx \Psi_{10} = (1, 0)$ . Однако не исключено, что при следующих 90 испытаниях монета выпадет "решкой" вверх. Теперь мы будем более или менее уверены, что  $\Psi \approx \Psi_{100} = (0,1; 0,9)$ , и опять можем ошибиться, так как истинное состояние может быть, скажем,  $\Psi = (0,5; 0,5)$ . Этот пример исключительного невезения показывает, что измерить истинное (приготовленное) состояние  $\Psi$  с полной надежностью невозможно. Можно лишь надеяться, что при увеличении  $M$  вероятность сильно ошибиться уменьшается, и  $\Psi_M$  все же приближается к истинному значению  $\Psi$  с ростом  $M$  — относительные частоты событий при возрастании  $M$  практически всегда проявляют *устойчивость*.

Итак, при известной идеальной процедуре приготовления состояние  $\Psi$  (набор вероятностей) можно приписать данному индивидуальному объекту. При этом под состоянием понимается информация об особенностях данного объекта, позволяющая предсказать вероятности различных событий. В то же время по результатам измерения состояние можно приписать лишь ансамблю одинаково приготовленных объектов, причем всегда с некоторой ограниченной степенью надежности. При этом принципиального различия между одним испытанием и множеством испытаний нет: результаты эксперимента всегда имеют лишь вероятностный характер. Аналогичные выводы можно сделать и в квантовой физике.

### 3.3. Аналог смешанного состояния и маргиналы

Пусть приготовлено два набора монет в состояниях  $\Psi' = (p'_+, p'_-)$  и  $\Psi'' = (p''_+, p''_-)$ . Числа монет в наборах обозначим через  $N'$  и  $N''$  ( $N' + N'' = N$ ). При совершенно случайном выборе монет из этих наборов и последующем их бросании "орел" и "решка" будут, очевидно, выпадать со взвешенными вероятностями

$$\rho_+ = \frac{p'_+ N' + p''_+ N''}{N}, \quad \rho_- = \frac{p'_- N' + p''_- N''}{N}, \quad (3.3.1)$$

определяемыми как свойствами монет, так и относительными числами монет в наборах  $N'/N$  и  $N''/N$ . Здесь имеет место двойная стохастичность — за счет случайности выбора сорта очередной монеты и за счет случайности выпадения "орла" и "решки". Это простейший классический аналог смешанного состояния в квантовой теории (при его первом определении в разделе 4.10). Ясно, что такое смешанное состояние уже нельзя отне-

сти к индивидуальной системе, это свойство ансамбля монет разных сортов. В квантовой теории этому соответствует классический ансамбль одинаковых систем, находящихся в различных состояниях с некоторыми вероятностями.

В квантовой теории принято также еще одно определение смешанного состояния, которое характеризует часть степеней свободы квантового объекта (см. раздел 4.10). В классической теории ему соответствует *маргинальное* распределение вероятностей или *маргинал*. Маргинальные распределения определяются через элементарные вероятности суммированием (в соответствии с аксиомой аддитивности Колмогорова), поэтому их также можно считать свойством индивидуального объекта. Например для игральной кости можно определить маргинальные вероятности появления четных и нечетных чисел  $p_+$  и  $p_-$ . В случае состояния (3.1.1) получаем  $p_+ = 0,97$  и  $p_- = 0,03$ .

### 3.4. Моменты и вероятности

Пусть теперь две монеты, взятые из двух наборов, бросаются одновременно. Введем две случайные величины  $S_1, S_2$ , принимающие значения  $s_1, s_2 = \pm 1$  при появлении "орла" или "решки", соответственно. Система описывается набором вероятностей  $p(s_1, s_2)$  появления четырех возможных комбинаций  $(\pm 1, \pm 1)$ . Если монеты не взаимодействуют и бросаются независимо, то "двумерные" вероятности  $p(s_1, s_2)$  определяются произведениями соответствующих одномерных вероятностей:  $p(s_1, s_2) = p_1(s_1)p_2(s_2)$ .

Пусть, однако, из-за особенностей броска или из-за взаимодействия между магнитными моментами монет имеется некоторая корреляция между результатами испытаний, тогда состояние двух монет определяется набором четырех элементарных вероятностей  $p(s_1, s_2)$ . Маргинальные вероятности и моменты определяются суммированием:

$$\begin{aligned} p_k(s_k) &= p(s_k, +1) + p(s_k, -1), \\ \langle S_k \rangle &\equiv p_k(+1) - p_k(-1) = 2p_k(+1) - 1 \quad (k = 1, 2), \\ \langle S_1 S_2 \rangle &\equiv p(+1, +1) + p(-1, -1) - p(+1, -1) - p(-1, +1). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Отсюда  $|\langle S_k \rangle| \leq 1$ ,  $|\langle S_1 S_2 \rangle| \leq 1$ . В рассматриваемом простом случае нетрудно решить обратную задачу (ее называют *проблемой моментов*) — выразить вероятности через моменты:

$$p_k(s_k) = 2^{-1}(1 + s_k \langle S_k \rangle), \quad (3.4.2)$$

$$p(s_1, s_2) = 2^{-2}(1 + s_1 \langle S_1 \rangle + s_2 \langle S_2 \rangle + s_1 s_2 \langle S_1 S_2 \rangle). \quad (3.4.3)$$

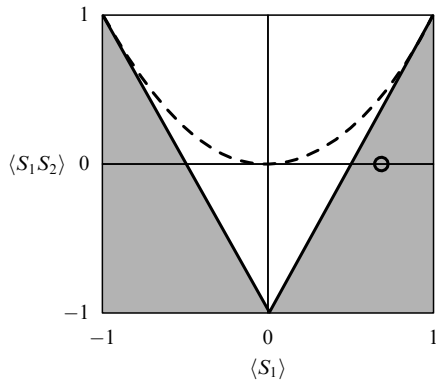
Из (3.4.3) и условия  $p(s_1, s_2) \geq 0$  следует, что моменты не являются независимыми числами; они должны удовлетворять некоторым неравенствам. Если первые моменты  $\langle S_k \rangle$  заданы, то *коррелятор*  $\langle S_1 S_2 \rangle$  уже не может быть произвольно большим или малым:

$$f_{\min} \leq \langle S_1 S_2 \rangle \leq f_{\max}. \quad (3.4.4)$$

Здесь

$$f_{\min} \equiv \max(-1 - \langle S_1 \rangle - \langle S_2 \rangle, -1 + \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle),$$

$$f_{\max} \equiv \min(1 + \langle S_1 \rangle - \langle S_2 \rangle, 1 - \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle).$$



**Рис. 2.** Связь между коррелятором  $\langle S_1 S_2 \rangle$  и первыми моментами  $\langle S_1 \rangle$ ,  $\langle S_2 \rangle$  (при  $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ ) для двух случайных величин  $S_1$  и  $S_2$ , принимающих значения  $s_k = \pm 1$ : заштрихована "запрещенная" область, в которой вероятности, соответствующие моментам, принимают отрицательные значения. Пунктир — случай независимых величин, когда  $\langle S_1 S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle^2$ . Кружок с координатами (0, 0,71; 0) соответствует квантовым моментам для параметров Стокса в случае фотона с линейной поляризацией под углом  $22,5^\circ$  к оси  $x$  (см. раздел 5.6).

Например, при  $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$  имеем ограничение  $2|\langle S_1 \rangle| - 1 \leq \langle S_1 S_2 \rangle \leq 1$  (рис. 2). В частности, коррелятор не может равняться нулю при  $\langle S_1 \rangle > 1/2$  (т.е. при  $p_+ > 3/4$ ).

В квантовой теории аналогичные неравенства для квантовых моментов  $\langle F \rangle$ , определяемых усреднением с помощью ВФ,  $\langle F \rangle \equiv \langle \psi | F | \psi \rangle$ , иногда нарушаются. Подобные парадоксы будут обсуждаться в разделах 4.5, 4.6, 5.5–5.8. При этом понятие элементарных вероятностей, соответствующих квантовым моментам, не имеет смысла, и квантовую вероятностную модель можно назвать *неколмогоровой*.

#### 4. Квантовые вероятности

Описанные выше классические модели имеют довольно ограниченное отношение к квантовой физике. В понятие "состояния" игральной кости можно включать не только ее свойства, как это полагалось выше, но и параметры начального толчка, которые согласно динамическим законам классической механики однозначно определяют будущий исход. Случайность здесь возникает за счет вариаций силы и направления толчка при бросании кости (при некоторых дополнительных условиях подобные модели демонстрируют *динамический хаос*). Квантовая случайность, по-видимому, имеет фундаментальный характер, а не связана с наличием каких-то неизвестных *скрытых параметров* (хотя Эйнштейн так и не смог допустить, что "Бог играет в кости").

Поразительной особенностью квантовых вероятностных моделей является отсутствие в некоторых случаях элементарных вероятностей при наличии маргинальных. Эту особенность можно назвать *неколмогоровостью* квантовой теории; ей соответствует отказ в общем случае от концепции *априорных значений* у наблюдаемых (см. разделы 4.5, 5.5–5.8, 6.4). Например, можно измерить (или вычислить через  $\psi$ ) распределения для координаты и для импульса частицы (в данный момент времени), но нельзя измерить их совместное распределение; восстановление совместного распределения по маргиналам неоднозначно и приводит в некоторых случаях к

отрицательным вероятностям. Естественно поэтому принять, что приписывание частице априорно существующих координат и импульсов теряет смысл.

Существенно также, что в классических моделях нет понятия *амплитуд вероятности*, принимающих комплексные значения, нет, соответственно, *квантовой интерференции* и комплексных векторных пространств состояний, нет аналога *некоммутирующих* наблюдаемых, совместные вероятности для которых не определены.

Процедуры приготовления и наблюдения в квантовой физике весьма специфичны. С операциональной точки зрения чистое состояние  $\psi_0$  — подробное закодированное описание идеальной приготовительной процедуры (истории) для данного индивидуального квантового объекта. Однако информация, содержащаяся в ВФ, может быть использована или проверена лишь при наличии множества одинаково приготовленных объектов. Лишь в некоторых исключительных случаях знание состояния одной частицы позволяет делать (почти) однозначные предсказания о результате одиночного опыта (см. пример в разделе 6.6). Практически всегда в реальных экспериментах приготавливаются смешанные состояния с дополнительной классической неопределенностью некоторых параметров чистого состояния. Например, изготовленное с помощью идеального лазера когерентное состояние поля имеет случайную фазу.

Интересный вопрос: "В каких случаях действительно необходимо использование квантовой теории?" Часто принимается, что это необходимо при описании *микроскопических* объектов — в отличие от *макроскопических*. Однако в некоторых случаях и макроскопические объекты приходится описывать квантовой теорией. Так, в недавних экспериментах по демонстрации эффекта бозе-конденсации играют роль сотни тысяч атомов (лития, натрия или рубидия) [9–12]. Атомы накапливаются в магнито-оптической ловушке и охлаждаются с помощью лазеров и другими методами до  $10^{-6} - 10^{-7}$  К. При этом степени свободы, связанные с движением центров тяжести атомов, описываются одной ВФ, общей для всех атомов. Эта функция описывает коллективную локализацию атомов в небольшой области пространства в центре ловушки. Характерна здесь возможность игнорирования множества "вымороженных" степеней свободы, описывающих свойства атомных электронов, внутренней структуры ядер, составляющих их нуклонов и кварков. Эта возможность иллюстрирует идею феноменологического квантового подхода, и, более широко, *редукционизма* — иерархического описания действительности.

В настоящее время большой интерес привлекают также эксперименты по наблюдению интерференции составных частиц — атомов и молекул, определяемой их де-бройлевской длиной волны  $\lambda = h/Mv$  (см. [13, 14]). Например, наблюдаемая интерференционная картина в случае молекул натрия  $\text{Na}_2$  имеет в два раза меньший период осцилляций, чем в случае атомов натрия [15]. Здесь опять наблюдаемый эффект описывается ВФ, относящейся лишь к движению центра масс молекулы (при этом фактические размеры частиц могут во много раз превышать  $\lambda$ ). Недавно наблюдалась также интерференция между двумя группами бозе-конденсированных атомов, содержащими по  $10^6$  атомов [12], что доказывает

возможность описания обеих групп с помощью двухкомпонентной ВФ с определенной разностью фаз (в связи с чем возникло понятие *атомного лазера* (см. [12])).

Известными примерами макроскопических квантовых явлений служат эффекты сверхтекучести, сверхпроводимости, Джозефсона. Волновой пакет электрона может, в принципе, простирается на макроскопические расстояния, при этом "точечность" электрона проявляется лишь при его регистрации (см. раздел 6.1). В современных оптических экспериментах масштабы когерентности поля иногда исчисляются в километрах. При этом успешно применяется феноменологическое описание с небольшим числом параметров, использующее одномерное приближение поля, исключение атомных переменных с помощью констант линейной и нелинейной восприимчивости вещества  $\chi^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и т.д. Например, с помощью понятия квадратичной нелинейности  $\chi^{(2)}$  удобно описывать приготовление "двухфотонного" или "сжатого" света за счет когерентного неупругого рассеяния обычного света в прозрачных пьезокристаллах (эффект параметрического рассеяния света).

По-видимому, все достаточно хорошо охлажденные и изолированные объекты можно и нужно описывать феноменологическими квантовыми уравнениями, игнорируя "вымороженные" степени свободы.

#### 4.1. Классические этапы в квантовых моделях

В квантовой теории измерения можно выделить несколько актуальных задач. Прежде всего это фундаментальная проблема объединения квантовой и классической физики, выработка единого подхода к квантовому объекту и взаимодействующей с ним приготовительной и измерительной аппаратуре. Эта глобальная задача, требующая, по-видимому, выхода за рамки стандартного квантового формализма и создания некоторой метатеории, до сих пор не решена. В последнее время разработан ряд интересных динамических моделей процесса измерения и редукции ВФ (последние исследования и литературу см. в [13, 16, 17]), однако они пока не связаны с реальными экспериментами, поэтому мы не будем касаться этой проблемы. Другой важный круг задач — разработка в рамках стандартной квантовой теории оптимальных методов точных измерений для прикладных целей и методов преодоления квантовых шумов [18, 19].

Формально квантовая теория может описывать действительность лишь с помощью общей волновой функции  $\Psi$  некоторой изолированной системы, которая должна включать как изучаемую подсистему, так и приготовительную и измерительную аппаратуру, взаимодействующую с подсистемой. Иногда включают в эту общую систему и экспериментаторов, их мозг, или даже всю вселенную. В этом смысле чисто квантовая модель является вещью в себе, здесь нет места для внешнего наблюдателя. Подобные модели не дают проверяемых предсказаний, и приходится использовать, как подчеркивал Бор, гибридные модели, включающие и квантовые, и классические компоненты.

Для сравнения с экспериментом необходимо на основании дополнительных соображений как-то ограничить число учитываемых степеней свободы и постулировать соответствие между математическими символами квантового формализма, описывающими квантовую систему, и параметрами реальных классических прибо-

ров — приготовительных и измерительных. Обычно термины *наблюдаемая* и *оператор* отождествляются; однако в любой квантовой модели для сравнения с экспериментом необходимо выбрать определенные границы между квантовой системой и внешним классическим миром. Какой-то оператор  $B_m$  (или несколько операторов  $B_m, B'_m, \dots$ ) в цепочке взаимодействующих подсистем, описываемых набором операторов  $B_1, B_2, \dots$ , надо назначить в качестве "более наблюдаемого" или "крайнего" (*readout observable*). Считается, что "измерительная" подсистема, взаимодействующая с  $B_m$ , проявляет уже классические свойства, она отличается большим числом степеней свободы и практически непрерывным спектром (*открытая система*). Расчет конкретной модели процесса измерения с помощью уравнения Шрёдингера позволяет переместить крайний оператор,  $B_m \rightarrow B_{m-1}$ . При абстрактном, формальном рассмотрении выбор крайнего оператора не критичен, границу между двумя мирами можно располагать произвольно (см. [2]). Но, как уже отмечалось, подобные абстрактные модели не допускают количественного сравнения с реальными экспериментами, поэтому для сравнения теории с экспериментом необходимо все же выбрать некоторый крайний оператор  $B_m$ .

На следующем этапе расчета необходимо подключить постулат Борна, выражающий вероятности наблюдаемых событий  $p(b_m)$  через ВФ и тем самым "узаконивающий" случайность в квантовых моделях (раздел 4.7). Этот "измерительный" постулат является пока единственным "мостиком", соединяющим математический формализм и результаты эксперимента.

В большинстве современных экспериментов реально наблюдаемым "элементарным" квантовым событием является появление импульса тока на выходе детектора, появление капельки жидкости в камере Вильсона и т.д. Складывается впечатление, что "невидимый" мир индивидуальных квантовых объектов проявляет себя лишь в виде подобных событий — "щелчков" (*clicks*). Наблюдение такого события позволяет приписать вызвавшей его частице априорные координаты, "локализовать" ее в определенной области пространства — времени, определяемой классическими размерными параметрами детектирующего устройства. Последние измеряются обычными методами — с помощью линейек и часов.

В известной модели фотодетектирования Глаубера [20] сначала наблюдаемым событием выбирается переход одного из атомов детектора из основного состояния  $|g\rangle$  в возбужденное состояние  $|e\rangle$ . Этому событию соответствует проекционный оператор  $|e\rangle\langle e| \equiv B_m$ , который играет роль крайнего или наблюдаемого оператора. При этом полагается, что событие проявляется — за счет усилительных процессов в детекторе — в виде макроскопического импульса тока на выходе детектора. Для описания быстродействующего детектора ширина спектра атомов, составляющих детектор, полагается достаточно большой (при этом необходимо, по-видимому, использовать предположение о релаксации недиагональных элементов матрицы плотности). В результате расчета эволюции системы "поле + атомы" с помощью уравнения Шрёдингера оказывается, что статистика импульсов фототока  $i(t)$  определяется корреляционными функциями для напряженности свободного поля  $E(\mathbf{r}, t)$ . В дальнейшем можно уже вместо  $|e\rangle\langle e|$  полагать

наблюдаемым оператор поля  $E(\mathbf{r}_1, t_1)$  в центре детектора. Здесь  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  — классические координаты в пространстве–времени, измеряемые с помощью линеек и часов. Координата центра  $\mathbf{r}_1$  массивного атома–детектора полагается  $c$ -числом, так же, как и момент появления импульса тока  $t_1$ .

В аналогичной модели счетчика частиц (раздел 6.1) наблюдаемым оказывается потенциал взаимодействия между детектором и частицей  $V(\mathbf{R} - \mathbf{r}_1)$ , зависящий от оператора координаты частицы  $\mathbf{R}$ . Подчеркнем, однако, что для обоснования адекватности того или иного выбора  $B_m$  необходимо использование какой-либо конкретной модели детектора и, конечно, экспериментальная проверка адекватности модели.

Фактически при описании динамических экспериментов (см. рис. 1) приходится использовать "полуклассический" подход на двух этапах, проводить две границы: на "входе" при определении начального состояния квантовой системы  $\psi_0$ , задаваемого классическими силами, и на "выходе" при выборе оператора  $B_m$ , влияющего на классический измерительный прибор. Между входом и выходом система предоставлена самой себе, и ее ВФ эволюционирует согласно уравнению Шрёдингера:  $\psi_0 \rightarrow \psi_t$  (с учетом действия классических полей (см. рис. 1)). Выбирая  $\psi_0$  и  $B_m$ , мы исключаем операторы preparatory и измерительного прибора, соответственно. При описании приготовления ВФ с помощью полуклассической теории можно исходить из основного (нижнего) состояния  $\psi_{00}$  (оно достигается за счет релаксации, охлаждения), а в гамильтониане системы учитывать действие классического поля, которое обеспечивает преобразование  $\psi_{00} \rightarrow \psi_0$  (см. пример в разделе 5.2). Эксперименты по бозе-конденсации атомов в ловушках [9–12] дают яркий пример приготовления локализованной ВФ с помощью охлаждения и классических полей.

Действие различных *фильтров* — диафрагм, магнитных полей, монохроматоров и т.д. — также описывается классически; их обычно можно отнести к preparatory или измерительным этапам (но целесообразно все же дифференцировать все эти процедуры). В квантовой оптике спектральные фильтры, светоделители, поляризаторы, линзы и т.д. описываются с помощью классических феноменологических функций Грина, преобразующих состояние поля (при использовании представления Шрёдингера) или его операторы (в представлении Гейзенберга) [21]. Можно также выделить *модуляторы*, изменяющие ВФ уже приготовленной системы с помощью зависящих от времени классических полей (см. раздел 6.6). В детекторах гравитационных волн ВФ квантового объекта — макроскопического осциллятора — модулируется переменным гравитационным полем [19]. При описании параметрического рассеяния света поле лазера ("накачка"), модулирующего диэлектрическую проницаемость кристалла, можно полагать классическим. При этом поле рассеяния вокруг кристалла из состояния вакуума переходит в суперпозицию из фоковских состояний с четным числом фотонов:  $|\psi_{00}\rangle = |0\rangle \rightarrow |\psi_0\rangle = c_0|0\rangle + c_2|2\rangle + c_4|4\rangle + \dots$ . Заметим, что в общем случае фильтрация и модуляция описываются неунитарным преобразованием состояния системы, при котором система переходит в смешанное состояние [21].

Рассмотрим еще раз схему описания процедуры измерения в рамках стандартного квантового формализма (см. [18, 19]).

Различают модели *прямого* и *косвенного* квантовых измерений [5, 18, 19]. В первом случае рассматривается один квантовый объект  $A$ , который описывается с помощью ВФ  $\psi(a)$  (для простоты выписываем только один аргумент ВФ и считаем состояние чистым). Связь с внешним миром устанавливается назначением какого-либо оператора  $A$  в качестве наблюдаемого. С экспериментом можно сравнивать распределение  $p(a) = |\psi(a)|^2$  или его моменты  $\langle a^k \rangle$ .

В моделях косвенного измерения кроме исследуемого объекта вводится по крайней мере еще одно "пробное тело"  $B$ , взаимодействующее с  $A$  и служащее посредником между  $A$  и макромиром. Рассматривается общая ВФ  $\psi(a, b)$  системы  $A + B$ ; при этом результат взаимодействия  $A$  и  $B$  — корреляция между  $a$  и  $b$  — рассчитывается с помощью уравнения Шрёдингера. В качестве "более наблюдаемого" оператора теперь уже выбирается оператор  $B$ , относящийся к  $B$ . Теория дает общее совместное распределение  $p(a, b) = |\psi(a, b)|^2$ . Функция  $p(a, b)$  описывает корреляцию между  $a$  и  $b$ , которая и позволяет по  $b$  судить об  $a$ . Классическое суммирование по вероятностям ненаблюдаемых событий приводит к измеряемому маргинальному распределению  $p(b) = \sum_a p(a, b)$ , которое несет информацию и о  $p(a)$ . Описание квантовых корреляций см. в разделе 4.8.

Операторы  $A$  и  $B$  могут относиться к разным степеням свободы одного объекта, например, в эксперименте Штерна–Герлаха (см. рис. 1)  $A \equiv M_x$  и  $B \equiv X$  — операторы проекции момента и поперечной координаты одной частицы, которые становятся коррелированными при движении в неоднородном магнитном поле [22]. В результате по непосредственно наблюдаемой (например, на фотопленке) поперечной координате частицы  $x_1$ , косвенно, на основании теоретической модели, описывающей влияние неоднородного магнитного поля на эволюцию ВФ частицы со спином, определяется значение проекции спина  $m_x = m_x(x_1)$  данной частицы. Измерение плотности точек на фотопластинке на рис. 1 дает распределение  $p(x)$ , имеющее двугорбую форму и несущее информацию о распределении  $p(m_x)$ .

Можно взять цепочку взаимодействующих объектов  $A, B_1, B_2, \dots, B_m$ , описываемых операторами  $A, B_1, B_2, \dots, B_m$ . Квантовый формализм позволяет рассчитать общую ВФ  $\psi(a, b_1, b_2, \dots, b_m)$  и совместное распределение  $p(a, b_1, b_2, \dots, b_m) = |\psi(a, b_1, b_2, \dots, b_m)|^2$ . Последний оператор  $B_m$  в цепочке объявляется *наблюдаемым* и после этого используется классическая теория вероятностей — маргинальное распределение  $p(a, b_m)$  находится суммированием элементарного распределения  $p(a, b_1, b_2, \dots, b_m)$  по "избыточным" переменным  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ . При использовании представления Гейзенберга "выходные" операторы  $B(t)$  выражаются через "входные"  $B(t_0)$ , так что можно вычислить преобразование корреляционных функций в результате взаимодействия.

Подчеркнем, что следует отличать взаимодействие квантовых подсистем, описываемое в рамках стандартного квантового формализма с помощью уравнения Шрёдингера и приводящее к установлению корреляций между подсистемами, от "истинного" процесса измерения, при описании которого необходимо рассматривать взаимодействие квантовой и классической систем, не охватываемое стандартным формализмом.



#### 4.2. Полный набор операторов и измерение волновой функции

Рассмотрим свободное движение нерелятивистской бесспиновой частицы в одном измерении. Полную информацию о ее измеримых статистических свойствах в данный момент времени дает вектор состояния  $|\psi\rangle$  в каком-либо представлении, например, в координатном:  $\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$ . Иначе говоря, оператор координаты  $X$  в единственном числе составляет *полный набор* операторов, необходимых для задания состояния. То же относится и к импульсу  $\hbar K$  (иногда будем полагать  $\hbar \equiv 1$ ) — состояние можно задать вектором состояния в импульсном представлении  $\langle k|\psi\rangle \equiv \psi(k)$ , т.е. фурье-образом  $\psi(x)$ . С другой стороны, оператор энергии  $H = K^2/2m$  не образует полного набора, так как оставляет неопределенным знак импульса. Иными словами, энергетические уровни имеют двукратное вырождение, и полный набор можно составить из  $H$  и оператора знака импульса.

Для задания чистого состояния достаточно указать собственные значения всех операторов полного набора. Например, информация  $k = k_1$  полностью определяет ВФ:  $\psi(x) = \exp(ik_1x)$ . В случае операторов с дискретными спектрами состояние можно задать, указав *квантовые числа*, нумерующие собственные состояния и значения. Как известно, для описания состояний электрона в атоме водорода удобно использовать сферические координаты,  $\psi = \psi(r, \theta, \phi)$ , и квантовые числа  $n, l, m, s$ , определяющие собственные значения энергии, момента количества движения, его проекцию и проекцию спинового момента.

Рассмотрим теперь *измерение* состояния. Многократное измерение координаты идеальным детектором позволяет определить модуль (*оглабающую*) ВФ  $|\psi(x)|$  (см. раздел 6.1). При этом фаза ВФ  $\phi(x) \equiv \arg[\psi(x)]$  непосредственно не наблюдаема, поэтому такой эксперимент не позволяет полностью определить ВФ (несмотря на то, что  $X$  составляет полный набор). Для этого необходимы дополнительные измерения, например, можно измерить также модуль ВФ в импульсном представлении  $|\psi(k)|$  (раздел 6.1). В реальных экспериментах для измерения состояния проводят несколько серий экспериментов, в которых измеряются различные комбинации  $X$  и  $K$  [23–27, 99].

Часто говорят, что фаза ВФ не имеет физического значения, ненаблюдаема; при этом имеется в виду постоянная *глобальная* фаза  $\phi_0$  — число, не зависящее от координаты. В то же время от *локальной* фазы  $\phi(x)$  существенно зависит наблюдаемая функция  $|\psi(k)|$ . Наблюдаемые проявления зависимости фазы ВФ от времени  $\phi(t)$  будут обсуждаться в разделе 6.6.

Итак, следует различать задание ВФ в теории, где достаточно указать, что она является собственной для некоторого полного набора операторов (например,  $X$  или  $K$ ), и ее определение в эксперименте, где надо измерять, например, распределение и по координате, и по импульсу, т.е. выходить за пределы полного набора. Таким образом, полный набор операторов оказывается, в смысле измерения, неполным.

Еще один пример: при задании поляризации фотона достаточно указать, что фотон имеет, скажем, правую круговую поляризацию. При этом поле имеет определенный момент количества движения  $m$ . Но, чтобы проверить это утверждение, недостаточно измерить  $m$ ,

а надо провести несколько серий измерений некокоммутирующих наблюдаемых — параметров Стокса (см. раздел 5.4).

Различные методы приготовления и реконструкции состояний оптического поля, атомов и молекул привлекают сейчас большой интерес [23–34].

#### 4.3. Квантовые моменты

В классической теории вероятностей *моменты* определяются с помощью плотности функции распределения  $p(a)$  случайной величины  $A$ :  $\mu_n \equiv \langle A^n \rangle \equiv \int da p(a) a^n$  (предполагается, что интегралы сходятся для всех  $n = 0, 1, \dots$ ). Для дискретной случайной величины интеграл заменяется суммой (см. разделы 3.1, 3.4). В случае нескольких случайных величин  $A, B, \dots$  моменты определяются многомерными интегралами

$$\mu_{nm\dots} \equiv \langle A^n B^m \dots \rangle \equiv \int \dots \int (da db \dots) p(a, b, \dots) (a^n b^m \dots). \quad (4.3.1)$$

С другой стороны, в квантовой теории моменты определяются не через распределение  $p(a, b, \dots)$ , а через ВФ:

$$\mu_{nm\dots} \equiv \langle A^n B^m \dots \rangle \equiv \langle \psi | A^n B^m \dots | \psi \rangle. \quad (4.3.2)$$

Существенно, что моменты, составленные из некокоммутирующих операторов, зависят от порядка написания операторов. Пусть имеются два некокоммутирующих эрмитовых оператора,  $[A, B] \neq 0$ . Возникает вопрос: какие составленные из  $A$  и  $B$  моменты проявляются в эксперименте? Если даже добавить требование вещественности момента, то все же остается много возможностей:  $(\langle AB \rangle + \langle BA \rangle)/2$ ,  $(\langle AB \rangle - \langle BA \rangle)/2i$ ,  $\langle ABA \rangle$ ,  $\langle BAB \rangle$  и т.д. Ответ зависит от конкретного экспериментального устройства, от непосредственно измеряемых параметров. Особый интерес эта проблема представляет в случае, когда некокоммутирующие наблюдаемые измеряются в различные моменты времени (см. ниже). Пока мы для простоты берем операторы в один и тот же момент времени.

Рассмотрим в качестве примера квантово-оптические эксперименты, в которых измеряется энергия поля. В некоторых случаях можно ограничиться учетом лишь одной моды поля; при этом описание поля совпадает с описанием гармонического осциллятора, и оператор энергии имеет вид  $H(X, P) = (P^2 + \omega^2 X^2)/2$ , где  $\omega$  — частота моды. Удобно перейти от операторов  $X, P$  к операторам  $a, a^\dagger$ , называемым операторами уничтожения и рождения фотонов (мы сохраняем для них традиционное обозначение прописными буквами). По определению

$$a \equiv (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega X + iP), \quad a^\dagger \equiv (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega X - iP).$$

Из  $[X, P] = i\hbar$  находим  $[a, a^\dagger] = 1$  и получаем ряд эквивалентных форм для гамильтониана:

$$\begin{aligned} H(a, a^\dagger) &= \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( aa^\dagger - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \hbar\omega \left[ \alpha \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \beta \left( aa^\dagger - \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

где  $\alpha$  — произвольное число и  $\beta = 1 - \alpha$ .

Из моделей процесса фотодетектирования следует, что вероятность передачи энергии от поля к невозбужденному атому – детектору в первом приближении определяется не всем оператором энергии, а лишь *нормально-упорядоченной* частью  $H - \hbar\omega/2 = \hbar\omega a^\dagger a$  (и антинормально-упорядоченным оператором детектора  $DD^\dagger$ , где  $D$  — *положительно-частотная* часть дипольного момента атома [35]). Иначе говоря, вероятность вынужденного одноквантового перехода атома "вверх" в линейном приближении определяется оператором числа фотонов  $N \equiv a^\dagger a$ . Выбор  $N$  в качестве наблюдаемого оператора обеспечивает отсутствие вклада слагаемого  $\hbar\omega/2$  в вероятность возбуждения атома. Аналогично, вероятность  $k$ -фотонного перехода атома "вверх" определяется оператором

$$(a^\dagger)^k a^k = N(N-1)\dots(N-k+1) \equiv :N^k: . \quad (4.3.4)$$

Здесь двоеточия обозначают операцию *нормального упорядочения*,  $:(a^\dagger a)^k: \equiv (a^\dagger)^k a^k$ .

В то же время для правильного описания наблюдаемых флуктуаций энергии около среднего значения надо использовать неупорядоченный оператор  $H^2 = (\hbar\omega N)^2$ , содержащий слагаемое  $X^2 P^2 + P^2 X^2$  и пропорциональный оператору

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger a^\dagger a a + a^\dagger a = :N^2: + N . \quad (4.3.5)$$

Отсюда наблюдаемая дисперсия энергии определяется неупорядоченным моментом

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N \rangle + \langle :\Delta N^2: \rangle . \quad (4.3.6)$$

Здесь слагаемое  $\langle N \rangle$ , характерное для дисперсии пуассоновского случайного процесса, описывает квантовые флуктуации измерения энергии. Они проявляются в эксперименте в виде *дробового (фотонного) шума* [36]. Нормально-упорядоченная дисперсия  $\langle :\Delta N^2: \rangle$ , называемая *избыточным шумом*, описывает отклонение дисперсии от пуассоновской. В случае фоковского, когерентного и хаотического состояний дисперсия  $\langle \Delta N^2 \rangle$  равна 0,  $\langle N \rangle$  и  $\langle N \rangle^2 + \langle N \rangle$ , соответственно. При  $\langle \Delta N^2 \rangle < \langle N \rangle$  говорят о *субпуассоновской* статистике, а при  $\langle \Delta N^2 \rangle > \langle N \rangle$  — о *суперпуассоновской* (используют также термины *антигруппировка* и *группировка* фотонов). Заметим, что для субпуассоновских состояний поля избыточный шум  $\langle :\Delta N^2: \rangle$  отрицателен. Различение квантового и избыточного шумов имеет операциональный смысл — квантовый шум имеет сплошной спектр, а спектр избыточного шума определяется динамикой источника света [36].

Нормально-упорядоченные моменты удобны также для описания оптических элементов с линейным поглощением. Пусть  $\eta$  — коэффициент передачи такого элемента, тогда моменты на его входе и выходе связаны простым соотношением:

$$\langle :N^k: \rangle_{\text{out}} = \eta^k \langle :N^k: \rangle_{\text{in}} . \quad (4.3.7)$$

Полагая здесь  $k = 1$  и  $2$ , находим

$$\langle \Delta N^2 \rangle_{\text{out}} = (1 - \eta) \langle N \rangle_{\text{out}} + \eta^2 \langle \Delta N^2 \rangle_{\text{in}} . \quad (4.3.8)$$

Эта формула описывает эффект "пуассонизации" флуктуаций интенсивности поля при поглощении — при  $\eta \rightarrow 0$

на выходе остаются лишь пуассоновские шумы независимо от характера флуктуаций на входе. Полагая  $\eta$  в (4.3.7) квантовой эффективностью счетчика фотонов, получаем связь между статистиками фотоотчетов и фотонов.

Из этих примеров очевидно, что выбор определенной последовательности операторов в квантовых моментах зависит от конкретной измерительной процедуры, которую эти моменты должны описывать. Это обстоятельство приобретает принципиальный характер при описании время-пролетных экспериментов с высоким временным разрешением (разделы 4.9 и 6.2).

#### 4.4. Представления Шрёдингера и Гейзенберга

Рассмотрим зависимость моментов от времени. Динамику квантовой системы можно описывать с помощью двух математически эквивалентных способов, называемых представлениями Шрёдингера и Гейзенберга. Решение нестационарного уравнения Шрёдингера  $i\hbar \partial \psi / \partial t = H \psi$ , где оператор энергии  $H$  не зависит от времени, можно представить в виде  $\psi(t) = U(t) \psi(0)$ . Здесь введен оператор эволюции  $U(t) \equiv \exp(-iHt/\hbar)$ . Среднее значение  $\langle A(t) \rangle$  какой-либо наблюдаемой  $A$  в момент  $t$  имеет согласно постулату Борна вид  $\langle A(t) \rangle \equiv \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | U(t)^\dagger A U(t) | \psi(0) \rangle$ .

Введем оператор  $A$  в представлении Гейзенберга:  $A(t) \equiv U(t)^\dagger A U(t)$ , тогда получим альтернативную форму для среднего:  $\langle A(t) \rangle = \langle \psi(0) | A(t) | \psi(0) \rangle$ . В случае двух коммутирующих операторов, измеряемых в один момент времени, также имеем два эквивалентных алгоритма расчета:

$$\langle A(t) B(t) \rangle = \langle \psi(t) | A B | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | A(t) B(t) | \psi(0) \rangle . \quad (4.4.1)$$

Однако *многовременные* моменты (функции корреляции) определены лишь в представлении Гейзенберга. Например, функция корреляции двух наблюдаемых имеет вид

$$\langle A(t) B(t') \rangle = \langle \psi(0) | A(t) B(t') | \psi(0) \rangle . \quad (4.4.2)$$

Чтобы вычислить эту функцию через шрёдингеровские величины при  $t \neq t'$ , надо знать еще оператор эволюции:

$$\langle A(t) B(t') \rangle = \langle \psi(t) | A U(t-t') B | \psi(t') \rangle . \quad (4.4.3)$$

В некоторых простых случаях зависимость гейзенберговских операторов от времени совпадает по форме с классической. Например, для свободной нерелятивистской частицы из  $H = P^2/2m$  и  $[X, P] = i\hbar$  следует  $X(t) = X + (P/m)t$ ,  $P(t) = P$ . У представления Гейзенберга есть еще одно преимущество — возможность явно ковариантной формулировки теории [2].

В квантовой оптике использование представления Гейзенберга, как правило, удобнее для вычислений; при этом операторы поля  $E(t)$ ,  $H(t)$  в линейных задачах зависят от времени так же, как и классические поля, что позволяет привлекать полезные классические аналоги и использовать классические функции Грина при описании оптических элементов — диафрагм, линз, зеркал и т.д. В результате квантовое описание эволюции поля в линейном оптическом тракте, включая связь наблюдаемых корреляционных функций на входе и выходе, совпадает

с классическим описанием; отличие проявляется лишь в процедуре усреднения по начальному состоянию — квантовому или классическому [37].

Для нашего обсуждения существенно, что эволюцию системы можно эквивалентно описывать как в терминах изменяющихся операторов  $A(t)$ , так и изменяющейся ВФ  $\psi(t)$ , поэтому наглядное представление квантового объекта в терминах некоего "сопровождающего" его распространяющегося "поля"  $\psi(t)$  или вектора в конфигурационном пространстве является не единственным — здесь опять нет смысла спрашивать: "А что происходит на самом деле — изменяется ли ВФ или набор операторов?" Отметим, что возможные наблюдаемые проявления проекционного постулата и редукции ВФ необходимо описывать в предстании Гейзенберга (см. формулу Вигнера (4.9.1)).

#### 4.5. Квантовая проблема моментов

В разделе 3.4 была найдена формула (3.4.3), выражающая вероятности через моменты и приводящая к некоторым ограничениям на моменты (см. рис. 2). В случае непрерывных величин эта обратная задача получила в математике название проблемы моментов. Известным примером ограничения на моменты, следующего из неотрицательности вероятности, является неравенство Коши–Шварца  $|\langle fg \rangle|^2 \leq \langle f^*f \rangle \langle g^*g \rangle$ .

Естественно попытаться исходить из набора квантовых моментов  $\mu$  построить соответствующее им распределение  $p$ . Но в случае некоммутирующих операторов эта процедура, во-первых, неоднозначна и, во-вторых, приводит к функциям, принимающим отрицательные или комплексные значения; эти функции называют квазивероятностями или квазираспределениями. Известными примерами являются функции Вигнера  $W(x, p)$  (раздел 6.4) и Глаубера–Сударшана  $P(\alpha)$  ( $\alpha$  — комплексная амплитуда колебаний одной моды поля, раздел 4.6). Таким образом, проблема моментов в квантовой теории не всегда имеет решения, или, иначе говоря, квантовые вероятностные модели в общем случае не являются *колмогоровскими* [38]. Отсутствие неотрицательного совместного распределения для некоммутирующих наблюдаемых естественно интерпретировать как невозможность приписывания этим наблюдаемым *априорных значений*. Иначе говоря, не имеет смысла полагать, что у каждой частицы "на самом деле" до измерения все же имеются некоторые определенные координата и импульс, но наши грубые приборы все портят и не позволяют их наблюдать одновременно.

Известны модели, в которых несовместность классических и квантовых представлений допускает экспериментальную демонстрацию. Неравенства Белла [39, 40] и теорема Кохена–Спекера [41] относятся к таким моделям. В них обычно фигурируют несколько наблюдаемых с дискретными спектрами (например, проекции спина), при этом некоммутирующие наблюдаемые измеряются в разных испытаниях. Эксперименты такого типа с коррелированными по поляризации парами и тройками фотонов будут рассмотрены в разделах 5.7, 5.8.

Был поставлен ряд экспериментов, в основном оптических, подтвердивших предсказания квантовых моделей для моментов и нарушающих классические неравенства Белла. Правда, при сопоставлении теории и экспериментов имеется ряд логических "лазеек" (loopholes), которые мотивируют дальнейшие теорети-

ческие и экспериментальные исследования в этом направлении [42].

Доказательство несовместности некоторых классических и квантовых вероятностных моделей иногда называют *теоремой* или *парадоксом Белла*. Обычно полагают, что парадокс Белла свидетельствует о "квантовой нелокальности", поскольку обычно речь идет о корреляции между событиями, разделенными пространственно-подобными интервалами (фотоотсчеты в двух удаленных детекторах). Однако использование термина *квантовая нелокальность*, подразумевающего некую таинственную, весьма специфическую взаимосвязь удаленных приборов, подобную телепатии и введенную *ad hoc*, нельзя признать удачным способом разрешения парадокса Белла.

Более последовательной представляется концепция *неколмогоровости* квантовой механики, подразумевающая отсутствие совместных распределений и априорных значений в случае некоммутирующих наблюдаемых [38]. Например, квантовая теория позволяет рассчитать моменты вида  $\langle xp \rangle$ , однако соответствующее им совместное неотрицательное распределение  $w(x, p)$  в общем случае не существует. Следовательно, теряет смысл и понятие априорных значений некоммутирующих наблюдаемых. Отсутствие элементарных вероятностей при наличии маргинальных вероятностей и моментов (т.е. отсутствие решения у проблемы моментов) можно считать определяющим признаком неколмогоровской вероятностной модели. Такая классификация дает единый подход к различным "неклассическим" эффектам и квантовым парадоксам [38].

#### 4.6. Неклассический свет

Неравенства Белла и другие подобные конструкции по существу являются частными ограничениями (аналогичными неравенству Коши–Шварца), накладываемыми на моменты условием неотрицательности совместного распределения, т.е. их обоснование имеет весьма общий математический характер. В квантовой оптике известна также другая, менее общая, модель, показывающая неприменимость классических вероятностных представлений к электромагнитным волнам. Она основана на известной формуле Манделя, связывающей измеряемые вероятности фотоотчетов с квазираспределением Глаубера–Сударшана  $P(\alpha)$ . Функция  $P(\alpha)$  играет роль классической плотности распределения для комплексной амплитуды монохроматического поля  $\alpha = x + ip$  и однозначно связана с ВФ поля. Однако для всех чистых состояний (кроме когерентного)  $P(\alpha)$  принимает отрицательные значения или оказывается нерегулярной функцией [43]. Например, для фоковских  $n$ -фотонных состояний  $P(\alpha)$  выражается через производные  $n$ -го порядка от  $\delta$ -функции. Такие состояния поля называют *неклассическими*.

При этом непосредственно наблюдаемые величины — моменты и вероятности фотоотчетов — не удовлетворяют уже некоторым ограничениям, следующим из неотрицательности  $P(\alpha)$  [44, 45]. Подобные неклассические оптические эффекты наблюдались неоднократно, что подтверждает адекватность простых феноменологических моделей квантовой оптики и неприменимость понятия распределения вероятности к амплитуде волны. Наиболее известным и практически важным примером является эффект антигруппировки фотонов, проявляю-

щийся в уменьшении флуктуаций фототока ниже уровня, соответствующего обычному дробовому (фотонному) шуму [46, 47]. Этот уровень шумов называют *стандартным квантовым пределом* [18, 19]. Другой "неклассический" оптический эффект — *двухфотонная интерференция* (это частный случай *интерференции интенсивностей*) с видностью, превышающей 50 % (см. раздел 5.5 и [37]). Такая видность также противоречит описанию светового поля с помощью неотрицательного регулярного распределения.

Понятие неклассического света тесно связано с попыткой описания процесса фотодетектирования в рамках *полуклассической теории излучения*, в которой поле описывается классическим образом, а взаимодействующее с ним вещество — квантовым. Пусть интенсивность  $I$  света, падающего на детектор, постоянна (идеальный лазер в классическом приближении). Вероятность  $dp_1$  возбуждения любого из атомов фотокатода детектора в течение малого интервала времени  $dt$  под действием квазимонохроматического света естественно предположить не зависящей от времени и пропорциональной  $I$ :  $dp_1/dt = kI$  (коэффициент пропорциональности  $k$  характеризует эффективность детектора). Эта модель вносит в динамическую теорию случайность — из нее следует, что за некоторое конечное время выборки  $T$  может появиться любое число импульсов  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), причем вероятность этого события определяется распределением Пуассона:  $p_m(I) = \mu^m \exp(-\mu)/m!$ ,  $\mu \equiv kTI$ .

Учтем теперь возможный случайный характер интенсивности света. Пусть  $T$  много меньше характерного времени изменения интенсивности, тогда, дополнительно усредняя  $p_m(I)$  по распределению интенсивности  $p(I)$ , получаем формулу Манделя

$$p_m = \frac{1}{m!} \int_0^\infty dI p(I) (kTI)^m \exp(-kTI). \quad (4.6.1)$$

В квантовой теории можно получить такое же по форме выражение с тем лишь отличием, что функция  $p(I)$  выражается через функцию Глаубера–Сударшана ( $p(I) \propto P(|\alpha|)$ , где  $|\alpha|^2 \sim I$ ) и может принимать поэтому отрицательные значения.

Из (4.6.1) следует, что величины  $m!p_m$  можно рассматривать как моменты некоторого распределения  $p(I) \exp(-kTI)$ . При этом условие  $p(I) \geq 0$  приводит к определенным ограничениям на множество вероятностей  $\{p_m\}$  [44]. Например,

$$mp_m^2 \leq (m+1)p_{m-1}p_{m+1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.6.2)$$

Это неравенство нарушается для ряда состояний поля. В частности, в случае "двухфотонного света", состоящего из пар фотонов, и 100 %-ной эффективности детектора, имеем  $p_1 = p_3 = 0$ ,  $p_2 \neq 0$ , так что (4.6.2) нарушается для  $m = 2$ .

Далее, из (4.6.1) следует, что *факториальные моменты* фотоотсчетов

$$G_k \equiv \langle m(m-1)\dots(m-k+1) \rangle$$

определяются формулой

$$G_k = \int_0^\infty dI p(I) (kTI)^k,$$

т.е.  $G_k$  пропорциональны обычным моментам для интенсивности  $\langle I^k \rangle$ . Отсюда получаем еще один ряд признаков классичности света [45]:

$$G_k^2 \leq G_{k-1}G_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.6.3)$$

В частности, полагая  $k = 1$ , получаем  $G_1^2 \leq G_2$  или  $\langle \Delta m^2 \rangle \geq \langle m \rangle$ . Таким образом, субпуассоновская статистика отсчетов противоречит полуклассической теории. Отметим, что признаки классичности (4.6.2), (4.6.3) имеют наглядное геометрическое представление, например, график зависимости  $\ln(G_k)$  от  $k$  согласно (4.6.3) имеет вогнутую форму [44]. Имеется также множество других наблюдаемых признаков "неклассического" света [44, 45].

Итак, полуклассическая формула Манделя (4.6.1) для статистики фотоотсчетов приводит к ряду наблюдаемых признаков неклассического света. Такой свет нельзя рассматривать как совокупность волн со случайной интенсивностью, имеющей некоторое неотрицательное распределение  $P(I)$ . Наблюдаемые признаки неклассичности непосредственно связаны с известной математической проблемой моментов.

Проследим еще раз исходную причину несовместности квантового и полуклассического описания процесса фотодетектирования. В квантовых моделях процесс передачи энергии от возбужденной системы к невозбужденной определяется нормально-упорядоченными моментами передающей системы (и антинормально-упорядоченными принимающей системы). Нормально-упорядоченные моменты не являются "истинными" моментами какого-либо неотрицательного распределения и поэтому не подчиняются обычным соотношениям типа Коши–Шварца — в противоположность обычным моментам. Именно это различие и позволяет выделить класс состояний поля, не имеющих классических аналогов.

#### 4.7. Проекционный постулат и редукция волновой функции

Следует отличать два аспекта терминов *проекционный постулат* и *редукция*, связанных, соответственно, с постулатами Борна (1926 г.) и Дирака (1930 г.).

1. Постулат Борна. Чтобы вычислить вероятность наблюдения какого-либо собственного значения  $a_1$  оператора  $A$  в момент времени  $t_1$ , надо найти *проекцию* вектора  $|\psi(t_1)\rangle$  на вектор  $\langle a_1|$  и возвести ее модуль в квадрат:

$$\begin{aligned} p(a_1, t_1) &= |\langle a_1 | \psi(t_1) \rangle|^2 = |\langle a_1, t_1 | \psi_0 \rangle|^2 = \\ &= \langle \psi_0 | P(a_1, t_1) | \psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.7.1a)$$

В двух последних вариантах записи использовано представление Гейзенберга. Здесь  $P(a, t) \equiv |a, t\rangle\langle a, t|$  — проекционный оператор (*проектор*),  $|a, t\rangle \equiv U^\dagger(t)|a\rangle$  — собственный вектор оператора  $A(t)$ ,  $U \equiv \exp(-iHt/\hbar)$  — оператор эволюции,  $H$  — не зависящий от времени оператор Гамильтона. Постулат Борна в представлении Гейзенберга охватывает и случай измерения нескольких коммутирующих операторов в произвольные моменты времени:

$$\begin{aligned} p(a, t; b, t_2) &= \langle \psi_0 | P(a, t_1) P(b, t_2) | \psi_0 \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | P(b, t_2) P(a, t_1) | \psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.7.1b)$$

Такие симметричные функции корреляции, не зависящие от знака  $t_1 - t_2$ , можно называть *борновскими* — в отличие от *вигнеровских* (см. раздел 4.9).

Таким образом, формула (4.7.1) дает алгоритм сравнения теории и эксперимента, но ничего не говорит о том, что происходит с квантовым объектом в результате его взаимодействия с измерительной аппаратурой. Для наглядности можно представлять, что в момент регистрации частицы в точке  $\mathbf{r}_1$  ее ВФ "схлопывается", коллапсирует из всего пространства в точку, однако эта картина не имеет операционального смысла (если только не производить повторное наблюдение над этой же частицей, см. ниже). Здесь представление о коллапсе относится к интерпретации квантового формализма, к попытке описать, что происходит "на самом деле".

2. Постулат Дирака или проекционный постулат (его приписывают также фон Нейману) утверждает, что в результате регистрации значения  $a_1$  происходит редукция: ВФ системы  $|\psi(t_1)\rangle$  проектируется на вектор  $|a_1\rangle$ ,

$$|\psi(t_1)\rangle \rightarrow |\psi(t_1)\rangle' = P(a_1, t_1)|\psi_0\rangle \propto |a_1, t_1\rangle \quad (4.7.2)$$

(вектор  $|\psi(t)\rangle'$  не нормирован). Здесь в отличие от (4.7.1) речь идет не том, как вычислять результаты данного наблюдения, а о том, что происходит с ВФ в результате наблюдения. Согласно (4.7.2) измерение оказывается также и *приготовлением* новой ВФ  $|\psi'(t)\rangle$ , которая с помощью (4.7.1б) позволяет вычислить результаты *повторного* наблюдения над этой же системой при  $t > t_1$  (таким образом, постулат Дирака нарушает симметрию квантового формализма относительно знака времени).

В дальнейшем термины редукция и проекционный постулат будут пониматься лишь во втором, "активном" смысле в соответствии с (4.7.2) — в отличие от "пассивного" смысла операции проектирования в постулате Борна (4.7.1). Согласно фон Нейману ВФ изменяется со временем двумя путями — "законным", в соответствии с уравнением Шрёдингера, и некоторым особым образом, не описываемым уравнениями стандартной квантовой теории. Считается, что причиной редукции является взаимодействие квантового объекта с макроскопическим измерительным прибором.

Проекционный постулат (4.7.2) иногда обосновывают *принципом повторяемости* (см. [2, 48]), — при повторном измерении  $A$  через достаточно короткое время должно обнаружиться то же самое значение  $a_1$ , — иначе понятие измерения относится лишь к прошлому, к априорным свойствам объекта измерения. Было предложено множество различных динамических моделей процесса редукции при измерении, учитывающих влияние большого (в пределе бесконечного) числа степеней свободы макроскопического измерительного прибора [2, 13, 16, 17], однако пока они не получили экспериментального подтверждения.

Во многих учебниках и монографиях редукция объявляется основным постулатом квантовой физики (см., например, [2]). Часто редукцию представляют как "реальное" событие [2, 18, 19, 49]. Это событие, — скачкообразный поворот вектора состояния данной частицы или иного квантового объекта в "момент" измерения  $t_1$ , — должен происходить в абстрактном комплексном многомерном пространстве состояний данной системы. Как правило, качественное, наглядное описание квантовых корреляционных эффектов типа

парадокса Эйнштейна, Подольского и Розена (ЭПР) или "квантовой телепортации" (см. ниже) основывается на этом убеждении. Однако постулат (4.7.2) фактически не нужен и никогда не используется для *количественного* описания реально наблюдаемых эффектов (исключения см. в разделах 4.9 и 6.2). В ряде работ необходимость понятия редукции подвергается сомнению [50–54]. Например, согласно [53], с. 351, "... проекционное правило фон Неймана следует рассматривать как чисто математическое и ему не следует придавать никакого физического смысла". ("... von Neumann's projection rule is to be considered as purely mathematical and no physical meaning should be ascribed to it".) В [2] на с. 294 делается следующее примечание: "... при проведении тщательного различия между процедурой приготовления и процедурой измерения проективный постулат не нужен".

В соответствии с (4.7.2) часто утверждается, что измерение является в то же время *приготовлением* новой ВФ (см., например, [2, 3, 18, 19]). Однако в реальных квантовых экспериментах для приготовления ВФ и для измерения используются совершенно различные процедуры (см. примеры в разделах 5 и 6). Целесообразно *фильтрацию*, например, с помощью экрана с отверстием или поляроида отличать от измерения. Фильтры позволяют что-то измерить лишь при наличии *детектора* (см. рис. 1). Под детектированием мы понимаем реально наблюдаемые свидетельства существования частицы, например, щелчок в счетчике Гейгера или трек в камере Вильсона [55].

#### 4.8. Частичная редукция волновой функции

Рассмотрим общую схему эксперимента по наблюдению квантовых корреляций. Две разлетающиеся частицы  $A$  и  $B$  приготавливаются в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{|a_1, b_1\rangle + |a_2, b_2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.8.1)$$

где  $a_i, b_i$  — собственные значения операторов  $A$  и  $B$ . Такие нефакторизованные состояния называют *перепутанными* (*entangled*); они послужили основой для известного парадокса ЭПР. Наблюдаемые события, — измерение  $A$  в момент  $t$  дало результат  $a_i$ , и измерение  $B$  в момент  $t'$  дало результат  $b_j$ , — могут быть разделены пространственно-подобным интервалом, поэтому  $[A, B] = 0$ , последовательность измерений во времени роли не играет и применим постулат Борна. Согласно (4.7.1) и (4.8.1) должна наблюдаться полная корреляция между показаниями отдаленных детекторов:

$$p(a_m, b_n) \equiv \langle P(a_m)P(b_n) \rangle = |\langle a_m, b_n | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2). \quad (4.8.2)$$

Этот корреляционный эффект часто интерпретируют, полагая, что в момент наблюдения результата  $a_m$  происходит *частичная редукция* ВФ:  $|\psi\rangle \rightarrow \sqrt{2}\langle a_m | \psi \rangle = |b_m\rangle$ . Аналогично, с точки зрения второго наблюдателя  $|\psi\rangle \rightarrow \sqrt{2}\langle b_m | \psi \rangle = |a_m\rangle$ .

Однако при этом возникают две проблемы — в каком именно из двух равноправных детекторов происходит редукция, и как другой детектор "узнает" об этом событии? Приходится говорить о таинственной "квантовой нелокальности", подразумевающей некое сверх-

световое взаимодействие нового типа. При количественном расчете экспериментов типа ЭПР нет никакой необходимости использовать понятие редукции и вводить нелокальное взаимодействие между удаленными приборами, эти понятия вводятся *ad hoc* при попытке наглядной интерпретации квантовых корреляций (а также в связи с парадоксом Белла, раздел 5.7). Похожие корреляции существуют и в классических моделях (раздел 5.5); действующая установка такого типа используется для обучения в одном из практикумов физического факультета Московского государственного университета [56]. Часто обсуждаемый парадокс "сверхсветового телеграфа" за счет ЭПР-корреляций сразу разрешается при операциональном подходе: при учете фактической экспериментальной процедуры ясно, что для наблюдения корреляции необходим обычный классический канал связи между детекторами [56, 57].

Естественное обобщение (4.8.1) имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{mn} c_{mn} |a_m, b_n\rangle. \quad (4.8.3)$$

Отсюда находим совместное распределение

$$p(a_m, b_n) = |c_{mn}|^2. \quad (4.8.4)$$

Можно определить также условную вероятность обнаружить наблюдаемую  $A$  равной  $a_m$  при условии, что  $B$  равна  $b_n$ :

$$p(a_m|b_n) \equiv \frac{p(a_m, b_n)}{p(b_n)} = \frac{|c_{mn}|^2}{\sum_k |c_{kn}|^2}. \quad (4.8.5)$$

Например, для состояния (4.8.1) находим  $p(b_n) = 1/2$ , и из (4.8.2), (4.8.5) следует  $p(a_m|b_n) = \delta_{mn}$  — условные вероятности в случае перепутанных ЭПР-состояний равны 1 или 0. Это еще один признак полной или идеальной корреляции.

Вербальная формулировка этой корреляции: "Если я обнаружил  $B = b_1$ , то я тут же узнаю, что  $A = a_1$ " часто принимается за доказательство "нелокальности" квантовых явлений (другое используемое доказательство см. в разделе 6.7). Однако такая корреляция возможна и в классических моделях. Даже более тонкое свойство ЭПР-корреляций, — их управляемость, т.е. зависимость от параметров измерительной аппаратуры в  $A$  и  $B$  (от углов ориентации поляроидов, раздел 5.5), — также не специфично для квантовых моделей [56]. Принципиальные отличия квантовых и классических корреляций проявляются лишь в особых случаях (см. разделы 4.5, 5.5–5.8).

Рассмотрим еще раз описание процессов измерения и редукции согласно общепринятой точке зрения (см. [2] и раздел 4.1). Перепутанное состояние вида (4.8.3) возникает в результате взаимодействия любых двух первоначально независимых квантовых систем  $A$  и  $B$ . Предположим, что  $A$  — наблюдаемая система и  $B$  — макроскопический измерительный прибор, также описываемый в рамках квантовой теории. Пусть  $A$  — оператор *измеряемой* величины, а  $B$  соответствует реально *наблюдаемой* макроскопической величине (например, положению стрелки вольтметра). Пусть также  $c_{mn} = \delta_{mn}$ , тогда (4.8.3) описывает взаимно-однозначную корреляцию типа ЭПР между измеряемой и наблюдаемой величи-

нами. Но при каждом отдельном испытании стрелка принимает лишь одно определенное положение (присвоим ему номер 1), поэтому приходится постулировать следующее превращение (ср. (4.7.2)):

$$|\psi\rangle = \sum_m c_{mm} |a_m, b_m\rangle \rightarrow c_{11} |a_1, b_1\rangle \equiv c_{11} |a_1\rangle \otimes |b_1\rangle,$$

т.е. все коэффициенты  $c_{mm}$ , кроме одного, по неизвестной причине обращаются в нуль. Коэффициент  $c_{11}$  должен обратиться в 1, чтобы обеспечить нормировку новой ВФ. Этот этап — превращение *возможного* в *действительное* — представляет наибольшую трудность в квантовой теории измерения. В результате ВФ всей системы фактурируется — система и прибор снова становятся независимыми и их можно рассматривать по отдельности. Принято, что подобные рассуждения обосновывают постулат Дирака (4.7.2) — редукцию ВФ квантовой системы при наблюдении.

#### 4.9. Корреляционные функции Вигнера

Рассмотрим случай, когда наблюдаемые гейзенберговские операторы в (4.7.1б) не коммутируют,  $[P(t_1), P(t_2)] \neq 0$ . Легко убедиться, что при этом стандартные алгоритмы квантовой теории непригодны для расчета  $p(t_1, t_2) \equiv p(a, t_1; b, t_2)$ . Дело в том, что оператор  $P_1(t_1)P_2(t_2)$  теперь не эрмитов, и борновская корреляционная функция  $\langle \psi_0 | P_1(t_1)P_2(t_2) | \psi_0 \rangle$  содержит мнимую компоненту, равную  $\langle \psi_0 | [P_1(t_1), P_2(t_2)] | \psi_0 \rangle / 2i$ , так что ее нельзя использовать для расчета  $p(t_1, t_2)$ . Обычная формула для вероятности перехода, основанная на постулате Борна, также бесполезна, так как в ней фигурирует лишь один момент времени  $t$ , являющийся параметром ВФ  $\psi_t$ , и она не может дать двухвременную функцию  $p(t_1, t_2)$ . Напомним также, что квантовая динамика в "чистом виде" (как и классическая) инвариантна к изменению знака  $t_1 - t_2$ , т.е. она не отражает причинность и необратимость, которые надо вводить в нее специальными приемами — правилами обхода полюсов, введением диссипации.

Чтобы исправить положение, будем исходить из проекционного постулата Дирака (4.7.2), т.е. примем на веру, что первое во времени измерение наблюдаемой  $P(a, t_1)$  вызывает редукцию

$$|\psi(t_1)\rangle \rightarrow |\psi'(t_1)\rangle \equiv P(a_1, t_1) |\psi_0\rangle.$$

Следовательно, второй измерительный прибор "видит" уже измененную ВФ  $|\psi'(t_1)\rangle$ , и при использовании постулата Борна надо усреднять  $P(b, t_2)$  с ее помощью. Таким образом, последовательно применяя (4.7.2) и (4.7.1), получаем формулу Вигнера для совместного распределения двух наблюдаемых [3]:

$$\begin{aligned} p(a, t_1; b, t_2) &= \langle \psi'(t_1) | P(b, t_2) | \psi'(t_1) \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | P(a, t_1) P(b, t_2) P(a, t_1) | \psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.9.1a)$$

Здесь подразумевается, что  $t_0 < t_1 < t_2$ , т.е. вносится "стрела времени". Такие функции корреляции, асимметричные относительно знака  $t_1 - t_2$ , можно назвать *вигнеровскими*. Формулы типа (4.9.1a) иногда требуют дополнительного суммирования по ненаблюдаемым переменным. Обобщение (4.9.1a) на случай произвольного числа последовательных наблюдений операторов  $P_1, \dots, P_m$

очевидно [3]:

$$p(t_1, \dots, t_m) = \langle \psi_0 | P_1 \dots P_{m-1} P_m P_{m-1} \dots P_1 | \psi_0 \rangle$$

$$(m = 1, 2, \dots; \quad t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_m). \quad (4.9.16)$$

С чисто операциональной точки зрения эта формула допускает сравнение с экспериментом лишь целиком, сама редукция как промежуточный этап ненаблюдаема, поэтому (4.9.16) можно принять в качестве основного *измерительного постулата*. Это, по существу, обобщение постулата Борна (4.7.1) на случай измерения некомутирующих операторов. Если все операторы в формуле (4.9.16) коммутируют, то она совпадает с борновским определением (4.7.16) многовременных функций корреляции  $\langle \psi_0 | P_1 \dots P_m | \psi_0 \rangle$  (за счет свойства  $P_m^2 = P_m$ ).

В случае смешанного начального состояния, описываемого оператором плотности  $\rho_0$ , формула (4.9.16) принимает вид

$$p(t_1, \dots, t_m) = \text{Sp}(P_m \dots P_1 \rho_0 P_1 \dots P_m)$$

$$(t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m). \quad (4.9.2)$$

Хотя использование понятия редукции при вербальном описании некоторых экспериментов иногда удобно, не имеет смысла задаваться вопросом: "Происходит ли редукция на самом деле?" (пока не появятся новые факты, конечно). Можно полагать для наглядности, что при образовании трека в камере Вильсона происходит цепочка редукций — каждый затравочный атом, около которого конденсируется капля воды, приготавливает новую ВФ для следующего атома. При этом каждой капле в реальном треке частицы следует сопоставить свою пару проекторов  $P_k$  в формуле (4.9.16). Подчеркнем, однако, что это лишь возможная интерпретация; фактически редукция не нужна для количественного описания трека (см. расчет в [55], основанный на постулате Борна). Это же относится и к подавляющему большинству наблюдаемых квантовых эффектов, включая эффекты типа ЭПР и квантовой телепортации (разделы 4.8, 5.5–5.9), которые фактически описываются борновскими корреляциями.

И все же проекционный постулат в форме (4.9.1), по-видимому, действительно необходим для количественного описания некоторого узкого класса экспериментов [58]. (Имеются в виду практические расчеты, допускающие сравнение с экспериментом — в отличие от абстрактных моделей квантовой теории измерения или рассуждений о ВФ всей аппаратуры или всей вселенной.) В таких экспериментах должны выполняться три условия: в каждом испытании последовательно проводится измерение двух или более операторов; эти операторы в представлении Гейзенберга для некоторых  $t_1$  и  $t_2$  не коммутируют, и измерения проводятся с достаточно высоким временным разрешением. Последнее условие не выполняется при использовании камеры Вильсона. Второе условие не выполняется в экспериментах типа ЭПР и квантовой телепортации, поэтому понятие редукции при их формальном описании излишне — наблюдаемым эффектам соответствуют обычные корреляционные функции. Примеры использования формулы Вигнера будут даны в разделах 6.2, 6.3.

Итак, следует отличать два типа корреляционных эффектов в зависимости от того, коммутируют или нет соответствующие гейзенберговские операторы  $A(t)$  и

$B(t')$ . В первом случае можно использовать обычные ("борновские") симметричные корреляционные функции

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \langle B(t')A(t) \rangle, \quad (4.9.3)$$

а во втором имеет значение последовательность измерений во времени, и следует использовать "вигнеровские" функции вида

$$\langle A(t)B(t')A(t) \rangle \theta(t' - t) + \langle B(t')A(t)B(t') \rangle \theta(t - t'), \quad (4.9.4)$$

которые можно интерпретировать в терминах редукции.

#### 4.10. Смешанные состояния

Как правило, приготовить систему в *чистом состоянии*, т.е. состоянии, описываемом ВФ  $\psi_0$ , не удастся. В каждом испытании приготавливаются различные ВФ, и можно лишь указать вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$  приготовления системы в одном из некоторого набора различных чистых состояний  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j, \dots$  (не обязательно полного или ортогонального). Для сравнения с экспериментом надо квантовые моменты и распределения, найденные с помощью всех состояний  $\psi_j$ , дополнительно усреднять по классическому распределению  $p_j$ . Получаем комбинацию из классической и квантовой вероятностных моделей с двойной стохастичностью:  $\langle A \rangle = \sum p_j \langle \psi_j | A | \psi_j \rangle$ . Например, кажется разумным предположить, что макроскопический источник пучка частиц, нагретый до температуры  $T$ , испускает частицы в чистых состояниях  $|v_j\rangle$  с определенными импульсами  $mv_j$ ; при этом вероятности  $p_j$  определяются максвелловским распределением с температурой  $T$ .

Удобно ввести *оператор плотности*  $\rho \equiv \sum p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$ . Пусть  $\{|n\rangle\}$  — какой-либо полный набор векторов, т.е.  $I = \sum |n\rangle \langle n|$ , тогда можно определить *матрицу плотности* в  $n$ -базисе  $\rho_{mn} = \sum_j p_j \langle m | \psi_j \rangle \langle \psi_j | n \rangle$ . При этом среднее значение принимает вид  $\langle A \rangle = \sum_{mn} \rho_{mn} A_{nm}$ . В инвариантном виде (без конкретизации базиса) имеем  $\langle A \rangle \equiv \text{Sp}(\rho A)$ , где  $\text{Sp}$  означает сумму диагональных элементов. Если исходный набор  $\{\psi_j\}$  составляет полный ортогональный базис, то в этом базисе матрица плотности диагональна:  $\rho_{j'j} = p_j \delta_{j'j}$ . В частном случае чистого состояния  $|\psi\rangle = |k\rangle$  оператор плотности имеет вид  $\rho = |k\rangle \langle k|$ , и матрица плотности имеет единственный отличный от нуля элемент, равный 1:  $\rho_{mn} = \delta_{mk} \delta_{nk}$ ; при этом  $\rho^2 = \rho$ .

Дополнительную процедуру классического усреднения  $\sum p_j \langle \psi_j | A | \psi_j \rangle$  можно проводить в самом конце расчета, однако обычно классическую случайность учитывают с самого начала и под *состоянием* системы понимают элемент соответствующего расширенного пространства состояний, т.е. множество матриц  $\rho_{mn}$  (обладающих свойствами эрмитовости, неотрицательности, нормированности). Такие состояния называют *смешанными*. Зависимость от времени оператора плотности получаем заменой базиса  $|n, t_0\rangle$  на  $|n, t\rangle$ , что с учетом уравнения Шрёдингера приводит к уравнению фон Неймана:

$$i\hbar \frac{d\rho_t}{dt} = [H, \rho_t].$$

Понятие смешанного состояния и описывающего его оператора плотности  $\rho$  удобно использовать еще в

одном случае. Пусть система описывается двумя независимыми операторами  $A$  и  $B$  и находится в произвольном чистом состоянии  $\psi(a, b) = \langle a, b | \psi \rangle$ ,  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Здесь  $|a, b\rangle \equiv |a\rangle|b\rangle$  — прямое произведение двух векторных пространств, в которых определены операторы  $A$  и  $B$  ( $[A, B] = 0$ ). Пусть нас интересует лишь оператор  $B$  или произвольные функции  $f(B)$ . Легко проверить, что "маргинальные" моменты  $\langle f(B) \rangle \equiv \langle \psi | f(B) | \psi \rangle$  можно представить в виде  $\langle f(B) \rangle = \text{Sp} \{ \rho_b f(B) \}$ . Для этого вводится следующее альтернативное определение оператора плотности  $\rho_b$ , описывающего только систему  $B$ :

$$\rho_b \equiv \text{Sp}_a \{ \rho \} \equiv \sum_a \langle a | \psi \rangle \langle \psi | a \rangle.$$

Оператор  $\rho_b$  определен в пространстве только оператора  $B$ , "лишние" переменные  $a$  исключены заранее (это аналог маргинального распределения теории вероятностей, раздел 3.3). В общем случае оператор  $\rho_b$  не диагонален.

Как правило, второе определение оператора плотности используется в случае, когда операторы  $A$  и  $B$  относятся к двум отдельным объектам, например, к двум взаимодействующим подсистемам в моделях процесса измерения или к двум частицам в экспериментах типа ЭПР. В общем случае состояние всей системы  $\psi$  не факторизовано (см. (4.8.1)), при этом каждой системе по отдельности нельзя приписать индивидуальную ВФ, и имеется корреляция между наблюдаемыми параметрами систем, хотя они могут находиться сколь угодно далеко друг от друга.

## 5. Двухуровневые системы

### 5.1. q-биты

При описании взаимодействия атома с резонансным монохроматическим излучением иногда достаточно учитывать только два невырожденных уровня энергии атома. При этом произвольное состояние атома может быть представлено в виде суперпозиции двух базисных векторов:  $|\psi\rangle = \alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$  (буквы  $g$  и  $e$  относятся к нижнему и верхнему уровням, соответственно). Следовательно, произвольное состояние двухуровневого атома задается парой комплексных чисел  $(\alpha, \beta)$ . Если же учесть нормировку  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  и игнорировать общую фазу  $\alpha$  и  $\beta$ , то состояние задается двумя вещественными параметрами, например, координатами точки  $(\theta, \phi)$  на сфере, называемой *сферой Блоха* (см., например, [35]). Состояние поляризации классической монохроматической волны или фотона также можно отобразить на аналогичную *сферу Пуанкаре*. Одномодовое поле в резонаторе (с определенной поляризацией), взаимодействующее с двухуровневым атомом [59–62], может находиться в суперпозиции вакуумного и однофотонного состояний, т.е. пространство состояний резонатора имеет такую же структуру:  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . Аналогичную геометрию имеет пространство спиновых состояний частицы со спином  $1/2$ . В терминах теории групп такое пространство состояний называется  $SU(2)$ -пространством.

В последние годы большой интерес привлекает возможность создания *квантовых компьютеров* (см. [13, 17, 59, 60]), в которых вместо электронных ячеек с дихотомным спектром состояний  $(0, 1)$  будут использоваться системы с  $SU(2)$ -пространством каждая (корре-

лированные двухуровневые атомы, фотоны). Все ячейки компьютера должны находиться в едином чистом перепутанном (entangled) состоянии  $\Psi$ . Ожидается, что такое устройство произведет революцию в скорости решения некоторых классов задач. Информация, заключенная в числах  $(\alpha, \beta)$  или  $(\theta, \phi)$ , получила специальное название *q-bit* (*qubit*).

При взаимодействии атома и одномодового поля в резонаторе может происходить обратимый обмен q-битами:

$$|\Psi\rangle = (\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle)|0\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle = |g\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (5.1.1)$$

Этот процесс и последующая обратная передача q-бита от поля ко второму атому наблюдались недавно в [61]. Взаимодействие двух атомов через поле позволило также приготовить два атома в перепутанном ЭПР-состоянии [61]:

$$|e_1, g_2, 0\rangle \rightarrow \frac{(|e_1, 0\rangle + |g_1, 1\rangle)|g_2\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{(|e_1, g_2\rangle + |e_2, g_1\rangle)|0\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.1.2)$$

При *квантовой телепортации* (раздел 5.9) q-бит с одного фотона переносится на другой фотон необратимо.

### 5.2. Пример процедуры приготовления состояния

Современная лабораторная техника позволяет поместить одиночный атом в ограниченную область пространства (магнито-оптическую ловушку) и охладить его до сверхнизких температур порядка  $10^{-7}$  К. При этом он заведомо переходит в основное состояние  $|g\rangle$ . Пусть в момент времени  $t_0 \equiv -\tau$  на него действует короткий лазерный импульс с длительностью  $\tau$  и определенной амплитудой (так называемый  $\pi$ -импульс, см. [35]). Интенсивное лазерное излучение с большой точностью можно рассматривать классически. Пусть частота лазера совпадает с боровской частотой перехода  $\omega_e = (E_e - E_g)/\hbar$  между основным  $|g\rangle$  и одним из возбужденных состояний  $|e\rangle$  атома. Согласно полуклассической теории (данный) атом под действием лазерного импульса переходит в заданное состояние  $|\psi\rangle = \alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$ , где коэффициенты  $\alpha, \beta$  определяются фазой оптических колебаний и "площадью" лазерного импульса — произведением амплитуды  $E_0$  на длительность  $\tau$ . Этот метод используется в современных экспериментах [61].

Таким образом, данный атом при  $t_0 \equiv 0$  готовится в заданном состоянии — аналогично игральной кости или монете (раздел 3.1). В дальнейшем состояние эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера:

$$|\psi_t\rangle = \alpha|g\rangle + \beta|e\rangle \exp(-i\omega_e t).$$

Для учета неизбежных флуктуаций амплитуды и фазы лазера состояние ансамбля атомов при повторных испытаниях надо описывать смешанным состоянием.

Подчеркнем, что в ходе описанной процедуры никакие свойства квантового объекта не измеряются, т.е. приготовление не обязательно связано с измерением, как это традиционно полагается [2, 3, 18, 19]. Существенными допущениями здесь являются классическое описание лазерного поля, которое играет роль заданной внешней силы, и учет релаксации, приготовляющей



атом в основном состоянии  $|g\rangle$ . Как и при описании измерения, на стадии приготовления необходимо из общих физических соображений установить разумную границу между классическим и квантовым мирами. При этом уверенность в адекватности таких эвристических полуклассических моделей основана на множестве прошлых успешных экспериментов.

До сих пор мы пренебрегали взаимодействием атома с невозбужденными (вакуумными) модами поля, что допустимо на протяжении достаточно коротких отрезков времени. Учет этого взаимодействия приведет к спонтанному излучению фотона (точнее, экспоненциального волнового пакета со средней частотой  $\omega_e$  и длительностью  $\tau_e = 1/w_{ge}$ , определяемой вероятностью спонтанного перехода в единицу времени  $w_{ge}$ ). Отображающая состояние атома точка на сфере Блоха будет двигаться по спирали от северного полюса к южному [35]. Спустя время, много большее  $\tau_e$ , атом с большой вероятностью оказывается на южном полюсе, в основном состоянии, а поле — в однофотонном состоянии  $|1\rangle$ . Таким образом, наша модель дает пример процедур приготовления как атома, так и поля в определенном состоянии.

Итак, современная техника позволяет готовить достаточно надежно определенные состояния атомов и поля. Эта возможность манипуляции ВФ широко используется для экспериментального подтверждения многих интересных предсказаний квантовой теории взаимодействия поля с веществом [13, 14, 62]. Как уже отмечалось, эта техника привлекает также большое внимание в связи с идеей квантового компьютера.

### 5.3. Поляризация света

Напомним классическое описание поляризации (см. [63]). Поле плоской квазимонохроматической волны в вакууме можно представить в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{E}_0 \exp(ikz - i\omega t)],$$

где комплексный вектор  $\mathbf{E}_0 = xE_x + yE_y$  определяет интенсивность и поляризационные свойства волны ( $E_x, E_y$  — проекции поля на направления  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ). В случае идеальной монохроматической волны вектор  $\mathbf{E}_0$  постоянен, но практически он всегда изменяется:  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(t)$  (медленно по сравнению с фазой  $\omega t$ ).

Определим "мгновенные" (неусредненные) параметры Стокса:

$$\begin{aligned} S_0 &\equiv |E_x|^2 + |E_y|^2, & S_1 &\equiv |E_x|^2 - |E_y|^2, \\ S_2 &\equiv 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y), & S_3 &\equiv 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Параметр  $S_0(t)$  определяет общую интенсивность волны в данное время, а направление вектора  $\mathbf{S}(t) \equiv (S_1, S_2, S_3)$  характеризует мгновенную поляризацию. Длина вектора  $S(t) = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}$  согласно (5.3.1) равна  $S_0(t)$ . Параметр  $S_3(t)$  пропорционален моменту количества движения, переносимому волной.

Введем единичный вектор  $\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{S}/S$ . Множество векторов  $\boldsymbol{\sigma}$  принадлежит *сфере Пуанкаре*. Каждой точке сферы соответствует определенный *тип поляризации*. Удобно ввести сферические координаты

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \cos \theta, & \sigma_2 &= \sin \theta \cos \phi, & \sigma_3 &= \sin \theta \sin \phi \\ (\theta &= 0 - \pi, & \phi &= 0 - 2\pi). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Определим также единичный комплексный *вектор поляризации*  $\mathbf{e} \equiv (\alpha, \beta)$  (вектор Джонса) с компонентами:

$$\alpha \equiv \frac{E_x}{\sqrt{S_0}} = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta \equiv \frac{E_y}{\sqrt{S_0}} = \exp i\phi \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.3.3)$$

(этот вектор определен с точностью до произвольного фазового множителя). Обратные преобразования имеют вид

$$\sigma_1 = |\alpha|^2 - |\beta|^2, \quad \sigma_2 = 2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta), \quad \sigma_3 = 2 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta). \quad (5.3.4)$$

Итак, мгновенную поляризацию можно задать двумя способами: координатами  $(\theta, \phi)$  точки на сфере Пуанкаре или комплексными числами  $(\alpha, \beta)$ . Например, векторы  $\boldsymbol{\sigma} = (\pm 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{x} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{y} = (0, 1)$  описывают линейную поляризацию вдоль  $x$  или  $y$ , а  $\boldsymbol{\sigma} = (0, 0, \pm 1)$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\pm} = (1, \pm i)/\sqrt{2}$  — правую и левую круговые поляризации.

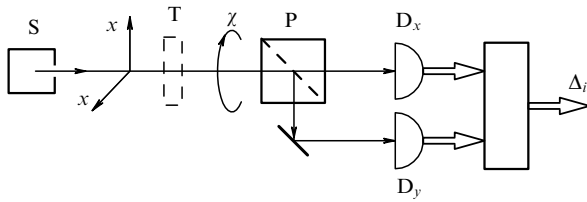
В случае не полностью поляризованного света все эти параметры медленно изменяются; при этом изображающая точка  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  движется по сфере Пуанкаре. Статистику поля предполагаем стационарной и эргодической, поэтому усреднения по времени и по ансамблю эквивалентны. При ансамблевом подходе сфера Пуанкаре представляет пространство случайных событий, а пространство состояний состоит из всевозможных функций распределения  $p(\theta, \phi)$  (удовлетворяющих условиям нормировки и неотрицательности). Наглядно можно представить, что сфера Пуанкаре покрыта множеством точек, представляющих членов ансамбля, при этом "густота" точек определяет функцию  $p(\theta, \phi)$ . Усреднение определенных (5.3.1) дает обычные параметры Стокса  $\langle S_n \rangle$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ). Отношение  $(\langle S_1 \rangle^2 + \langle S_2 \rangle^2 + \langle S_3 \rangle^2) / \langle S_0 \rangle \equiv P$  называют степенью поляризации.

Действие идеальных преобразователей поляризации (фазовых пластин) можно представить как поворот вектора Стокса  $\mathbf{S}$ , осуществяемый матрицей Мюллера  $\mathbf{M}$ , или как линейное преобразование вектора поляризации  $\mathbf{e} \equiv (\alpha, \beta)$  под действием матрицы Джонса  $\mathbf{T}$ :

$$\alpha' = t^* \alpha + r^* \beta, \quad \beta' = -r \alpha + t \beta. \quad (5.3.5)$$

В векторном виде  $\mathbf{S}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{e}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}$ . Поглощением и отражениями пренебрегаем, поэтому  $S_0$  и  $P$  не изменяются — они являются инвариантами преобразования.

Рассмотрим измерение функций  $S_n(t)$  и параметров Стокса  $\langle S_n \rangle$ . Пусть фотодетекторы и последующая электроника достаточно быстрые (т.е. их полоса пропускания много больше полосы частот поля), тогда можно измерять мгновенные значения параметров. Чтобы наблюдать одновременно все 4 параметра Стокса, исходный пучок света можно распределить поровну по трем приемным устройствам, подобным изображенному на рис. 3. В первом приемнике призма разделяет  $x$ - и  $y$ -поляризованные компоненты пучка ( $\chi = 0$ , фазовая пластина отсутствует), так что разность токов двух детекторов  $\Delta i(t)$  пропорциональна  $S_1(t)$ :  $\Delta i = k S_1$ . Во втором приемнике призма повернута на угол  $\chi = 45^\circ$ , так что  $\Delta i' = k S_2$ . В третьем приемнике перед призмой установлена фазовая пластина " $\lambda/4$ " с ориентацией  $45^\circ$ , при этом  $\Delta i'' = k S_3$  (коэффициенты пропорциональности  $k$  в трех приемниках полагаем одинаковыми). Сумма токов



**Рис. 3.** Схема измерения параметров Стокса. S — источник света, P — призма Николя,  $\chi$  — угол ее ориентации относительно оси  $x$ , равный  $0^\circ$  при измерении  $S_1$  и  $45^\circ$  при измерении  $S_2$ , T — дополнительная фазовая пластина " $\lambda/4$ " для измерения  $S_3$ ,  $D_x$  и  $D_y$  — фотодетекторы,  $\Delta i$  — разность токов детекторов.

в любом из трех приемников пропорциональна общей интенсивности пучка:  $i_1 + i_2 = kS_0$ . При произвольном преобразователе поляризации T, установленном перед призмой, разность токов пропорциональна проекции вектора  $\mathbf{S}$  на определенное направление в пространстве Пуанкаре [63].

Такое устройство позволяет наблюдать флуктуации параметров Стокса  $S_n(t)$  около их средних значений  $\langle S_n \rangle$ . Средние значения фототоков определяют обычные параметры Стокса  $\langle S_n \rangle$ . Для их измерения можно использовать один приемник и поочередно измерять  $\langle S_n \rangle$  (поскольку поле предполагается стационарным).

Предельная точность измерения параметров Стокса ограничивается квантовым (фотонным, дробовым) шумом,  $\langle \Delta S_k^2 \rangle_{\text{quant}} = \langle S_0 \rangle$ . Однако для некоторых состояний поля, названных *поляризационно-сжатыми* [64], этот шум удается уменьшить,  $\langle \Delta S_k^2 \rangle < \langle S_0 \rangle$ . Отметим явление *скрытой поляризации* [63], когда  $P = 0$ , но флуктуации токов и их корреляция зависят от параметров преобразователей поляризации. Для феноменологического описания этих эффектов можно ввести параметры Стокса высших порядков [63].

#### 5.4. Измерение поляризации фотонов

Рассмотрим поляризационные свойства одного фотона и метод их измерения в оптическом диапазоне. Реальные эксперименты следует описывать с помощью квазистационарных состояний — суперпозиции близких по энергии фоковских однофотонных состояний,

$$|\psi(t)\rangle = \int d\mathbf{k} f(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle.$$

При наглядном классическом описании такому состоянию соответствует *однофотонный волновой пакет* — локализованное во времени и пространстве квазимонохроматическое поле со спектром  $f(\mathbf{k})$  [37]. Однако мы для простоты будем говорить о фотоне и использовать одномодовое описание.

Как показано на примере в разделе 5.2, методами современной лазерной техники можно достаточно надежно приготовить поле в однофотонном состоянии, т.е. излучить один оптический фотон с определенной поляризацией. Такое состояние в общем случае задается вектором

$$|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \equiv \alpha|1,0\rangle + \beta|0,1\rangle. \quad (5.4.1)$$

Здесь  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  и  $|x\rangle \equiv |1,0\rangle \equiv |1\rangle_x \otimes |0\rangle_y$  означает состояние с одним фотоном, поляризованным вдоль направления  $x$ , при этом вторая мода  $y$  находится в

вакуумном состоянии. Состояние  $|\psi\rangle$  с точностью до фазы можно параметризовать двумя вещественными числами  $\theta, \phi$  — координатами точки на сфере Пуанкаре (ср. с (5.3.3)):

$$\alpha \equiv \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta \equiv \exp i\phi \sin \frac{\theta}{2} \\ (\theta = 0 - \pi, \quad \phi = 0 - 2\pi). \quad (5.4.2)$$

Параметры  $\alpha, \beta$  и  $\theta, \phi$  играют ту же роль, что и в случае классической поляризованной волны. При  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$  фотон поляризован под углом  $45^\circ$  к оси  $x$ , а при  $\alpha = i\beta = 1/\sqrt{2}$  он имеет правую круговую поляризацию.

Пусть фотон линейно поляризован в плоскости  $(x, y)$  под углом  $\theta/2$  к оси  $x$ , т.е.  $\alpha = \cos \theta, \beta = \sin \theta$ ; в очевидных обозначениях можно также записать  $|\psi\rangle = |\theta\rangle$ . Для регистрации фотонов воспользуемся идеальным счетчиком фотонов, имеющим 100%-ную квантовую эффективность независимо от поляризации. При этом на выходе счетчика с вероятностью 1 появится импульс тока — *фотоотсчет*. Никакой случайности здесь нет, вероятность регистрации фотона  $p = 1$  (мы не учитываем случайность момента появления импульса тока  $t_1$  в пределах длительности волнового пакета, которая нас здесь не интересует).

Случайность возникает лишь если перед детектором установлено какое-либо поляризующее устройство, например, поляризационный светоделитель (см. рис. 3). Пусть ось призмы направлена вдоль оси  $x$  ( $\chi = 0$ ), и в двух выходных пучках призмы установлены два идеальных детектора (счетчика фотонов); тогда они будут срабатывать с вероятностями  $p_1 = \cos^2 \theta$  и  $p_2 = \sin^2 \theta$  (ср. с пространством состояний намагниченной монеты в разделе 3.1). В каждом испытании отсчет наблюдается только в одном из двух детекторов. При повороте призмы на угол  $\chi = \theta/2$  восстановится регулярность,  $p_1 = 1, p_2 = 0$ . Заметим, что угол  $\theta$  определяется из измеренных вероятностей  $p_n(\chi)$  неоднозначно — надо повторить измерения при другой ориентации призмы.

Чтобы рассмотреть более общий случай, определим операторы Стокса через операторы рождения и уничтожения фотонов  $a^\dagger, a$  в двух поляризационных модах по аналогии с (5.3.1):

$$S_0 \equiv a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y, \quad S_1 \equiv a_x^\dagger a_x - a_y^\dagger a_y, \\ S_2 \equiv a_x^\dagger a_y + a_x a_y^\dagger, \quad S_3 \equiv \frac{a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger}{i}. \quad (5.4.3)$$

Отметим, что операторы  $S_1, S_2, S_3$  не коммутируют, например,  $[S_1, S_2] = 2iS_3$ . Усреднение с помощью (5.4.1) дает

$$\langle S_0 \rangle = 1, \\ \langle S_1 \rangle = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \cos \theta, \\ \langle S_2 \rangle = 2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta) = \sin \theta \cos \phi, \\ \langle S_3 \rangle = 2 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta) = \sin \theta \sin \phi \quad (5.4.4)$$

(ср. с (5.3.2)). Теперь  $\langle \mathbf{S} \rangle = (\langle S_1 \rangle, \langle S_2 \rangle, \langle S_3 \rangle)$  — единичный вектор:  $\langle S_1 \rangle^2 + \langle S_2 \rangle^2 + \langle S_3 \rangle^2 = \langle S_0 \rangle = 1$ . Следовательно,  $P = 1$  — однофотонное одномодовое поле в чистом состоянии полностью поляризовано (как и классическое монохроматическое поле). Отметим, что  $\langle S_k^2 \rangle \neq \langle S_k \rangle^2 = 1$  и  $\langle S_1^2 \rangle + \langle S_2^2 \rangle + \langle S_3^2 \rangle = 3$ . Вектор Стокса фотона  $\langle \mathbf{S} \rangle$

можно отобразить в виде точки на сфере Пуанкаре. Он, как и вектор поляризации  $\mathbf{e} = (\alpha, \beta)$ , характеризует тип поляризации фотона. Иначе говоря,  $\langle S_k \rangle$  характеризует корреляции между свойствами поля в двух модах, поэтому  $S_k$  можно назвать *корреляционными* операторами.

С помощью фазовых пластин можно изменять поляризационные параметры и из исходного оптического фотона с фиксированной поляризацией (5.4.1) получить фотон с любой заданной поляризацией — линейной, круговой или эллиптической. Такие преобразования удобно описывать с помощью матриц Джонса  $\mathbf{T}$ , действующих на двумерный вектор поляризации  $\mathbf{e} \equiv (\alpha, \beta)$  (см. (5.3.5)).

Поддействуем операторами  $S_k$  на вектор (5.4.1). С помощью (5.4.3) находим

$$\begin{aligned} S_0|\psi\rangle &= \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle, & S_1|\psi\rangle &= \alpha|x\rangle - \beta|y\rangle, \\ S_2|\psi\rangle &= \beta|x\rangle + \alpha|y\rangle, & S_3|\psi\rangle &= -i\beta|x\rangle + i\alpha|y\rangle. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Отсюда следует, что действие операторов  $S_k$  на вектор состояния фотона  $|\psi\rangle$  эквивалентно действию матриц Паули  $2 \times 2$  на вектор поляризации фотона  $\mathbf{e}$ , при этом  $S_1 \sim \sigma_z$ ,  $S_2 \sim \sigma_x$ ,  $S_3 \sim \sigma_y$ . Такие преобразования в эксперименте можно реализовать набором фазовых пластин. Это пример дуальной роли наблюдаемых величин в физике — они описывают как измеряемые величины, так и преобразования состояний.

Для измерения состояния однофотонного поля надо провести три описанные выше серии измерений (при  $\chi = 0$ ,  $\chi = 45^\circ$  и с дополнительной пластиной " $\lambda/4$ "), в которых поочередно измеряются операторы  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Таким образом, операторы  $S_k$  можно полагать наблюдаемыми. Собственные значения этих операторов равны  $s_k = \pm 1$ . В каждом испытании при срабатывании верхнего или нижнего детектора принимается, что  $s_{ki} = +1$  или  $-1$  (ср. с классическим случаем, когда  $s_k$  определяются по разности фототоков  $\Delta i$  и принимают непрерывный ряд значений). Конечно, при этом используется классическое описание призмы Николя и фазовых пластин. Кроме того, на основании модели фотодетектирования полагается, что вероятность отсчета пропорциональна  $\langle \psi | a'^\dagger a' | \psi \rangle$ , где операторы  $a'^\dagger$ ,  $a'$  относятся к полю на детекторе. Большое число испытаний  $N$  дает экспериментальное среднее значение одного из параметров Стокса для данного состояния  $\psi$ :  $\langle S_k \rangle \approx \approx N^{-1} \sum s_{ki}$ . Далее с помощью (5.4.2) можно определить параметры состояния  $\alpha, \beta$  (они же — компоненты вектора поляризации фотона  $\mathbf{e} \equiv (\alpha, \beta)$ ). Подбирая комбинацию фазовых пластин, можно измерить проекцию вектора Стокса  $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})$  на любое заданное направление  $\mathbf{n}$  на сфере Пуанкаре [63].

Измерения по схеме рис. 3 позволяют также определить, является ли исходное состояние поля однофотонным — в этом случае в каждом испытании один из детекторов обязательно дает ровно один отсчет (для простоты детекторы полагаем идеальными).

Подчеркнем, что установку на пути фотона поляроида лучше рассматривать не как *измерение* поляризации фотона, а как *фильтрацию*. Для измерения поляризации фотона к поляроиду (или призме Николя) надо добавить детектор и фазовую пластину и повторить процедуру приготовления и детектирования много раз, меняя ориентацию поляроида и фазовой пластины. Без

детектора поляроид служит для *приготовления* фотонов с определенной поляризацией и неопределенным временем рождения  $t_0$ . Формально поляроид (в отличие от призмы Николя) производит неунитарное преобразование ВФ или операторов поля [21]; при этом вносится дополнительная случайность, и фотоны на выходе поляроида следует описывать смешанным состоянием.

Итак, опять индивидуальному квантовому объекту — полю в данном испытании — приписывается определенное состояние  $\psi$  (или вектор поляризации  $\mathbf{e} = (\alpha, \beta)$ ), задаваемое приготовительной аппаратурой, но чтобы проверить эту информацию нужны многократные испытания (ср. с разделом 3.2). Иначе говоря, невозможно измерить априорную поляризацию данного фотона — появление отсчета в детекторе с  $x$ -поляризацией может быть вызвано фотоном с любой поляризацией (кроме множества  $\mathbf{e} = (0, 1)$  с мерой нуль). Даже если измерение не сопровождалось исчезновением фотона (это, в принципе, можно осуществить с помощью *неразрушающих измерений*, предложенных В.Б. Брагинским с сотрудниками [19]), такое измерение согласно формуле Вигнера (4.9.1) исказит исходную поляризацию. Таким образом, повторные измерения поляризации одного фотона бесполезны.

Эта особенность квантовых измерений получила в последние годы неожиданное применение в *квантовой криптографии* для обнаружения попыток "подслушивания" [16, 17, 65–69]. При этом для кодирования сообщений используется поляризационная модуляция последовательности очень слабых (в идеале однофотонных) световых вспышек. Можно также использовать частотную модуляцию и факт невозможности измерения априорного "цвета фотона" — спектрального состава однофотонного волнового пакета [69].

Поляризация фотонов иллюстрирует специфическую особенность квантовых вероятностных моделей, которую можно назвать "неколмогоровостью": отсутствие элементарных совместных вероятностей для некоммутирующих наблюдаемых при наличии маргинальных вероятностей (см. разделы 5.6–5.8).

Наблюдение за поляризацией фотонов обнаруживает еще одну принципиальную особенность квантовой случайности: она зависит от параметров измерительной аппаратуры и при некоторых значениях этих параметров исчезает; в случае линейной поляризации это соответствует ориентации оси поляризационной призмы вдоль направления исходной поляризации фотона,  $\chi = \theta/2$ . Это означает, что система — оптическое поле — приготовлена в собственном состоянии  $|\psi\rangle$  того оператора, который измеряется. В терминах проекционных операторов при этом измеряется оператор  $|\psi\rangle\langle\psi|$ .

Рассмотрим кратко поляризацию двухфотонных состояний  $|\psi\rangle_2$ , которые можно создавать с помощью эффекта параметрического рассеяния [70]. В общем случае  $|\psi\rangle_2 = \alpha|2, 0\rangle + \beta|1, 1\rangle + \gamma|0, 2\rangle$ , где  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ . Теперь вектор поляризации  $\mathbf{e} = (\alpha, \beta, \gamma)$  имеет три компоненты, а проективное пространство является сферой  $S^3$  в четырехмерном пространстве. Можно определить также параметры Стокса и степень поляризации  $P_4$  четвертого порядка, характеризующие это состояние [63]. При  $\beta = 1$  поле неполяризовано в обычном смысле ( $P_2 = 0$ ), однако имеется *скрытая поляризация* ( $P_4 = 1$ ); кроме того, состояние  $|1, 1\rangle$  проявляет *поляризационное сжатие* [63, 64].

**5.5. Коррелированные фотоны**

Рассмотрим два пучка света А и В, в каждом из которых имеется по одному фотону. Пучки могут отличаться направлениями и/или частотами. В общем случае состояние такого четырехмодового поля можно представить в виде  $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}|Ai, Bj\rangle$ , ср. с (4.7.5). Здесь  $i, j = x, y$  — индексы поляризации,  $|Ai, Bj\rangle \equiv |a\rangle_{Ai} \otimes |1\rangle_{Bj}$  — состояние с одним фотоном в моде  $Ai$  и одним — в  $Bj$ . Если два или более коэффициента  $c_{ij}$  отличны от нуля, то ВФ не факторизуется ( $\psi \neq \psi_A \psi_B$ ), и фотонам по отдельности нельзя приписать ВФ, т.е. они не обладают определенной поляризацией, но в то же время имеется определенная корреляция между их поляризациями. Такие нефакторизуемые состояния, которые называются перемешанными, демонстрируют парадокс ЭПР–Бома [22, 38–40, 56].

Пусть, например,

$$|\psi\rangle = \frac{|Ax, By\rangle - |Ay, Bx\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{5.5.1}$$

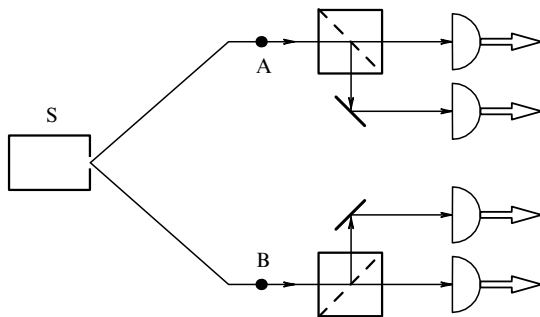
В более подробной записи это состояние можно представить также в виде  $(|10, 01\rangle - |01, 10\rangle)/\sqrt{2}$ .

Рассмотрим схему эксперимента, представленную на рис. 4. Она отличается от схемы на рис. 3 добавлением еще одного приемника для измерения параметров Стокса и использованием источника двухфотонного света. Схема позволяет измерять параметры Стокса  $S_{Zk}$  двух фотонов ( $Z = A, B; k = 0-3$ ). Из (5.5.1) следует  $\langle S_{Z0} \rangle = 1, \langle S_{Zk} \rangle = 0, P_Z = 0$  — фотоны полностью деполаризованы, в каждом пучке при повторных измерениях случайным образом срабатывает верхний или нижний детектор на рис. 4, причем независимо от того, какие преобразователи поляризации  $T_A$  и  $T_B$  установлены перед поляризационными призмами.

В то же время из (5.5.1) следует  $S_{Ak}S_{Bk}|\psi\rangle = -|\psi\rangle$ , т.е.  $|\psi\rangle$  — собственный вектор для всех трех произведений операторов  $S_{Ak}S_{Bk}$ . Отсюда

$$\langle S_{Ak}S_{Bk} \rangle = -1 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{5.5.2}$$

Форма состояния (5.5.1) и свойство (5.5.2) сохраняются при переходе к любому базису, например, в круговом



**Рис. 4.** Схема эксперимента, демонстрирующего отсутствие априорной поляризации у фотонов. Источник S посылает пары коррелированных по поляризации фотонов к двум приемникам А и В. При каждом испытании с равной вероятностью срабатывает один из двух детекторов в каждом приемнике, причем наблюдается определенная корреляция между отсчетами в двух приемниках. Характер этой корреляции исключает возможность ее описания с помощью классических вероятностных моделей.

базисе  $|\psi\rangle = (|A^+, B^-\rangle - |A^-, B^+\rangle)/\sqrt{2}$ . Согласно (5.5.2) имеется полная (анти)корреляция: если в обоих пучках измеряется одна и та же компонента вектора Стокса (т.е. установлены одинаковые преобразователи поляризации,  $T_A = T_B$ ), то  $s_{Ak} = -s_{Bk}$ . Например, если наблюдатель А измеряет  $S_{A1}$  и обнаружит значение  $s_{A1} = +1$  (т.е. сработал верхний детектор на рис. 3), то наблюдатель В наверняка обнаружит  $s_{B1} = -1$ . Всегда одновременно срабатывают противоположные детекторы, верхний в А и нижний в В или наоборот, причем независимо от базиса, в котором определены компоненты вектора Стокса. Иначе говоря, соответствующие условные вероятности равны 1 (см. раздел 4.8).

Часто полагают, что такая корреляция — свидетельство "дальнодействия", "нелокальности" квантовых явлений. Согласно гипотезе о частичной редукции (раздел 4.8) и концепции "измерение есть приготовление" при регистрации фотона в детекторе А, измеряющем  $x$ -поляризацию, состояние поля (5.5.1) проецируется на вектор  $\langle Ax|$ , так что фотон В мгновенно оказывается в состоянии с определенной поляризацией  $|By\rangle$ . Если же в А была измерена правая круговая поляризация, то фотон В мгновенно становится лево-поляризованным (вектор  $|\psi\rangle = (|A^+, B^-\rangle - |A^-, B^+\rangle)/\sqrt{2}$  проецируется на  $\langle A^+|$ ). Подчеркнем, что это не более, чем образная интерпретация свойства (5.5.2), которую ни подтвердить, ни опровергнуть экспериментом невозможно. Отметим, что для обнаружения корреляции необходим дополнительный канал связи между А и В, поэтому корреляцию нельзя использовать для передачи информации.

Пусть теперь наблюдатель А измеряет  $S_1$  и В измеряет  $S_2$ . Согласно (I.1)  $S_{A1}S_{B2}|\psi\rangle = (|Ax, Bx\rangle + |Ay, By\rangle)/\sqrt{2}$ . Этот вектор ортогонален к  $|\psi\rangle$ , поэтому  $\langle S_{A1}S_{B2} \rangle = 0$ , т.е. никакой корреляции показания детекторов не обнаруживают (верхние и нижние детекторы на рис. 4 срабатывают независимо). Аналогично,  $\langle S_{A2}S_{B1} \rangle = 0$ . Таким образом, оба наблюдателя, меняя независимо параметры преобразователей  $T_A$  и  $T_B$ , могут влиять на корреляции. Эта особенность кажется на первый взгляд необычной — как поворот фазовой пластины в А может влиять на показания детектора в В?

Однако качественно схожие управляемые корреляции можно реализовать, и в классических моделях различие квантовых и классических аналогов — количественное [56]. Напомним, что при классическом описании неполяризованной волны (раздел 5.3) можно считать, что на коротких интервалах времени волна полностью поляризована (вектор Стокса  $S(t)$  имеет определенное направление), и лишь в среднем по времени  $\langle S(t) \rangle = 0$ . Представим для наглядности, что оба фотона на рис. 4 при излучении имеют какие-то определенные поляризации (описываемые векторами Стокса  $S_Z$  или векторами поляризации  $e_Z$ ), которые хаотически изменяются при каждом очередном испытании. Поскольку согласно (5.5.2) все три компоненты вектора Стокса для пучков А и В имеют обратные знаки, то их векторы Стокса противоположны,  $S_A = -S_B$ , а векторы поляризации ортогональны,  $(e_A^* \cdot e_B) = 0$ . При этом две изображающие точки на сфере Пуанкаре располагаются напротив друг друга, т.е. если А-фотон имеет  $x$ -поляризацию, то В-фотон имеет  $y$ -поляризацию и т.д.

Излучение с такими свойствами можно создать с помощью двух идеальных лазеров А и В с одинаковой интенсивностью, дающих поляризованные пучки света.

В пучках помещаются преобразователи поляризации, управляемые общим генератором случайных чисел, причем так, что всегда имеет место ортогональность:  $\mathbf{e}_B(t) \perp \mathbf{e}_C(t)$ . В результате точки, изображающие поляризацию, равномерно покрывают сферу Пуанкаре, любая поляризация пучков А и В равновероятна, но их векторы Стокса имеют обратные направления,  $\mathbf{S}_A = -\mathbf{S}_B$  (т.е. имеется полная "анткорреляция" случайных поляризаций). Мы получили аналог свойства (5.5.2) состояния (5.5.1) (при этом усреднение с помощью  $|\psi\rangle$  заменяется на классическое усреднение по времени или ансамблю).

Однако эта классическая статистическая модель с априорной поляризацией фотонов несовместна с количественными предсказаниями квантовой теории и с интерференционными экспериментами. Рассмотрим упрощенный вариант схемы на рис. 4, в котором поляризационные призмы заменены на поляроиды (анализаторы), полностью поглощающие свет с некоторой линейной поляризацией. Фотоны регистрируются двумя детекторами, перед которыми установлены поляроиды с одинаковой ориентацией под некоторым углом  $\chi_A = \chi_B \equiv \chi$  к оси  $x$ . Из  $(\mathbf{e}_A^* \cdot \mathbf{e}_B) = 0$  следует, что при этом всегда будет срабатывать только один детектор, в А или В, т.е. вероятность совпадения отсчетов  $p_{AB}(\chi_A, \chi_B) \equiv p_{AB}(\chi) = \langle m_A m_B \rangle$  равна нулю независимо от  $\chi$  (параметр  $m$  принимается равным 1 при наличии импульса фототока и равным 0 при отсутствии импульса).

Но полное отсутствие совпадений противоречит классическим представлениям: пусть, например,  $\chi_A = \chi_B = 0$ , тогда фотоны с поляризацией  $\theta_A/2 = +45^\circ$  и  $\theta_B/2 = -45^\circ$  должны хотя бы изредка *оба* проходить через поляроиды. Этот парадокс можно рассматривать как следствие предположения о наличии у каждого фотона некоторой априорной поляризации; в результате вероятность прохождения фотона через поляроид определяется классическим законом Малюса  $p_+ = \cos^2(\theta_A/2 - \chi)$ .

Пусть теперь  $\chi_B - \chi_A = \phi$ . Из  $\langle m_A m_B \rangle = |\langle \chi_A, \chi_B | \psi \rangle|^2$  и  $|\chi\rangle = \cos \chi |x\rangle + \sin \chi |y\rangle$  следует, что в состоянии (5.5.1)  $\langle m_A m_B \rangle = (1/2) \sin^2 \phi = (1/4)(1 - \cos 2\phi)$ . Это пример эффекта поляризационной *двухфотонной интерференции* с видимостью  $V$ , равной 100%. В частности, при  $\phi = 0$  получаем  $\langle m_A m_B \rangle = 0$  — эффект полного подавления совпадений.

С другой стороны, аналогичные классические модели для эффекта *интерференции интенсивностей* дают корреляцию токов вида  $\langle i_A i_B \rangle \sim 1 - V_{\text{clas}} \cos 2\phi$ , где  $|V_{\text{clas}}| \leq 1/2$ . Дело в том, что видимость интерференции  $V$  определяется соотношением между моментами поля  $G_{xx}$ ,  $G_{yy}$  и  $G_{xy}$  на входе интерферометра [37]. В классической теории  $G_{xx} \equiv \langle a^{*2} a^2 \rangle$ ,  $G_{yy} \equiv \langle b^{*2} b^2 \rangle$ ,  $G_{xy} \equiv \langle a^* a b^* b \rangle$ , и вследствие наличия совместной вероятности для амплитуд поля  $a$ ,  $b$  имеют место неравенства Коши–Шварца  $(G_{xy})^2 \leq G_{xx} G_{yy}$ , что и приводит к ограничению максимальной видимости  $V_{\text{clas}}$ . В квантовом случае фигурируют нормально-упорядоченные моменты  $G_{xx} \equiv \langle \psi | a^\dagger a^\dagger a a | \psi \rangle$ ,  $G_{xy} \equiv \langle \psi | a^\dagger b^\dagger a b | \psi \rangle$ , которым нельзя поставить в соответствие некоторое совместное распределение вероятностей. В частности, в случае состояния (5.5.1) аналогичное неравенство для квантовых моментов нарушается:  $G_{xy} = 1$  и  $G_{xx} = G_{yy} = 0$ ; при этом говорят о неклассическом свете (раздел 4.6). Таким

образом, парадокс подавления совпадений, как и многие другие квантовые парадоксы, связан с отсутствием совместных вероятностей в случае некоммутирующих операторов.

В разделе 5.4 мы пришли к выводу, что одиночному фотону можно приписать определенную поляризацию, т.е. понятие априорной поляризации данного фотона в случае приготовления чистого однофотонного состояния имеет операциональный смысл (хотя измерить поляризацию одиночного фотона невозможно). Это не так в описанном эксперименте с двумя коррелированными по поляризации фотонами. Здесь лишь все двухволновое поле целиком характеризуется чистым состоянием (5.5.1), а поляризация отдельной волны описывается смешанным состоянием (второго типа, см. раздел 4.10). При этом в каждом пучке все три наблюдаемые параметра Стокса равны нулю,  $\langle S_{Z1} \rangle = \langle S_{Z2} \rangle = \langle S_{Z3} \rangle = 0$ , т.е. излучение полностью деполаризовано. В случае обычного смешанного однофотонного состояния этот факт можно было бы объяснить случайным изменением параметров поляризации при очередном испытании, однако видимость двухфотонной интерференции, превышающая 100%, исключает такую трактовку: понятие априорной поляризации у пары фотонов здесь не имеет смысла.

Можно также приготовить пары фотонов, коррелированных по частоте и по структуре волновых фронтов [57, 71, 72]. При этом не имеет смысла говорить об априорной пространственно-временной форме волновых пакетов, соответствующих отдельным фотонам. Таким образом, наглядное представление фотонов в виде "реальных" волновых пакетов с определенной формой и поляризацией в случае "неклассического" света противоречит квантовой теории.

## 5.6. Отрицательные и комплексные "вероятности"

Вернемся к рис. 3. Пусть входное поле периодически готовится в некотором однофотонном состоянии. Призма ориентирована под углом  $\chi = 0^\circ$  к оси  $x$ , т.е. измеряется первый параметр Стокса  $S_1$ . При каждом испытании срабатывает или верхний, или нижний детектор. Припишем случайной величине  $S_1$  значение  $s_1 = +1$  в случае срабатывания верхнего детектора и  $s_1 = -1$  — нижнего. Можно для наглядности представить себе цветную лампочку, которая управляется выходными импульсами детекторов и вспыхивает зеленым цветом при  $s_1 = +1$  и красным при  $s_1 = -1$ . Забудем о фотонах и поляризациях и попробуем описать наблюдаемые события чисто феноменологически, рассматривая приемник как "черный ящик" с входным отверстием и лампочкой. Передатчик посылает последовательность сигналов со стационарной статистикой, характеризующейся некоторой вероятностью  $p_1(s_1)$ . Результат серии испытаний запишется в виде битовой последовательности вида  $(++--+-\dots)$ , из которой можно определить вероятности  $p_1(+1)$ ,  $p_1(-1) = 1 - p_1(+1)$  и параметр Стокса  $\langle S_1 \rangle = p_1(+1) - p_1(-1) = 2p_1(+1) - 1$ .

Согласно концепции скрытых параметров в природе нет истинной случайности, и поэтому в каждом посылаемом сигнале содержится информация об очередном значении  $s_1$ , о том, какой именно детектор должен сейчас сработать, аналогично тому, как траектория броуновской частицы считается, в принципе, предопределенной начальными условиями и динамическими уравнениями

движения отдельных молекул. "Скрытость" параметров вынуждает нас ограничиться констатацией некоторой вероятности  $p_1(s_1)$ , которая "на самом деле" определяется усреднением по множеству скрытых динамических параметров. (Можно полагать и скрытые параметры также случайными, при этом  $p_1(s_1)$  играет роль маргинального распределения, определяемого суммированием по многомерному распределению для скрытых параметров [38].) Итак, полагаем, что посылаемые сигналы обладают некоторым априорным свойством  $S_1$ , которое случайным образом изменяется от испытания к испытанию. Назовем это предположение постулатом об априорном существовании наблюдаемых.

Повернем теперь призму на рис. 3 на  $45^\circ$ , т.е. будем измерять  $S_2$ . Серия испытаний даст новое распределение  $p_2(s_2)$ , которое также, очевидно, характеризует посылаемые сигналы — ведь параметры излучателя не изменялись при повороте призмы (поворот можно делать, в принципе, уже после того, как сигнал покинул излучатель и находится еще в пути — это известный метод *задержанного выбора* Уиллера (delayed choice)). Согласно концепции скрытых параметров сигналы обладают по крайней мере двумя априорными свойствами  $S_1$  и  $S_2$ , которые определяют, какой из детекторов сработает при двух возможных выборах типа приемника на рис. 3. (Для каждого преобразователя поляризации надо вводить свою случайную величину, но для наших целей достаточно ограничиться двумя.) Сигналы должны нести информацию об исходе любого возможного испытания. Источник может передать, например, команду  $(+-)$ , по которой в случае приемника типа 1 (измеряющего  $S_1$ ) вспыхнет зеленая лампа, а в случае приемника типа 2 (измеряющего  $S_2$ ) — красная. Серия сигналов состоит из последовательности команд четырех видов:  $(++)$ ,  $(+-)$ ,  $(-+)$  и  $(--)$ . В случае стационарного источника эти команды должны встречаться с определенными вероятностями  $p(s_1, s_2)$  (ср. с моделью двух монет в разделе 3.4). При этом обе величины  $s_1$  и  $s_2$  имеют какие-то определенные значения  $+1$  или  $-1$  независимо от того, наблюдаются они или нет.

Однако измерить это совместное распределение невозможно — приемник в каждом испытании может иметь лишь один преобразователь поляризации, одна из двух команд игнорируется. Если бы мы имели дело не с однофотонными сигналами, то можно было бы "клонировать" сигнал — разделить его по двум каналам и использовать две измерительные установки. Нельзя также использовать последовательные измерения над одним фотоном — первое измерение согласно проекционному постулату (4.7.2) или формуле Вигнера (4.9.1) изменяет состояние поля, так что наблюдать априорные значения  $s_1$  и  $s_2$  в одном испытании невозможно. Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении различных проекций  $\sigma_k$  спина частицы — их можно измерять лишь поочередно.

Итак, рассматриваемый эксперимент с двумя типами приемников позволяет формально ввести понятие неизмеримого совместного распределения  $p(s_1, s_2)$  для наблюдаемых поочередно случайных величин  $S_1$  и  $S_2$ . Это соответствует привычной классической точке зрения, когда все свойства вещей, которые можно наблюдать, существуют *a priori* — до их измерения.

Четыре вероятности  $p(s_1, s_2)$  невозможно также и вычислить в рамках квантовой теории, так как нет

соответствующего алгоритма: операторы  $S_1$  и  $S_2$  не коммутируют, следовательно, у них нет общих собственных состояний, и поэтому постулат Борна (4.7.1) не применим. Однако можно использовать обходной путь: вычислить средние от произведений некоммутирующих операторов (квантовые моменты) и далее воспользоваться алгоритмами классической теории вероятностей, выражающими вероятности через моменты [38, 56]. Отметим сразу, что произведение некоммутирующих эрмитовых операторов неэрмитово, поэтому моменты и, соответственно, найденные таким способом "вероятности" могут принимать комплексные значения.

Поясним эту процедуру на простом примере. Пусть поле готовится в однофотонном состоянии с произвольной поляризацией  $|\psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$ . Полагаем, что в каждом испытании фотону можно априори приписать определенные значения компонент вектора Стокса  $s_1, s_2$ , равные  $+1$  или  $-1$ . Эти значения фотон принимает с некоторыми вероятностями  $p(s_1, s_2)$  для двух случайных величин  $S_1, S_2$ . В классической теории элементарные вероятности связаны с моментами формулой (3.4.3), из которой следует ограничение (3.4.4). В частности, должно выполняться неравенство

$$\langle S_1 S_2 \rangle \geq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle - 1. \quad (5.6.1)$$

В состоянии  $|\psi\rangle$  с помощью (I.1) находим следующие отличные от нуля моменты:

$$\begin{aligned} \langle S_2 S_3 \rangle &= \langle S_3 S_2 \rangle^* = \langle S_1 S_2 S_3 \rangle = \langle S_1 S_3 S_2 \rangle^* = i \langle S_1 \rangle, \\ \langle S_3 S_1 \rangle &= \langle S_1 S_3 \rangle^* = \langle S_2 S_3 S_1 \rangle = \langle S_2 S_1 S_3 \rangle^* = i \langle S_2 \rangle, \\ \langle S_1 S_2 \rangle &= \langle S_2 S_1 \rangle^* = \langle S_3 S_1 S_2 \rangle = \langle S_3 S_2 S_1 \rangle^* = i \langle S_3 \rangle. \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Здесь параметры Стокса  $\langle S_k \rangle$  определены через  $\alpha, \beta$  в (5.3.4). Пусть, например,  $\phi = 0, \theta = 45^\circ$  (линейная поляризация под углом  $22,5^\circ$  к оси  $x$ ), тогда  $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = 1/\sqrt{2}, \langle S_1 S_2 \rangle = \langle S_3 \rangle = 0$  (см. рис. 2). В результате неравенство (5.6.1) не удовлетворяется, и вероятность  $p(-1, -1)$  согласно (3.4.3) оказывается отрицательной:  $p(-1, -1) = (1/4)(1 - \sqrt{2}) \approx -0,1$ .

В общем случае возникает вопрос: "Какую последовательность операторов выбрать в квантовых моментах при сравнении с классической теорией?" Симметризованное выражение согласно (5.6.2) дает нуль:

$$\frac{1}{2} (\langle S_1 S_2 \rangle + \langle S_2 S_1 \rangle) = \text{Re}(\langle S_1 S_2 \rangle) = 0.$$

Нормально-упорядоченный момент  $\langle :S_1 S_2: \rangle = \langle S_1 S_2 \rangle - i \langle S_3 \rangle$  также равен нулю. В результате (3.4.3) принимает вид

$$p(s_1, s_2) = \frac{1}{4} (1 + s_1 \langle S_1 \rangle + s_2 \langle S_2 \rangle). \quad (5.6.3)$$

При этом вероятность события  $(s_1 = s_2 = -1)$  в состоянии  $|\psi\rangle$  должна равняться

$$\begin{aligned} p(-1, -1) &= \frac{1}{4} (1 - \langle S_1 \rangle - \langle S_2 \rangle) = \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos \theta - \sin \theta \cos \phi). \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

Это выражение принимает отрицательные значения при некоторых типах поляризации фотона и поэтому не может иметь смысл вероятности.

При выборе антисимметризованного выражения

$$\frac{\langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_2 S_1 \rangle}{2i} = \text{Im}(\langle S_1 S_2 \rangle) = \langle S_3 \rangle$$

формула (3.4.3) принимает вид

$$p(s_1, s_2) = \frac{1}{4}(1 + s_1 \langle S_1 \rangle + s_2 \langle S_2 \rangle + s_1 s_2 \langle S_3 \rangle). \quad (5.6.5)$$

Выражение (5.6.5) также принимает отрицательные значения при некоторых поляризациях. Обобщение этого рассуждения на два или большее число фотонов, принадлежащих нескольким пучкам, дает единый подход к разрешению нескольких известных парадоксов квантовой оптики [38].

Рассмотренный пример показывает, что не имеет смысла полагать, будто однофотонное поле при каждом испытании несет информацию об исходе любых экспериментов по измерению его поляризации, о том, какой именно детектор на рис. 3 сработает (верхний или нижний) — это представление противоречит квантовой теории, так как приводит к отрицательным вероятностям. Квантовые моменты в общем случае не соответствуют какому-либо распределению элементарных вероятностей; в этом смысле они не являются "истинными" моментами, а модель — колмогоровской. Напомним, что оператор  $S_1$  имеет смысл разности чисел фотонов, а оператор  $S_2$  — косинуса разности фаз амплитуд полей в поляризационных модах (в случае однофотонных состояний). Таким образом, этим свойствам нельзя приписывать априорные значения. Знание состояния фотона в виде вектора поляризации фотона  $(\alpha, \beta)$  или вектора Стокса  $(\langle S_1 \rangle, \langle S_2 \rangle, \langle S_3 \rangle)$ , т.е. знание процедуры приготовления, несет информацию не о свойствах данного фотона, а лишь о статистике будущих экспериментов с множеством одинаково приготовленных фотонов. Эту статистику нельзя описывать с помощью совместных вероятностей  $p(s_1, s_2)$  или  $p(s_1, s_2, s_3)$ .

Однако этот вывод нельзя подтвердить непосредственным экспериментом, так как неэрмитовы операторы ненаблюдаемы. В следующих разделах будет показано, что переход к 4- или 6-модовым моделям позволяет обнаружить аналогичное противоречие между классическими представлениями и квантовой теорией при рассмотрении лишь эрмитовых операторов и измеримых моментов.

### 5.7. Парадокс Белла для параметров Стокса

Схема эксперимента на рис. 4 позволяет, в принципе, подтвердить нарушение знаменитого неравенства Белла [38–40, 42]. Источник посылает одновременно по одному фотону к двум удаленным приемникам А и В. При каждом испытании поле приготавливается в двухфотонном состоянии (5.5.1), так что между поляризациями фотонов имеется определенная корреляция (см. (5.5.2)).

Пусть в приемнике А измеряется или  $A \equiv S_{A1}$  ( $\chi = 0$ ) или  $A' \equiv S_{A2}$  ( $\chi = 45^\circ$ ), а в приемнике В измеряется или  $B \equiv 2^{-1/2}(S_{B1} + S_{B2})$  ( $\chi = 22,5^\circ$ ) или  $B' \equiv 2^{-1/2}(S_{B1} - S_{B2})$  ( $\chi = -22,5^\circ$ ). Проводятся четыре серии экспериментов по  $N$  испытаний в каждой, в которых поочередно измеряются пары операторов  $(A, B)$ ,  $(A', B)$ ,  $(A, B')$  и  $(A', B')$ . Каждое испытание дает пару чисел вида  $(a_i, b_i)$ , где  $a_i, b_i = \pm 1$ . С помощью полученной таблицы из  $4N$

пар чисел образуются следующие  $N$  чисел

$$f_i \equiv \frac{1}{2}(a_i b_i + a'_{N+i} b_{N+i} + a_{2N+i} b'_{2N+i} - a'_{3N+i} b'_{3N+i}). \quad (5.7.1)$$

Далее вычислится среднее арифметическое значение

$$\langle F \rangle_N \equiv N^{-1} \sum_{i=1}^N f_i.$$

Процедура измерения и ее компьютерная имитация подробно представлены в [56]; описание реальных оптических экспериментов и их критическое рассмотрение см. в [42].

При  $N \rightarrow \infty$  можно принять  $\langle F \rangle_N \rightarrow \langle F \rangle$ , где

$$\begin{aligned} F &\equiv \frac{1}{2}(AB + A'B + AB' - A'B') = \\ &= \frac{1}{2}[A(B + B') + A'(B - B')] = \\ &= 2^{-1/2}(S_{A1}S_{B1} + S_{A2}S_{B2}), \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

и  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение с помощью ВФ (5.5.1) или с помощью некоторого классического набора вероятностей  $p(a, b, a', b')$ .

В квантовом случае из (5.5.2) и (5.7.2) сразу следует

$$\langle F \rangle_{\text{quant}} = \frac{1}{2} \langle \psi | AB + A'B + AB' - A'B' | \psi \rangle = -\sqrt{2}. \quad (5.7.3)$$

Заметим, что в квантовой теории символ  $\langle \psi | F | \psi \rangle$  не соответствует обычному определению наблюдаемого среднего значения согласно постулату Борна (4.7.1), так как оператор  $F$  содержит некоммутирующие операторы, которые измеряются в разных испытаниях.

В классической теории в соответствии с концепцией скрытых параметров предполагается, что существуют  $2^4 = 16$  элементарных вероятностей  $p(a, b, a', b')$ , которые определяются свойствами источника света. Выразим среднее значение случайной величины  $F$  через элементарные вероятности:

$$\langle F \rangle_{\text{clas}} = \sum_{a, b, a', b' = \pm 1} p(a, b, a', b') f(a, b, a', b'). \quad (5.7.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(a, b, a', b') &\equiv \frac{1}{2}(ab + a'b + ab' - a'b') = \\ &= \frac{1}{2}[a(b + b') + a'(b - b')]. \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

Эта функция от 4-х аргументов принимает лишь два значения  $\pm 1$  (если  $b = b'$ , то  $f = ab = \pm 1$ , а если  $b = -b'$ , то также  $f = a'b = \pm 1$ ). Таким образом, введенная случайная величина  $f(a, b, a', b')$  может принимать лишь значения  $f_{\min} \equiv -1$  и  $f_{\max} \equiv +1$  (в отличие от измеряемой величины  $f_i = 0, \pm 1, \pm 2$ ). Среднее значение любой классической случайной величины  $F$  принадлежит интервалу  $[f_{\min}, f_{\max}]$ , т.е.  $f_{\min} \leq \langle F \rangle_{\text{clas}} \leq f_{\max}$ . Отсюда получаем неравенство Белла в форме Клаузера–Хорна [40]:  $|\langle F \rangle_{\text{clas}}| \leq 1$ . Действительно, модуль суммы не превышает суммы модулей, поэтому из  $f = \pm 1, p \geq 0$  и  $\sum p = 1$  следует  $|\langle F \rangle_{\text{clas}}| \leq \sum p |f| = \sum p = 1$ .

Квантовое значение  $|\langle F \rangle_{\text{quant}}| \equiv |\langle \psi | F | \psi \rangle| = \sqrt{2}$  в состоянии (5.5.1) на 41 % превышает классический

предел, равный единице. Этот результат можно сформулировать в несколько более общей форме: для некоторых квантовых моделей для определенной комбинации моментов  $\langle F \rangle_{\text{quant}} = \langle \psi | F | \psi \rangle$  нарушаются неравенства вида (ср. с (3.4.4))

$$f_{\min} \leq \langle F \rangle_{\text{quant}} \leq f_{\max}, \quad (5.7.6)$$

где  $[f_{\min}, f_{\max}]$  — интервал значений, принимаемых аналогичной классической величиной. Неравенство Белла

$$|\langle F \rangle_{\text{clas}}| = \frac{1}{2} |\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 1$$

является примером классического ограничения на моменты, которое следует из неотрицательности элементарных вероятностей, соответствующих данному набору моментов (ср. (3.4.4), (5.6.4)). Для операторной функции  $F$  известно несколько форм (помимо (5.7.2)), приводящих к нарушению условий (5.7.5) [38–40]. Все они показывают несовместность квантового и классического описания, т.е. порождают парадокс Белла (его называют также теоремой Белла). Еще один пример нарушения ограничений на "истинные" моменты в квантовой модели будет приведен в следующем разделе.

Как можно разрешить парадокс Белла? Рассмотрим три возможности.

1. Отказ от допущения существования априорных значений для некоммутирующих операторов; при этом теряют смысл и элементарные вероятности  $p(a, b, a', b')$  и само понятие среднего значения  $\sum pf$ . В то же время маргиналы вида  $p(a, b)$  сохраняют смысл, что можно принять за признак неколмогоровского характера квантовой модели.

2. Допущение отрицательных вероятностей, при котором ограничение  $f_{\min} \leq \langle F \rangle_{\text{clas}} \leq f_{\max}$  снимается. Можно формально выразить вероятности  $p(a, b, a', b')$  через набор квантовых моментов в состоянии (5.5.1), пользуясь классическими алгоритмами типа (3.4.3) [38, 56]. При этом некоторые из них оказываются действительно отрицательными (например,  $p(+1, +1, -1, -1) = -2^{-7/2}$ ). Однако отрицательные вероятности не имеют операционального смысла.

3. Допущение влияния ориентации призмы в А на показания детектора в В и ориентации призмы в В на показания детектора в А. Часто в соответствии с распространенной интерпретацией ЭПР-корреляций (см. разделы 4.8, 5.5) полагают, что акт регистрации фотона в А вызывает редукцию ВФ к состоянию, зависящему от ориентации призмы, и что это эквивалентно изменению свойств фотона в В. Это допущение *нелокальности* увеличивает вдвое число аргументов у оператора  $F$ : теперь  $F$  надо писать в виде  $F \equiv (1/2)(AB + A'B' + A''B'' - A'''B''')$ . При этом  $f = 0, \pm 1, \pm 2$ , так что  $-2 \leq \langle F \rangle_{\text{clas}} \leq +2$ , и квантовое среднее  $\langle F \rangle_{\text{quant}} = -\sqrt{2}$  не выходит за границы классического интервала  $[-2, +2]$ .

В рамках "минимальной", наименее спекулятивной интерпретации можно принять первое допущение. При этом нарушение неравенств Белла принимается за свидетельство того, что понятие элементарных вероятностей  $p(s_{A1}, s_{B1}, s_{A2}, s_{B2})$  и, соответственно, понятие априорных значений для операторов Стокса в четырех модах  $A_x, A_y, B_x, B_y$ , не имеют смысла. В отличие от случая двух мод

(раздел 5.6) здесь это обстоятельство можно, в принципе, продемонстрировать в эксперименте.

### 5.8. Парадокс Гринбергера – Хорна – Цайлингера для параметров Стокса

Добавим к схеме на рис. 4 еще один, третий канал. Теперь она демонстрирует известный парадокс Гринбергера – Хорна – Цайлингера (ГХЦ) [73] (см. также [38, 74]). Источник при каждом испытании посылает одновременно по одному фотону трем удаленным приемникам А, В, С. Приемники измеряют или  $S_1$  ( $\chi = 0$ ) или  $S_2$  ( $\chi = 45^\circ$ ). Обозначим  $A \equiv S_{A1}$ ,  $A' \equiv S_{A2}$  и аналогично для каналов В, С. В каждом испытании регистрируются значения трех величин. Например, при типе эксперимента  $(A, B', C') \equiv (S_{A1}, S_{B2}, S_{C2})$ , т.е. при  $\chi_A = 0$ ,  $\chi_B = \chi_C = 45^\circ$  результат испытания может иметь вид  $(a, b', c') = (+ + -)$ ; при этом произведение  $ab'c' = -1$ . Отметим, что операторы  $S_{Z1}$  и  $S_{Z2}$  не коммутируют и измеряются в разных испытаниях.

Пусть поле готовится в трехфотонном состоянии (ср. с (5.5.1)):

$$|\psi\rangle = \frac{|+\rangle_A |+\rangle_B |+\rangle_C + |-\rangle_A |-\rangle_B |-\rangle_C}{\sqrt{2}}, \quad (5.8.1)$$

тогда согласно квантовой теории (см. Приложение I) должны наблюдаться корреляции следующего вида:

$$ab'c' = -1, \quad a'bc' = -1, \quad a'b'c = -1, \quad abc = +1. \quad (5.8.2)$$

При этом все первые моменты  $\langle S_k \rangle$  равны нулю, т.е. фотонам по отдельности нельзя приписать какую-либо поляризацию. Формулы (5.8.2) описывают полную корреляцию между тройками наблюдаемых показаний детекторов. Это означает, что, например, наблюдаемая  $AB'C' \equiv S_{1A}S_{2B}S_{2C}$  не флуктуирует, т.е. в каждом испытании произведение трех чисел  $ab'c'$  всегда равно  $-1$ . При повторных испытаниях с теми же ориентациями призм наблюдается только четное число плюсов, т.е. с равными вероятностями наблюдаются следующие тройки:

$$(a, b', c') = (+ + -), (+ - +), (- + +), (- - -).$$

Это же относится и к испытаниям, в которых наблюдаются  $A', B, C'$  и  $A', B', C$ . С другой стороны, при экспериментах типа  $ABC$  (все приемники измеряют  $S_1$ ) число плюсов всегда нечетно:

$$(a', b', c') = (- - +), (- + -), (+ - -), (+ + +).$$

Попытаемся описать этот эксперимент (пока еще не осуществленный) с точки зрения "здорового смысла", т.е. в рамках классической вероятностной модели с априорными свойствами сигналов. В рамках этой модели имеется шесть случайных дихотомных величин  $A, A', B, B', C, C'$ , принимающих значения  $a, a', b, b', c, c' = \pm 1$ . Символ (...) теперь означает классическое усреднение по некоторому шестимерному распределению вероятностей  $p(a, b, c, a', b', c')$ . При каждом испытании передатчик посылает полную информацию — набор из шести чисел  $\pm 1$ . При этом все шесть величин  $a, b, c, a', b', c'$  имеют какие-то определенные значения  $+1$  или  $-1$



независимо от того, наблюдаются они или нет. Эти шесть чисел при *каждом* испытании должны удовлетворять квантовым предсказаниям (5.8.2) о полной корреляции троек наблюдаемых (поскольку тип приемника можно выбрать произвольным образом *после* отправления сообщения, пока оно находится еще в пути).

Итак, в посылаемой источником света информации согласно теории скрытых параметров должны выполняться четыре предсказания квантовой модели (5.8.2) (хотя сами числа  $a', b, c, \dots$  с равной вероятностью принимают значения  $\pm 1$ ). Легко убедиться, что уравнения (5.8.2) несовместны. Пусть, например, посылается сигнал  $(a, b, c, a', b', c') = (- - - + + +)$ , тогда первые три равенства в (5.8.2) выполняются, а последнее нет. Вообще, ни одна возможная комбинация шести знаков не может одновременно удовлетворить всем четырем наблюдаемым корреляциям (5.8.2). Это становится ясно, если перемножить левые и правые стороны равенств в (5.8.2). При этом в левой части каждый множитель встречается 2 раза:

$$a'bcab'cab'c'a'b'c' = (abca'b'c')^2 = +1. \quad (5.8.3)$$

В то же время произведение правых частей (5.8.2) дает  $(-1)^3(+1) = -1$ . Этот парадокс вида  $+1 = -1$  можно разрешить отказом от предположения, что параметры Стокса  $S_{Z1}$  и  $S_{Z2}$  имеют какие-то определенные априорные значения (независимо от того, измеряют их в данном испытании или нет), и учетом того, что в эксперименте каждое из четырех равенств в (5.8.2) проверяется в различных испытаниях (отличающихся ориентациями призмы Николя).

В результате распределение  $p(a, b, c, a', b', c')$  также теряет смысл. В классической модели  $2^6 = 64$  числа  $p(a, b, c, a', b', c')$  образует набор элементарных вероятностей, через которые с помощью суммирования выражаются все маргинальные вероятности меньшей размерности  $p(a), p(a, b'), \dots$ ; поэтому, если признать, что  $p(a, b, c, a', b', c')$  не существует, то не определены и все маргинальные вероятности. Но одномерные вероятности типа  $p(a)$  заведомо имеют физический смысл, так как их можно непосредственно измерить. Следовательно, рассмотренный эксперимент нельзя описывать колмогоровской моделью — маргинальные вероятности и соответствующие им моменты можно измерить, а исходное элементарное 6-мерное распределение не имеет смысла. Иначе говоря, квантовые моменты  $\langle S_{1A}S_{1B}S_{1C} \rangle, \langle S_{1A}S_{2B}S_{2C} \rangle, \dots$  не являются "истинными" моментами какого-то неотрицательного распределения; проблема моментов не имеет решения, т.е. модель "неколмогорова". Формальный расчет  $p(a, b, c, a', b', c')$  через квантовые моменты по классическому алгоритму неоднозначен и приводит к отрицательным значениям, не имеющим операционального смысла (см. раздел 5.6 и [38, 56]).

Отметим, что принят другой метод разрешения подобных парадоксов. Считается, что они доказывают существование "квантовой нелокальности" — влияния, например, поворота призмы в А на показания приемников в В и С (см. раздел 5.7).

Парадокс ГХЦ имеет два интересных отличия от парадокса Белла: здесь имеет место полная корреляция между наблюдаемыми (поэтому в (5.8.2) убраны угловые скобки, означающие операцию усреднения), и вместо

нарушения классического неравенства нарушается классическое равенство.

Формально парадокс ГХЦ также можно определить как нарушение классического ограничения на моменты (5.7.6):  $f_{\min} \leq \langle F \rangle_{\text{clas}} \leq f_{\max}$ . Для этого примем

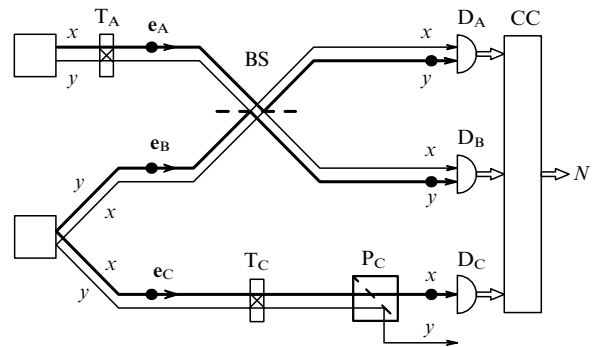
$$F \equiv F_1 F_2 F_3 F_4 \equiv AB' C' \cdot A' B C' \cdot A' B' C \cdot ABC. \quad (5.8.4)$$

В классической модели имеет место коммутативная алгебра, так что  $F = (ABCA'B'C')^2 = 1$ , т.е. классическая величина  $F$  принимает единственное значение  $f_{\min} = f_{\max} \equiv f_0 = 1$  и  $\langle F \rangle_{\text{clas}} = F = 1$ . С другой стороны, соответствующий квантовый оператор  $F$  в случае состояния (5.8.1) согласно (1.3) имеет среднее значение  $\langle F \rangle_{\text{quant}} \equiv \langle \psi | F | \psi \rangle = -1 \neq f_0$  (подробнее см. [38]).

### 5.9. "Телепортация" поляризации фотона

Неожиданная возможность копирования квантового состояния с одной индивидуальной системы на другую, изоморфную с первой, была недавно обнаружена Беннетом и др. [75]. В отличие от обратимого обмена q-битами (5.1.1) здесь исходная система влияет на конечную через классическое управляющее звено. По существу, в [75] был открыт метод *приготовления* индивидуальной квантовой системы в заданном состоянии с той существенной особенностью, что информация о том, какое именно состояние будет приготовлено, является *квантовой*, т.е. она записана в виде состояния другой системы. Это означает, что полная информация при копировании должна оставаться неизвестной — иначе часть информации будет утеряна (вспомним, что нельзя измерить поляризацию фотона). Поэтому в классическую форму — в виде наблюдаемых макрособытий — переводится лишь часть информации. Идея получила дальнейшее развитие в [76–81]. Первые оптические эксперименты в этом направлении описаны в [80, 81].

На рисунке 5 изображена упрощенная и идеализированная схема эксперимента [80] и дано элементарное



**Рис. 5.** Упрощенная и идеализированная схема эксперимента [80] и наглядная модель эффекта копирования вектора поляризации  $e_A \rightarrow e_C$ . На входе в пучках А, В и С имеется по одному фотону (кружки). Жирные линии изображают траектории фотонов. Фотон А имеет произвольную поляризацию  $e_A$ . Базисные векторы  $e_x$  и  $e_y$  выбраны так, что  $e_x = e_A$ . Одновременная регистрация фотонов детекторами  $D_A$  и  $D_B$  означает, что фотоны А и В не интерферировали на светоделителе, так как они имели ортогональную поляризацию,  $e_A \perp e_B$ . Фотоны В и С приготовлены в состоянии с ортогональной поляризацией,  $e_B \perp e_C$ , поэтому  $e_C = e_A$ . ( $T_A, T_C$  — преобразователи поляризации,  $P_C$  — поляризационная призма,  $D_Z$  — детекторы,  $CC$  — схема тройных совпадений,  $N$  — число тройных совпадений за некоторый интервал времени,  $x, y$  — индексы поляризации,  $BS$  — неполяризующее зеркало с пропусканием 50 %.)

объяснение эффекта копирования поляризации. На вход оптической системы падают три квазимонохроматических стационарных пучка света А, В и С, в которых фотоны (условно изображенные кружками) появляются одновременно, по три. Копируемые фотоны А полностью поляризованы. Фотоны В и С деполаризованы, однако между их поляризациями имеется идеальная корреляция (раздел 5.5). Полупрозрачное неполяризующее зеркало BS с пропусканием 50 % перемешивает пучки А и В, поэтому все три пучка оказываются коррелированными по поляризации. Эта корреляция анализируется с помощью двух преобразователей поляризации  $T_A$ ,  $T_C$ , поляризационной призмы  $P_C$  в пучке С, трех счетчиков фотонов  $D_Z$  и схемы совпадений СС.

Схема, по существу, представляет разновидность поляризационного интерферометра интенсивностей, работающего в режиме счета фотонов (ср. с двухфотонной интерференцией, описанной в разделе 5.5). Эксперимент [80] заключался в наблюдении зависимости числа тройных совпадений  $N$  за некоторый фиксированный интервал времени от параметров  $T_A$  и  $T_C$  и от временной задержки  $\tau$  в одном из трех каналов (при увеличении  $\tau$  видность интерференции, как всегда, падает).

Наблюдаемая по схеме рис. 5 трехфотонная интерференция должна обладать удивительным свойством: число тройных совпадений  $N$  зависит от преобразователей  $T_A$  и  $T_C$  одинаковым образом так, как будто они установлены последовательно в одном пучке или как будто поляризация фотона А на выходе  $T_A$  переносится на фотон С на входе  $T_C$ :  $e_A \rightarrow e_C$ . Иначе говоря, фаза и видность интерференции, наблюдаемой по тройным совпадениям, определяется произведением матриц Джонса  $T_C T_A$ . Если  $T_C$  совершает обратное к  $T_A$  преобразование ( $T_C T_A = 1$ ), то  $N$  не зависит ни от  $T_A$ , ни от  $T_C$ , видность интерференции равна нулю.

Детекторы  $D_{Cx}$ ,  $D_{Cy}$  и преобразователь  $T_C$  можно рассматривать как устройство для измерения поляризации С-фотонов (см. рис. 3), но никакой поляризации безусловные отсчеты в  $D_{Cj}$  не обнаруживают, так как С-фотоны не поляризованы. Однако условные отсчеты в  $D_{Cj}$ , происходящие одновременно с отсчетами в  $D_A$  и  $D_B$ , проявляют полную поляризацию. Например, по зависимости  $N_3$  от  $T_C$ , можно измерить вектор поляризации А-фотонов  $e_A = (\alpha_x, \alpha_y)$  (или, эквивалентно, вектор Стокса  $(S_A)$ ). Иногда оба фотона А и В попадают на один и тот же детектор  $D_A$  или  $D_B$ . Такие события не проявляют эффект копирования поляризации (см. Приложение II).

Для того, чтобы превратить интерферометр в устройство, приготавливающее фотоны с поляризацией, копирующей поляризацию исходных фотонов, в схему необходимо добавить оптический затвор (модулятор) М, убирающий "лишние" С-фотоны. Затвор управляется импульсами от детекторов  $D_{Aj}$  и  $D_{Bj}$  и, по существу, заменяет схему тройных совпадений, закрывая путь С-фотонам в "неблагоприятных" случаях, когда на один детектор попадает два фотона (а также при "пропуске" фотонов детекторами  $D_{Aj}$  и  $D_{Bj}$ ; за счет их неидеальности). Можно также использовать дополнительный преобразователь  $T'_C$ , который "исправляет" поляризацию С-фотонов в некоторых случаях, увеличивая число благоприятных событий с 25 % до 50 %. В результате все прошедшие через затвор и преобразователь  $T'_C$  фотоны (т.е. половина общего числа) имеют уже поляризацию, совпадающую с исходной поляризацией А-фотонов:

$e_C = e_A$ . При этом схема фактически служит для приготовления одиночных фотонов с неизвестной поляризацией, повторяющей поляризацию А-фотонов.

Можно указать на более примитивное аналогичное устройство, которое приготавливает поляризованные фотоны (без эффекта копирования) с помощью двухфотонного источника и затвора; при этом регистрация одного фотона вызывает открытие затвора на пути второго фотона [82–84]. Заметим, что действие амплитудного модулятора М, в отличие от  $T_k$  и BS, описывается неунитарным преобразованием, так что прошедшие через М фотоны следует описывать смешанным состоянием. В лучшем случае "телепортация"  $e_A \rightarrow e_C$  происходит в 50 % всех испытаний. За счет неидеальности детекторов и других элементов схемы процент будет много меньше.

Для наблюдения эффекта поле на входе должно быть приготовлено в частично факторизованном трехфотонном состоянии  $|\psi\rangle = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_{BC}$ ; при этом фотон А находится в чистом состоянии:

$$|\psi\rangle_A = \alpha|Ax\rangle + \beta|Ay\rangle, \quad (5.9.1)$$

т.е. ему можно приписать определенные векторы поляризации  $e_A \equiv (\alpha, \beta)_A$  и  $(S)_A$ , которые можно изменять преобразователем поляризации  $T_A$ . Здесь  $|Ax\rangle \equiv |1\rangle_{Ax}|0\rangle_{Ay}$  — состояние с одним фотоном в моде  $Ax$ . Фотоны В и С приготовлены в перепутанном (нефакторизованном) состоянии, дающем полную корреляцию по поляризации (см. (5.5.2)):

$$|\psi\rangle_{BC} = \frac{|Bx, Cy\rangle - |By, Cx\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.9.2)$$

(практически для этого используется эффект параметрического рассеяния света [85–87]). По отдельности В- и С-фотоны не имеют определенной априорной поляризации — их надо описывать смешанным состоянием. Такие двухфотонные состояния получили название *белловских* или *ЭПР-состояний* [76]. Средние частоты полей в модах А и В должны быть одинаковыми, а частота поля в моде С может быть любой. Все три фотона коррелированы по моменту попадания на светоделитель. За счет начальной корреляции между В- и С-фотонами и действия светоделителя все три фотона на выходе оказываются коррелированными по поляризации. При этом информация об исходном состоянии А-фотона (т.е. его вектор поляризации  $e_A = (\alpha, \beta)$ ) оказывается закодированной в корреляции троек фотонов на выходе схемы.

Идеальные счетчики фотонов в каждом испытании регистрируют числа фотонов  $n_k$ , равные 0, 1 или 2; при этом общее число наблюдаемых фотонов равно 3, и один из них регистрируется в пучке С. При многократном повторении эксперимента наблюдается 16 элементарных событий, в которых три фотона случайным образом распределяются по шести детекторам. Вероятности этих событий находятся с помощью стандартного расчета (см. Приложение II). Наблюдаемые корреляции удобно описывать, используя представление Шрёдингера и эффективную ВФ для пучка С, пропорциональную проекции выходной ВФ поля  $|\psi'\rangle$  на вектор  $\langle Ax, Ay|$ :

$$|\psi\rangle_{C\text{eff}} \equiv \sqrt{8} \langle Ay, Bx|\psi'\rangle = \alpha|Cx\rangle + \beta|Cy\rangle. \quad (5.9.3)$$

Здесь  $|\psi'\rangle$  — ВФ всего шестимодового поля с учетом действия светоделителя (см. (II.10)) (действие  $T_C$  для простоты не учитывается). Напомним, что в последовательной теории пучок  $C$  характеризуется смешанным состоянием, ему нельзя приписывать ВФ (раздел 4.10). Проектируя  $|\psi\rangle_{C\text{ eff}}$  на вектор  $\langle Cx|$  находим

$$p(Ay, Bx, Cx) = \frac{|\langle Cx|\psi\rangle_{C\text{ eff}}|^2}{8} = \frac{|\alpha|^2}{8}.$$

Сравнение (5.9.3) с (5.9.1) показывает, что в указанном подмножестве событий поле в пучке  $C$  проявляет такие же поляризационные свойства, как и исходный  $A$ -фотон. Состояние  $A$ -фотона (его вектор поляризации) как бы переносится из пучка  $A$  в пучок  $C$ ,  $e_A \rightarrow e_C$ . Эффективная функция (5.9.3) позволяет учитывать влияние преобразователя  $T_C$  на выбранный подансамбль, полагая, что  $T_C$  производит преобразование векторов  $|Cj\rangle$  (см. (II.9)).

Таким же свойством обладает еще  $1/8$  часть испытаний — те, в которых  $A$ - и  $B$ -фотоны попадают на детекторы  $Ax$  и  $Bu$  (см. (II.8a)). Общую долю "благоприятных" событий можно довести до  $1/2$ , поместив в пучок  $C$  дополнительный управляемый преобразователь поляризации  $T'_C$  [75], дающий преобразование  $\beta \rightarrow -\beta$  (оно описывается матрицей Паули  $\sigma_x$ , см. (5.4.5)) при появлении отсчетов в детекторах  $D_{Ax}$  и  $D_{Ay}$  или  $D_{Bx}$  и  $D_{By}$ . Теперь лишь половина событий, — с попаданием двух фотонов в одну выходную моду  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Bx$  или  $Bu$ , — не проявляет эффект копирования.

Этот эксперимент можно описывать также в представлении Гейзенберга:  $p'_{klm} = \mu'_{klm} = \langle \psi | N'_k N'_l N'_m | \psi \rangle$  (см. Приложение II). Оптическая схема — светоделитель и преобразователи поляризации — описывается матрицей преобразования (спектральной функцией Грина):  $a_k \rightarrow a'_k = \sum G_{km} a_m$ . Роль схемы сводится к преобразованию входных моментов, символически  $\mu \rightarrow \mu' = G^6 \mu$ . Матрица  $G_{km}$  совпадает с аналогичной матрицей в классической теории, поэтому описания преобразования статистики поля  $\mu \rightarrow \mu'$  в квантовой и классической теориях одинаковы; различие проявляется лишь в относительных значениях входных моментов  $\mu$ . Это приводит к ограничению максимальной видности двухпучковой интерференции интенсивностей в классическом случае:  $V < 50\%$  (см. раздел 5.5 и [37]).

Оригинальная статья Беннета и др. [75] была озаглавлена "Телепортация неизвестного квантового состояния посредством дуальных классического и ЭПР каналов" (Teleportation of an unknown quantum state via dual classic and EPR channels). В ней применялся формализм, основанный на использовании в качестве базисной системы векторов набора из белловских состояний типа (5.9.2). При таком подходе случаи попадания двух фотонов на один детектор и необходимость неунитарной операции для их исключения не учитываются. В [75] подчеркивается, что исходное состояние не измеряется, но информация о состоянии расщепляется на квантовую и классическую части. В оптическом случае (см. рис. 5) под классической частью понимается сигнал управления преобразователем  $T'_C$  при некоторых событиях, под квантовым — фотон  $C$ . Источник информации традиционно называют Алисой. Алиса имеет в своем распоряжении кроме входящих фотонов  $A$  еще вспомогательный ЭПР-источник коррелированных фотонов  $B$  и  $C$ , светоделитель  $BS$  и детекторы на выходе светоделителя. Алиса посылает Бобу, который распоряжается преобра-

зователем  $T'_C$ , фотон  $C$  (квантовый канал) и управляющие классические сигналы, по которым устанавливается  $T'_C = 1$  или  $T'_C = \sigma_x$ . Боб посылает фотон  $A$  в результате редукции и действия  $T'_C$ , дальше.

Если бы не "вредные" события с попаданием двух фотонов на один детектор (это специфика оптического случая, для Ферми частиц такие события исключены принципом Паули), предельная эффективность схемы достигала бы  $100\%$ . Идея телепортации состояния двухуровневой системы допускает обобщение на более сложные системы [60, 75–79]; возможна "пересадка" информации с поля на атомы и обратно (ср. (5.1.1), (5.1.2)). Ожидается, что эти возможности могут найти применения в квантовых компьютерах и в криптографии.

Возможны две основные интерпретации рассмотренного эффекта.

1. Обычно эффект трехфотонной интерференции и телепортации объясняется в терминах частичной редукции ВФ поля при наблюдении: регистрация отсчетов в двух детекторах  $D_A$  и  $D_B$  вызывает мгновенную редукцию трехфотонного состояния к однофотонному:  $|\psi'\rangle_{ABC} \rightarrow |\psi\rangle_C$ . Поле или детекторы в пучке  $C$  мгновенно [80] "узнают" об этом за счет неизвестных сверхсветовых взаимодействий, поэтому эффект считается проявлением "квантовой нелокальности". При этом полагают, что математической процедуре (5.9.3) — проецированию  $|\psi'\rangle$  на  $\langle Ay, Ax|$  (предписываемой постулатом Борна) — соответствует реальное событие, вызванное регистрацией фотонов в детекторах  $D_{Ay}$  и  $D_{Bx}$ . Необходимость затвора или схемы совпадений игнорируется.

Однако при использовании схемы совпадений детекторы в пучках  $A$ ,  $B$  и  $C$  равноправны: с таким же правом можно полагать, что редукция происходит сначала в детекторах  $D_{Cj}$  (при отсутствии модуляторов  $M$  и  $T'_C$ ). Ни эксперимент, ни теория не дают в настоящее время оснований для гипотезы о мгновенной редукции. Ее трудно совместить со специальной теорией относительности — ведь детекторы могут располагаться на любом удалении вдоль пучков. Как показано в Приложении II, эффект копирования полностью описывается стандартным формализмом с использованием борновских корреляционных функций (4.7.16), т.е. представление о мгновенной редукции как причине эффекта является избыточным, это лишь возможная его интерпретация.

2. В рамках "минимальной" интерпретации эффект можно рассматривать как проявление специфической корреляции между тремя пучками света. Конечно, все наблюдаемые события не нарушают требования специальной теории относительности. Переносчиком информации  $(\alpha, \beta)_A$  от входа к выходу оптической схемы можно по выбору полагать или ВФ поля ( $\psi \rightarrow \psi'$ , представление Шрёдингера), или операторы поля ( $a \rightarrow a'$ , представление Гейзенберга), как и в случае одного поляризованного фотона. Если не использовать модуляторы  $T'_C$  и  $M$ , то последовательность регистрации событий во времени в трех детекторах роли не играет, поскольку они разделены пространственно-подобными интервалами (см. раздел 4.8). Разделение события, — появление отсчетов в трех детекторах на два этапа: сначала появление двух отсчетов вызывает редукцию ВФ, которая затем влияет на поведение третьего детектора, — не оправдано ни последовательной теорией, ни экспериментом. Вместо

введения *ad hoc* "нелокальности" более последовательно примириться с неколмогоровостью квантовой теории, с отказом от априорных значений (см. разделы 4.5, 5.6–5.8). При использовании модуляторов речь идет о приготовлении состояния фотона в пучке С.

Эффект копирования поляризации  $\mathbf{e}_A \rightarrow \mathbf{e}_C$  в простейшем варианте имеет наглядное (но не строгое) объяснение (см. рис. 5). Это объяснение является прямым следствием двух известных эффектов — антикорреляции интенсивностей в выходных пучках светоделителя  $A'$  и  $B'$  и антикорреляции поляризаций фотонов в исходных пучках В и С (раздел 5.5). Для наглядности предположим, что все три фотона А, В и С имеют какие-то априорные поляризации  $\mathbf{e}_Z$  и соответствующие им векторы Стокса  $\mathbf{S}_Z$ , которые случайным образом изменяются от испытания к испытанию. При этом свойство (5.5.2) можно интерпретировать как антикорреляцию векторов Стокса,  $\mathbf{S}_A = -\mathbf{S}_B$ , или ортогональность векторов поляризации,  $\mathbf{e}_B \perp \mathbf{e}_C$  (см. раздел 5.5). Выберем базис, в котором  $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_A$ , и примем, что в соответствии с (5.9.2) имеются только две равновероятные возможности:  $\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_C = \mathbf{e}_y$  или  $\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_C = \mathbf{e}_x$ . Но в первом случае, когда  $\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_A$ , должен наблюдаться эффект антикорреляции отсчетов в детекторах  $D_A$  и  $D_B$ : оба фотона могут обнаруживаться только вместе — оба в  $D_A$  или в  $D_B$  (это так называемый эффект двухфотонной интерференции или антикорреляции интенсивностей на выходе светоделителя, см. [37]). Следовательно, при наблюдении отсчетов в обоих детекторах  $D_A$  и  $D_B$  имеет место последний случай, т.е.  $\mathbf{e}_C = \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_A$  (см. жирные линии на рис. 5).

Это объяснение позволяет указать на аналогичный классический метод копирования поляризации с одного пучка света на другой без ее измерения. Пусть имеются три идеальных лазера А, В, С, дающих поляризованные пучки света, причем в лазерах А и В интенсивности  $I_0$  и частоты  $\omega_0$  одинаковы. В пучки В и С помещены преобразователи поляризации, управляемые общим генератором случайных чисел, причем так, что всегда имеет место ортогональность:  $\mathbf{e}_B(t) \perp \mathbf{e}_C(t)$  (см. раздел 5.5). В результате любая поляризация пучков В и С равновероятна, но их векторы Стокса имеют обратные направления,  $\mathbf{S}_B = -\mathbf{S}_C$ .

Пусть далее пучки А и В смешиваются на светоделителе, и интенсивности света  $I'_A(t)$  и  $I'_B(t)$  в выходных пучках  $A'$  и  $B'$  контролируются двумя аналоговыми детекторами. Из-за флуктуаций вектора  $\mathbf{e}_B(t)$  интенсивности  $I'_A(t)$  и  $I'_B(t)$  также флуктуируют, причем всегда в противофазе, так как их суммарная интенсивность сохраняется,  $I'_A(t) + I'_B(t) = 2I_0$ . В моменты времени, когда  $I_A(t) = I_B(t)$  (с некоторой заданной неточностью  $\Delta I/I_0$ ), пучки на входе светоделителя не интерферируют, следовательно, их поляризации ортогональны,  $\mathbf{e}_A \perp \mathbf{e}_B$ . Но при этом также и  $\mathbf{e}_B \perp \mathbf{e}_C$ , так что  $\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_C$ . В эти моменты автоматически открывается затвор, перекрывающий пучок С в остальное время. В результате получаем импульсы света (со случайными интервалами и длительностью) с частотой  $\omega_C$  и поляризацией  $\mathbf{e}_A$ .

Принципиальным отличием этой модели от квантовой является ограниченная точность копирования, обратно пропорциональная  $\Delta I$  и относительному времени открытия затвора (т.е. эффективности). В квантовом варианте копирование в идеальном случае является точным.

## 6. Частица в одном измерении

В разделе 5.2 рассматривался пример приготовления *внутренних* степеней свободы атома, помещенного в ловушку, в определенном состоянии с помощью охлаждения и резонансного лазерного импульса. Охлаждение атома в ловушке приготавливает также и его *внешние*, кинетические степени свободы в определенном (основном) стационарном состоянии  $\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  с некоторой формой и характерной шириной пакета  $a_0$ , определяемыми формой потенциала ловушки  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ . Здесь  $\mathbf{r}_0$  — классическая координата центра ловушки. Быстро убрав удерживающий потенциал в момент  $t_0$ , мы приготавливаем свободную частицу в состоянии  $\psi(\mathbf{r}, t_0) = \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  с определенной локализованной формой пакета, известным моментом приготовления  $t_0$  и областью локализации  $\mathbf{r}_0 \pm a_0$ . Состояние перестает быть стационарным и пакет начинает "расплываться". Средняя энергия  $E$  и импульс частицы равны нулю, но с помощью классических полей (гравитационного, электрического, оптического) их можно увеличить. Подчеркнем еще раз, что никакое *измерение* над квантовой системой в описанном процессе не производится: на частицу (или, если угодно, на ее ВФ) воздействуют, но ее обратное действие на аппаратуру не регистрируется. Измеряются (посредством сравнения с эталонами) лишь численные значения классических параметров приготавительной аппаратуры  $\mathbf{r}_0, t_0, V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ .

Другой пример: приложенный к металлу короткий импульс поля с  $E = 1$  кэВ вызывает холодную эмиссию электронов с относительно хорошо определенной энергией. Дополнительная пространственная фильтрация и фильтрация по скорости позволяют приготавливать достаточно хорошо определенные (но смешанные) состояния свободных частиц.

### 6.1. Измерение координаты или импульса

Как реально в лаборатории наблюдаются сигналы из микромира? Для обнаружения одиночных частиц используются сцинтилляторы, фотоэмульсии, камеры Вильсона, счетчики Гейгера, ионизационные детекторы атомов, фотоумножители (ФЭУ) и подобные им устройства. Общим для всех этих приборов является, по видимому, акт передачи кванта энергии от налетающей частицы атомам детектора и последующий усилительный, взрывной процесс, приводящий к макроскопическому событию [4] — появлению капли в перегретом паре за счет термодинамической неустойчивости или лавины электронов в ФЭУ за счет ускоряющего поля. Представляется разумным поместить границу между квантовой и классической частями экспериментальной установки (раздел 4.1) после некоторого "затравочного" атома в детекторе и объявить "более наблюдаемым" оператором энергию этого атома, т.е. полагать, что регистрируемое макрособытие первоначально вызывается возбуждением или ионизацией одного из атомов детектора. По этой схеме построена известная модель детектора оптических фотонов Глаубера [20], которая успешно используется в квантовой оптике.

В некоторых приборах регистрируется только пространственная координата  $\mathbf{r}_1$  или последовательность координат (трек) макроскопических объектов — капелек, частиц серебра и т.д. В приборах с хорошим временным разрешением фиксируется также и момент

регистрации частицы  $t_1$  в виде короткого электрического импульса. Таким образом, можно принять, что реально регистрируются лишь некоторые события  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  в пространстве–времени. Эти события, которые измеряются макроскопическими линейками и часами, принимаются за координаты изучаемой частицы (конечно, любые измерения непрерывных параметров имеют конечную "аппаратную" точность, которую следует отличать от квантовой неопределенности, имеющей принципиальное значение). Далее, исходя из теоретических моделей, эти координаты используются для косвенного определения других параметров частицы — энергии, импульса, спина и т.д. (см. рис. 1).

Рассмотрим, следуя Глауберу [20], модель процесса детектирования заряженной частицы, например, электрона. Пусть массивный атом–детектор расположен в фиксированной точке  $x_1$ . Большая масса атома–детектора позволяет рассматривать координату его центра тяжести  $x_1$  как  $c$ -число. Предположим, что частица приготавливается в некотором чистом исходном состоянии  $\langle x|\psi_0\rangle = \psi(x, t_0)$ , где  $t_0$  — характерный момент времени приготовительной процедуры. Атом–детектор находится в основном состоянии  $|g\rangle$  и общее состояние системы (частица + атом) имеет факторизованный вид  $|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle|g\rangle$ . Отсчет времени в каждом испытании ведется заново от момента  $t_0 \equiv 0$ . Наблюдаемым ("крайним", см. раздел 4.1) оператором выбираем оператор проектирования на возбужденный уровень атома–детектора  $P_1(e) \equiv |e\rangle\langle e|$ . В соответствии с постулатом Борна (4.7.1) принимаем, что этот оператор в представлении Гейзенберга, усредненный с помощью начальной ВФ, определяет вероятность события: "Атом в точке  $x_1$  в момент времени  $t_1$  находится на возбужденном уровне"

$$p_1(e, t_1) \equiv \langle \Psi_0 | P_1(e, t_1) | \Psi_0 \rangle. \quad (6.1.1)$$

Эту функцию нетрудно вычислить в первом приближении теории возмущений по энергии взаимодействия частицы и атома  $V_1$  (см. [58]). Далее предположим, что имеется много уровней (или много атомов) с различными частотами перехода  $\omega_e$ , и проинтегрируем вероятность  $p_1(e, t_1)$  по частоте перехода  $\omega_e$  в приближении бесконечно большой полосы частот  $\Delta\omega_e$ . Эта классическая процедура суммирования вероятностей описывает широкополосный детектор, дающий мгновенный отклик, и неявно основывается на существовании процессов релаксации.

Удобно ввести дифференциальную вероятность возбуждения детектора в единицу времени (скорость перехода)  $w \equiv dp/dt$ . Скорость возбуждения детектора, расположенного в точке  $x_1$ , пролетающей частицей принимает вид

$$\begin{aligned} w(x_1, t_1) &= \eta_1 \langle \psi_0 | V_1^2(X, t_1) | \psi_0 \rangle = \\ &= \eta_1 \int dx |\psi(x, t_1) V_1(x)|^2. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Здесь параметр  $\eta_1$  характеризует эффективность детектора,  $V_1(x)$  — потенциал взаимодействия между частицей и атомом, имеющий максимум или минимум в точке  $x = x_1$ . Этот потенциал играет роль "аппаратной" функции, определяющей неточность измерения  $\Delta x = a_1$  ( $a_1$  — ширина функции  $V_1(x)$ ).

Отметим, что выражение (6.1.2) можно было бы получить сразу, положив в формуле  $w = \langle \psi_0 | P_1 | \psi_0 \rangle$  (ср. с

(6.1.1)) наблюдаемым оператором интеграл

$$P_1 \equiv \sqrt{\eta_1} \int dx V_1(x) |x\rangle\langle x|$$

— взвешенную сумму элементарных проекторов  $|x\rangle\langle x|$ . Однако этот выбор требует обоснования, которое и дается проведенным расчетом.

В пределе  $a_1 \ll a_0$ , где  $a_0$  — ширина исходного пакета  $\psi(x, t_0)$ , можно полагать  $V_1^2(x) = \delta(x - x_1)$  (несущественные константы включаем в эффективность  $\eta_1$ ), так что (6.1.2) принимает вид

$$w(x_1, t_1) = \eta_1 |\psi(x_1, t_1)|^2. \quad (6.1.3)$$

Мы убедились, что модуль ВФ  $|\psi|$  ("оггибающая" волнового пакета) может быть, в принципе, измерен, т.е. он является операционально определенной величиной.

Выражение (6.1.3) напоминает постулат Борна о вероятностном смысле ВФ, однако здесь оно было получено из формулы (6.1.1), причем аргументы  $x_1, t_1$  играют роль непосредственно измеримых классических параметров квантовой теории. Подчеркнем, что  $t_1 \equiv t'_1 - t_0$  — аргумент функции распределения (которая определяется обработкой множества экспериментальных данных), а не произвольно выбираемое экспериментатором время измерения, как это обычно предполагается в квантовой теории. В отдельном  $i$ -м испытании момент появления импульса на выходе детектора  $t_i$  является непредсказуемой величиной — в пределах длительности волнового пакета частицы  $\Delta t_0 = a_0/v_0$ .

В реальном эксперименте оператор координаты частицы  $X$  невозможно измерить непосредственно, положение частицы всегда отождествляется с классической координатой  $x_1$  массивного неподвижного детектора (кристаллика серебра в фотоэмульсии, капельки воды в перегретом паре и т.д.) с некоторой неопределенностью  $\pm a_1$ . Естественно, регистрация факта возбуждения атома позволяет приписать пролетающей частице координату  $x_1 \pm a_1$  в момент появления импульса  $t_1 \pm \tau$  ( $\tau$  — постоянная времени детектора, которая в нашей модели принята равной нулю). Рассмотренная процедура соединяет символы математической модели  $X(t)$  или  $\psi(x, t)$  с нашим "реальным" пространством–временем  $(x_1, t_1)$ , измеряемым с помощью линеек и часов.

Рассмотрим теперь простейшую модель измерения распределения продольного импульса заряженной частицы  $p = mv \equiv \hbar k$ . Пусть перед описанным выше детектором располагается область с постоянным магнитным полем  $H_0$ , которое искривляет траекторию частицы. Частица движется по окружности с радиусом  $r = cp/eH_0$ . Измерение поперечной координаты детектора дает  $r$  и позволяет рассчитать  $p$  и  $k = p/\hbar$ . Повторяя эксперимент много раз, можно измерить распределение  $w(k)$ , среднее значение  $k_0$  и неопределенность  $\Delta k$ . Полагая измерение параметров точным, можно сразу принять наблюдаемым оператором проектор  $P_k = |k\rangle\langle k|$ ; тогда из постулата Борна получаем  $w(k) = \langle \psi_0 | P_k | \psi_0 \rangle = |\langle k | \psi_0 \rangle|^2 = |\psi(k, t_0)|^2$ . Так как импульс при свободном движении сохраняется, то векторы  $|k\rangle$  изменяются только по фазе, и момент измерения не имеет значения.

## 6.2. Время-пролетный эксперимент

Возможен альтернативный метод измерения скорости, когда частица с достаточно большой энергией последо-

вательно пролетает через два быстродействующих детектора, например, два счетчика Гейгера (рис. 6а). При этом учитываются лишь испытания, в которых срабатывают оба детектора (метод совпадений). В результате можно измерить совместное распределение для двух событий  $p_{12} \equiv p(x_1, t_1; x_2, t_2)$  (рис. 6б). Эта схема описывает широко используемый *время-пролетный* метод измерения скорости частиц. Расстояние между детекторами  $x_2 - x_1 \equiv L$ , деленное на задержку во времени появления импульса на выходе второго детектора  $t_2 - t_1 \equiv T$ , дает априорную групповую скорость перемещения волнового пакета частицы  $v_0 = L/T$  (потеря энергии в первом детекторе не учитывается). Пусть частица каждый раз готовится в чистом состоянии с достаточно хорошо

определенным импульсом, так что она описывается протяженным волновым пакетом. В результате моменты регистрации  $t_1, t_2$ , отсчитываемые от характерного подготовительного момента  $t_0 \equiv 0$ , а также задержка  $T$  будут флуктуировать. При многократном повторении процедуры можно измерить распределение  $p_{12}$ .

Как показано в разделе 4.9, стандартные алгоритмы квантовой теории непригодны для расчета  $p_{12}$ . Дело в том, что гейзенберговские операторы  $P_1(t_1)$  и  $P_2(t_2)$ , описывающие отклик двух детекторов в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , не коммутируют из-за взаимодействия детекторов с пролетающей частицей. Единственным способом количественного расчета вероятности  $p_{12}$  в случае время-пролетных экспериментов представляется использование формулы Вигнера (4.9.1) с дополнительным предположением, что в ней моменты  $t_n$  являются случайными (в квантовой теории измерения полагается, что моменты измерения с последующей редукцией выбираются экспериментатором произвольно).

Расчет с помощью описанной выше модели широкополосного детектора во втором приближении теории возмущения [58] дает для дифференциальной вероятности (скорости перехода)  $w_{12} \equiv \partial^2 p_{12} / \partial t_1 \partial t_2$  следующее выражение (ср. (6.1.2)):

$$w_{12} = \eta_1 \eta_2 \langle \psi_0 | V_1(X, t_1) V_2^2(X, t_2) V_1(X, t_1) | \psi_0 \rangle. \quad (6.2.1)$$

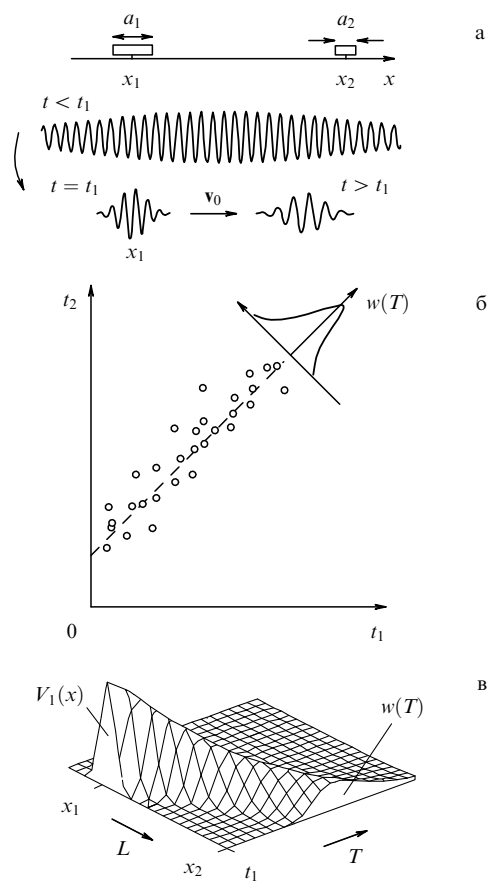
Здесь  $V_n$  — потенциалы взаимодействия между частицей и детекторами,  $\eta_n$  — эффективности детекторов. Поскольку регистрируются лишь совпадения, то взаимодействие частицы и детекторов, характеризуемое произведением  $\eta_n V_n$ , можно считать малым.

Пусть частица готовится в состоянии с определенным импульсом  $mv_0$ , и потенциалы  $V_n(x)$  имеют гауссову форму с шириной  $a_n$ , причем  $a_2 \ll a_1$ , тогда (6.2.1) принимает вид

$$w_{12} \equiv w(T) = \frac{\eta_1 \eta_2}{\sqrt{1 + (T/T_a)^2}} \exp \left\{ -\frac{(L - v_0 T)^2}{2a_1^2 [1 + (T/T_a)^2]} \right\}. \quad (6.2.2)$$

Здесь  $T \equiv t_2 - t_1 > 0$ ,  $L \equiv x_2 - x_1$  и  $T_a \equiv ma_1^2/\hbar$  — характерное время расплывания пакета. Наблюдаемые моменты отсчетов  $t_{1i}, t_{2i}$  распределены равномерно по оси времени, но задержка между ними имеет распределение (6.2.2) с максимумом при  $T = L/v_0$ . Формула (6.2.2) описывает отображение гауссовой функции  $V_1(x)$  на наблюдаемое распределение интервалов  $w(T)$  (рис. 6в).

Это распределение можно наглядно интерпретировать так: исходный протяженный волновой пакет в момент  $t_1$  как бы обрезается до размеров первого детектора  $a_1$ :  $\exp(ik_0 x) \rightarrow \psi_{\text{eff}}(x) = V_1(x) \exp(ik_0 x)$  (рис. 6а). Это так называемое *обратное действие* детектора на частицу в результате их взаимодействия [18, 19]. Мы получили операциональное определение этого термина. При  $t > t_1$  центр эффективного волнового пакета  $\psi_{\text{eff}}(x, t)$  движется с групповой скоростью  $v_0$ . В ближней зоне ( $L \ll k_0 a_1^2 = v_0 T_a$ ) он сохраняет форму огибающей  $V_1(x)$ , но в дальней зоне (при обратном неравенстве) уширяется пропорционально  $L/a_1$ . Второй точечный детектор позволяет наблюдать огибающую  $|\psi_{\text{eff}}(x)|$  (см. (6.1.3)). Конечно, это лишь удобная наглядная интерпретация результатов расчета, а не картина того, что происходит "на самом деле".



**Рис. 6.** Время-пролетный эксперимент. (а) Схема и интерпретация эксперимента. Частица с определенным импульсом пролетает мимо двух детекторов (прямоугольники) с размерами  $a_1$  и  $a_2 \ll a_1$  в точках  $x_1$  и  $x_2 = x_1 + L$ . Согласно (6.2.2) исходная волновая функция частицы, имеющая вид длинной синусоиды, в момент регистрации  $t_1$  как бы стягивается в короткий волновой пакет протяженностью  $a_1$ , который далее движется ко второму детектору с групповой скоростью  $v_0$ , постепенно расплываясь. (б) Результаты эксперимента. Точки с координатами  $(t_{1i}, t_{2i})$  соответствуют моментам срабатывания двух детекторов в  $i$ -м испытании. Частица готовится в состоянии с определенным импульсом, поэтому момент  $t_{1i}$  может быть любым. Второй точечный детектор регистрирует частицу в случайный момент  $t_{2i} > t_{1i}$ . Пунктирная прямая — график линейной регрессии, определяющий значение групповой скорости  $v_0$ . Справа вверху — измеренное распределение времен задержки  $w(T)$ , где  $T \equiv t_2 - t_1$ . (в) Наблюдаемое распределение задержки  $w(T)$  определяется формой потенциала  $V_1(x)$  первого детектора в соответствии с законом распространения волновой функции свободной частицы так, как будто в момент  $t_1$  произошла редукция ВФ:  $\exp(ik_0 x) \rightarrow V_1(x) \exp(ik_0 x)$ .

Подчеркнем, что здесь момент "редукции"  $t_1$  — аргумент функции распределения, а не фактические моменты регистрации  $t_{1i}$ , которые флуктуируют от испытания к испытанию (рис. 6б). Это обстоятельство имеет, по-видимому, принципиальное значение. Согласно традиционной точке зрения редукция  $\psi \rightarrow \psi'$  происходит в каждом испытании в момент  $t_{1i}$ , в то время как использованная при выводе (6.2.2) формула (4.9.1) соответствует редукции в некоторый абстрактный момент  $t_1$ , не имеющий смысла времени наступления какого-либо реального события.

Описанный эксперимент позволяет, в принципе, непосредственно наблюдать как проявление проекционного постулата, так и распывание волнового пакета в результате дисперсии вакуума  $\omega \sim k^2$ .

### 6.3. Соотношения неопределенностей и эксперимент

Рассмотрим операциональный смысл соотношения неопределенностей. Можно выделить два класса экспериментов, в которых можно наблюдать его проявление. (Обсуждение других возможностей см. в [88].)

В первом классе проводятся две серии экспериментов. Например, пусть в первой серии измеряется координата частицы  $X$  и из полученного набора чисел  $x_i$  вычисляется квантовая неопределенность  $\Delta x$ , задаваемая ее ВФ; во второй измеряется импульс частицы  $P$  и вычисляется его неопределенность  $\Delta p$  (измерения полагаем идеальными). Модели таких измерений были описаны в разделах 6.1 и 6.2. В результате измеренные неопределенности должны удовлетворять неравенству  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ . Это пример непосредственного проявления соотношения неопределенностей в эксперименте. В качестве критерия *непосредственности* можно принять возможность получения из измеренного набора чисел верхней границы для постоянной Планка (этому критерию не всегда удовлетворяют обычные примеры в учебниках).

В экспериментах второго класса в *каждом* испытании сначала измеряется  $X$ , а потом  $P$ . Для количественного описания таких экспериментов, необходимо, по-видимому, использовать, как и выше, формулу Вигнера (4.9.1). Первый детектор обнаруживает частицу в области  $x_1 \pm a_1$ , а после этого второй детектор (или набор детекторов со всевозможными поперечными координатами), расположенный за областью с магнитным полем, измеряет ее продольный импульс  $P = \hbar k$ . Будем регистрировать лишь двойные события (совпадения), когда оба детектора сработали. Наблюдая большое число таких совпадений при одинаково приготовленных частицах и различных  $x_1$ , можно измерить распределение  $w(x_1, k)$ .

Измерение импульса будем, как и выше, полагать точным, так что оно описывается проектором  $P_2 = |k\rangle\langle k|$ . Момент второго измерения не имеет значения; подчеркнем, однако, что речь идет о одновременном измерении координаты и импульса — практически единственно возможном. Для простоты пусть  $t_1 = t_0$  и  $\eta = 1$ . С помощью (4.9.1) находим зависимость вероятности совпадения от параметров приборов  $x_1$  и  $k$ :

$$w(x_1, k) = \langle \psi_0 | P_1 P_2 P_1 | \psi_0 \rangle = (2\pi)^{-1} \left| \int dx V_1(x) \psi_0(x) \exp(-ikx) \right|^2. \quad (6.3.1)$$

Этот результат опять можно интерпретировать как проявление обратного действия — для учета взаимодействия частицы с первым детектором ее начальная ВФ умножается на потенциал взаимодействия:

$$\psi_0(x) \rightarrow \psi_{\text{эф}}(x, t_1) = V_1(x) \psi_0(x).$$

Заметим, что обратная последовательность измерений во времени даст совсем другой результат, а именно начальное распределение импульса:

$$\langle \psi_0 | P_2 P_1 P_2 | \psi_0 \rangle \propto |\langle k | \psi_0 \rangle|^2 = w(k, t_0).$$

Второе измерение (координаты) здесь не имеет значения.

Пусть частица готовится в состоянии с определенным импульсом  $\hbar k_0$ , т.е.  $|\psi_0\rangle = |k_0\rangle$  или

$$\psi_0(x) \equiv \langle x | \psi_0 \rangle = (2\pi)^{-1/2} \exp(ik_0 x).$$

При этом (6.3.1) принимает вид

$$w(x_1, k) \propto \left| \int dx V_1(x) \exp[i(k_0 - k)x] \right|^2. \quad (6.3.2)$$

Теперь наблюдаемое в корреляционном эксперименте распределение импульса определяется фурье-образом аппаратной функции измерителя координаты  $V_1(x)$ ; оно имеет ширину порядка  $1/a_1$ , и его неопределенность удовлетворяет фурье-соотношению  $a_1 \Delta k \geq 1/2$ . Здесь проявляется важный операциональный аспект соотношения неопределенностей — так называемое *вмешательство прибора*, которое ограничивает произведение точностей последовательных измерений некоммутирующих наблюдаемых. Первое измерение с точностью  $\Delta x = a_1$  ограничивает точность второго измерения величиной  $\Delta k_{\min} = 1/2\Delta x$ . Отметим, что здесь  $\Delta x$  и  $\Delta k_{\min}$  уже не имеют отношения к дисперсиям наблюдаемых в начальном состоянии  $\psi_0$ , как в экспериментах первого класса.

### 6.4. Распределение Вигнера

Рассмотренные выше эксперименты с одним или двумя детекторами допускают, казалось бы, тривиальное наглядное описание в терминах отбора классических подансамблей частиц. Предположим, что ВФ  $\psi_0$  "на самом деле" лишь описывает статистику ансамбля классических частиц, имеющих некоторый разброс начальных координат и скоростей. Эффективная ВФ  $\psi_{\text{эф}}$  в теории время-пролетного эксперимента есть просто результат *отбора* первым детектором некоторых частиц со скоростями, определяемыми его положением  $x_1$  и моментом регистрации  $t_1$ . При такой интерпретации потребность в проекционном постулате или таинственном процессе редукции не возникает. Однако реализация этой программы сталкивается с затруднениями принципиального характера (даже если не рассматривать возможные эффекты интерференции частиц).

С классической точки зрения имеется лишь одно состояние точечной классической частицы, которое задается ее координатой  $x_t$  и импульсом  $p_t = mv_t$  в данный момент времени. Пространство событий (*фазовое пространство*) составляет плоскость  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $x$  и  $p$ . Функция распределения имеет вид

$$w(x, p, t) = \delta(x - x_t) \delta(p - p_t).$$

Эволюция состояния во времени определяется уравнениями Гамильтона:

$$\dot{x} = \frac{dH}{dp}, \quad \dot{p} = -\frac{dH}{dx}, \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

В отсутствие внешних сил потенциал  $V(x) = 0$ , так что

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \quad p(t) = p_0, \\ w(x, p, t) = \delta(x - x_0 - v_0 t) \delta(p - p_0)$$

(здесь  $v_0 \equiv p_0/m$ ).

Чтобы ввести в модель случайность, рассмотрим множество одинаковых независимых частиц, отличающихся случайными начальными параметрами  $x_{0i}, p_{0i}$  ( $i$  — номер частицы). На фазовой плоскости отобразится множество точек. Плотность распределения  $w(x, p, t)$  пропорциональна числу точек в малой области около  $x, p$ . Пространство состояний — это множество всевозможных функций распределения  $w(x, p, t)$ , удовлетворяющих условиям

$$\int dx dp w(x, p, t) = 1, \quad w(x, p, t) \geq 0.$$

Функция  $w(x, p, t)$  позволяет вычислить моменты  $\langle x^m p^n \rangle$  и, вообще, среднее значение  $\langle A(x, p, t) \rangle$  любой функции  $x$  и  $t$ . Маргинальные распределения для координаты и импульса имеют вид

$$w(x, t) = \int dp w(x, p, t), \quad w(p, t) = \int dx w(x, p, t). \quad (6.4.1)$$

В случае свободного движения частиц импульсы сохраняются,  $w(p) = \text{const}$ , поэтому зависимость состояния от времени учитывается тривиальной заменой аргумента:

$$w(x, p, t) = w\left(x - \frac{pt}{m}, p, 0\right). \quad (6.4.2)$$

В дифференциальной форме получаем уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \left(v = \frac{p}{m}\right).$$

Это преобразование описывает классическое расплывание пакетов (см. рис. 7) (которое следует отличать от истинной "дифракции во времени" — изменения формы огибающей ВФ в результате дисперсии вакуума для нерелятивистских частиц). Конечно, в обоих случаях — классическом и квантовом — при определенных начальных условиях расплыванию, делокализации может предшествовать локализация, "фокусировка" пакета.

Перейдем теперь к квантовой теории, где чистое состояние частицы определяется некоторой комплексной функцией  $\psi(x)$ , которая определяет распределение вероятности для координаты,  $w(x) \equiv |\psi(x)|^2$ , средние значения  $\langle (x) \rangle$ , а также моменты

$$\mu_{m0} \equiv \langle x^m \rangle \equiv \langle \psi | x^m | \psi \rangle = \int dx w(x) x^m.$$

Фурье-сопряженная функция определяет вероятности для импульса  $|\psi(p)|^2 \equiv w(p)$  и моменты  $\mu_{0n} \equiv \langle p^n \rangle$ . Совместное распределение  $w(x, p, t) \geq 0$  для одного момента времени в общем случае ни измерить, ни вычислить нельзя. В то же время моменты вида  $\mu_{mn} \equiv$

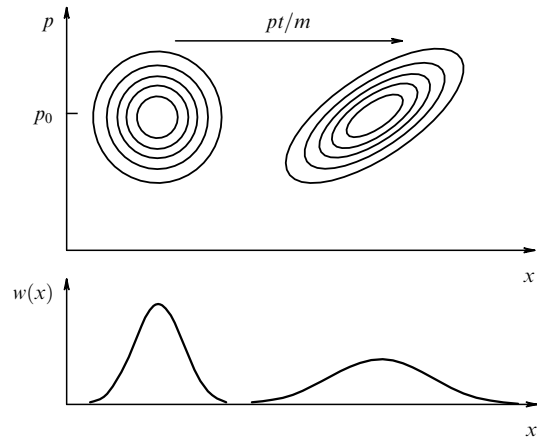


Рис. 7. Функция распределения координаты и импульса  $w(x, p)$  в два момента времени (вверху) и результирующее расплывание распределения  $w(x)$  по координате со временем (внизу).

$\equiv \langle x^m p^n \rangle \equiv \langle \psi | x^m p^n | \psi \rangle$  вычислить можно и естественно попытаться определить соответствующую функцию  $w(x, p)$ , обладающую свойством

$$\mu_{mn} = \int dx dp w(x, p) x^m p^n$$

(это так называемая проблема моментов, раздел 4.5). При этом можно было бы полагать, что координата и импульс имеют определенные априорные значения для данной частицы. Однако такой подход встречает два принципиальных препятствия: в квантовой теории моменты  $\langle x^m p^n \rangle, \langle x^{m-1} p^n x \rangle, \dots, \langle p^n x^m \rangle$  различны, и функция  $w(x, p)$  может принимать отрицательные значения, так что она не может иметь смысл вероятности.

Первое препятствие устраняется выбором определенного порядка написания операторов. Например, функция Вигнера  $W(x, p, t)$ , которая определяет симметризованные по определенному правилу моменты (см. [89, 90]), выражается через ВФ с помощью следующего нелинейного интегрального преобразования

$$W(x, p, t) \equiv (2\pi\hbar)^{-1} \int dy \exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right) \psi^*\left(x + \frac{y}{2}, t\right) \times \\ \times \psi\left(x - \frac{y}{2}, t\right). \quad (6.4.3)$$

При фиксированном  $t$  это преобразование определяет функцию двух переменных  $W(x, p)$  через функцию одной переменной  $\psi(x)$ . Вычисляя маргиналы, легко проверить, что выполняются условия согласования:

$$w(x, t) \equiv \int dp W(x, p, t) = |\psi(x, t)|^2, \\ w(p, t) \equiv \int dx W(x, p, t) = |\psi(p, t)|^2. \quad (6.4.4)$$

Из (6.4.3) и уравнения Шрёдингера следует уравнение движения для  $W$  — квантовое уравнение Лиувилля [89, 90]. При свободном движении оно имеет "классический" вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{p}{m},$$



т.е. происходит преобразование аргумента  $x \rightarrow x_t \equiv x - pt/m$ . Таким образом, функция Вигнера  $W$  для свободной частицы зависит от времени так же, как и классическая функция распределения  $w$  (см. (6.4.2) и рис. 7).

Рассмотрим, например, гауссов пакет

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a_0 + i\hbar t/ma_0}} \times \\ &\times \exp \left[ ik_0 x - i\omega_0 t - \frac{(x - v_0 t)^2}{2(a_0^2 + i\hbar t/m)} \right], \\ |\psi(x, t)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi} a_t} \exp \left[ -\frac{(x - v_0 t)^2}{a_t^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_0 &\equiv \frac{p_0}{\hbar}, \quad \omega_0 \equiv \frac{\hbar k_0^2}{2m}, \quad v_0 \equiv \frac{p_0}{m}, \\ a_t &\equiv a_0 \left( 1 + \frac{t^2}{T_a^2} \right)^{1/2}, \quad T_a = \frac{ma_0^2}{\hbar} \end{aligned}$$

и  $a_0$  — минимальная ширина пакета при  $t = 0$ . Согласно (6.4.5) огибающая  $|\psi(x, t)|$  сохраняет свою функциональную форму, перемещаясь с групповой скоростью  $v_0 \equiv p_0/m$  и уширяясь с ростом  $|t|$ . Подстановка (6.4.5) в (6.4.3) дает

$$W(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{(x - pt/m)^2}{a_0^2} - \frac{(p - p_0)^2 a_0^2}{\hbar^2} \right]. \quad (6.4.6)$$

Эта функция положительна и ее можно рассматривать как вероятность. При  $t \neq 0$  она описывает корреляцию между координатой и импульсом (см. рис. 7).

Однако для всех остальных чистых состояний функция Вигнера принимает отрицательные значения [89, 90] и изменяет свою форму в процессе распространения. Рассмотрим в качестве примера пакет с прямоугольной огибающей:

$$\psi(x, 0) = \Pi(x, a) \exp(ik_0 x), \quad (6.4.7)$$

где  $\Pi(x, a) \equiv \theta(x+a)\theta(a-x)$  и  $\theta(x)$  — ступенчатая функция. С помощью (6.4.3) и (6.4.7) находим функцию Вигнера:

$$W(x, p, 0) = \Pi(x, a) \frac{\sin[(k - k_0)(a - 2|x|)]}{\pi\hbar a(k - k_0)}, \quad (6.4.8)$$

которая явно принимает отрицательные значения (рис. 8). Таким образом, свойства состояния (6.4.7) нельзя описать с помощью некоторого совместного распределения вероятностей для координаты и импульса.

Заметим, что фактически измеряемая в экспериментах по интерференции частиц *длина когерентности*  $a_{\text{coh}}$  обычно определяется не истинной длиной пакета  $a_t$ , а его "неоднородной длиной", обусловленной смешанным характером состояния частиц в пучке, т.е. классической неопределенностью их скоростей (см. рис. 7) (здесь имеется аналогия с неоднородным уширением спектральных линий). Применение временного разрешения и других приемов позволяет увеличить наблюдаемую

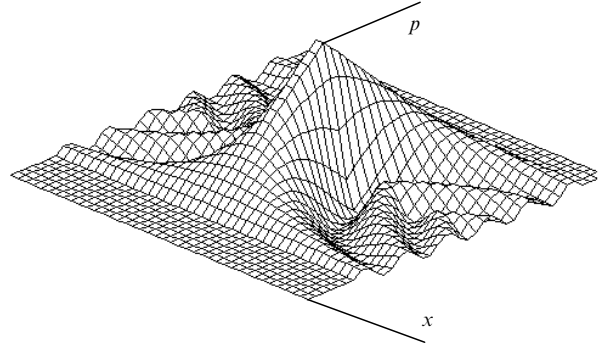


Рис. 8. Функция Вигнера  $W(x, p, 0)$  для волнового пакета с прямоугольной огибающей.

длину когерентности. Для описания реальных экспериментов с пучками частиц надо использовать смешанные состояния (1-го рода, раздел 4.10). В простейшем случае можно полагать, что каждая частица в пучке находится в чистом состоянии, зависящем от классических случайных параметров. Например, пусть таким параметром является  $p_0 = \hbar k_0$  в (6.4.5) или (6.4.7), тогда наблюдаемое "заглаженное" распределение получается дополнительным классическим усреднением по  $w(p_0)$ :

$$w(x, t) = \int dp_0 w(p_0) |\psi(x, t; p_0)|^2. \quad (6.4.9)$$

Здесь  $w(p_0)$  может определяться максвелловским распределением по скоростям с некоторой температурой. Эта формула описывает два процесса: классическое "разбегание" индивидуальных пакетов из-за разброса групповых скоростей  $p_0/m$  (см. рис. 7) и дифракцию во времени — изменение формы каждого пакета из-за дисперсии вакуума.

### 6.5. Модель альфа-распада

Простая одномерная модель дает удивительно успешное описание альфа-распада [91]. Рассмотрим движение точечной частицы при наличии двугорбого потенциала  $V(x)$ , изображенного на рис. 9а. Предположим, что момент образования  $t_0$  данного ядра, например  ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ , известен. В рамках примитивной модели можно полагать, что при этом  $\alpha$ -частица приготавливается в локализованном внутри ядра квазистационарном состоянии  $\psi(x, t_0)$ , определяемом потенциальной ямой  $V(x)$  (рис. 9а). Дальнейшая эволюция ее состояния схематиче-

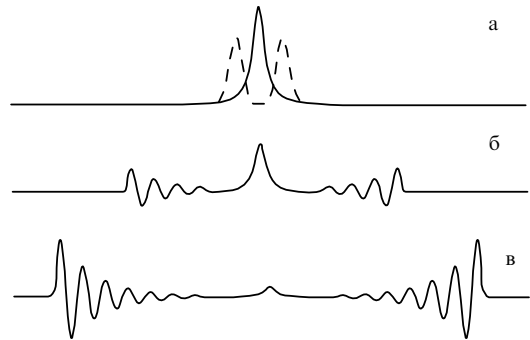


Рис. 9. Эволюция волнового пакета  $\alpha$ -частицы при радиоактивном распаде.

ски изображена на рис. 9б, в. Решение уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

описывает постепенное туннелирование частицы через правый и левый барьеры. Оценка коэффициента прохождения дает связь между скоростью  $\alpha$ -частицы и периодом полураспада  $T_{1/2}$ , качественно согласующуюся с экспериментальными данными [91].

С помощью уравнения Шрёдингера можно рассчитать форму пакета, характеризующего индивидуальную  $\alpha$ -частицу при произвольном  $t > t_0$ . В рамках этой простой модели протяженность пакета при  $t_0 \gg T_{1/2}$  имеет порядок  $a_0 = v_0 T_{1/2}$ . Конечно, проверить эту информацию с разумной уверенностью можно лишь располагая достаточным множеством ядер-близнецов. Но даже для одного конкретного ядра можно предсказать "вероятное" расстояние  $\alpha$ -частицы от ядра в любой момент времени:  $x \approx v_0(t - t_0 \pm T_{1/2})$ .

Рассмотрим комбинацию время-пролетного метода (раздел 6.2) и известных оптических экспериментов по наблюдению *квантовых прыжков*. Один радиоактивный атом помещается в ловушку и освещается резонансным лазерным излучением, возбуждающим один из электронных переходов данного элемента. Атом переизлучает во все стороны часть энергии лазерного света в виде резонансной флюоресценции. Современная техника позволяет регистрировать резонансную флюоресценцию от одного атома, поэтому по прекращению флюоресценции в момент распада (из-за перестройки электронных уровней) можно определить момент вылета  $\alpha$ -частицы  $t_{1i}$ . (Обратно, по возникновению резонансной флюоресценции можно, в принципе, определить момент образования данного ядра.) Пусть счетчик Гейгера, расположенный на расстоянии  $x_2$ , зарегистрировал  $\alpha$ -частицу в момент  $t_{2i}$ . Отсюда находим групповую скорость  $v_{0i} = x_2/(t_{2i} - t_{1i})$ . Наблюдение распределения моментов  $t_{1i}$ ,  $t_{2i}$  при повторных испытаниях позволяет исследовать форму пакета (см. раздел 6.2).

### 6.6. Модуляция волновой функции

Наблюдается целый ряд интересных явлений, связанных с понятием фазы ВФ, например, эффект Джозефсона и квантование магнитного потока в сверхпроводниках. Много тонких эффектов, — эффект Ааронова–Бома для электронов (см. раздел 6.7) и его нейтронные аналоги, эффект Саньяка для нейтронов, влияние гравитационного поля на фазу ВФ медленных нейтронов и атомов, геометрическая фаза Берри, — исследовано с помощью электронных, нейтронных и атомных интерферометров (см. [13–15]). Описание подобных экспериментов основывается на зависимости ВФ частиц от классических квазистационарных полей — электрического, магнитного, гравитационного, инерциального. В случае атомов и молекул добавляется возможность воздействия на ВФ с помощью оптического квазирезонансного поля. Действие такого поля на движение атома как целого можно описывать с помощью некоторого эффективного потенциала  $V(x)$  [35].

Попытаемся использовать возможность *фазовой модуляции* ВФ для обоснования тезиса об индивидуальном характере ВФ — возможности ее отнесения к данной конкретной частице. Рассмотрим двухпучковый интер-

ферометр типа Маха–Цендера для частиц. Интенсивность потока частиц на входе интерферометра устанавливается достаточно малой, так что частицы проходят через интерферометр поодиночке, без взаимного влияния. Разностью фаз  $\phi$  двух компонент ВФ очередной частицы в двух плечах интерферометра можно управлять, например, с помощью электрического или магнитного поля. Видность (контраст) интерференции в реальных интерферометрах частиц — электронов, нейтронов, атомов, молекул — может быть близка к 100%. Это значит, что при определенной фазе  $\phi = \phi_0$  данная частица (почти) наверняка будет направлена на один из выходов интерферометра, а при фазе  $\phi_0 + \pi$  — на другой выход, т.е. амплитуду ВФ в одном из выходных пучков можно по желанию экспериментатора обратить в нуль. В классических терминах данная частица произвольно направляется по тому или иному пути. Таким образом, манипулируя фазовой задержкой, можно управлять ВФ очередной частицы на выходе интерферометра. Подчеркнем, что речь идет о ВФ одной конкретной частицы. Поскольку система готовится в одном из двух собственных состояний интересующей нас наблюдаемой (путь частицы), то исход однозначен ( $p_1 = 0$  или 1) и надобности в повторных испытаниях нет (в идеальном случае).

Рассмотрим теперь промежуточные значения  $\phi$ . При этом частица с вероятностями  $p_1 = \cos^2(\phi - \phi_0)$  и  $p_2 = \sin^2(\phi - \phi_0)$  будет обнаруживаться в первом или втором выходном пучках, т.е. интерферометр действует как полупрозрачное зеркало с пропусканием  $T_1 = p_1$ . Фаза может зависеть от времени,  $\phi = \phi(t)$ ; при этом вероятности  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  также будут изменяться (в противофазе). В радиотехнических терминах можно сказать, что интерферометр преобразует фазовую модуляцию ВФ  $\phi(t)$  в амплитудную модуляцию классических вероятностей на выходе  $p_k(t)$ , т.е. служит фазовым детектором.

Интерферометр совершает унитарное преобразование состояния частицы, сохраняющее нормировку общей двухкомпонентной ВФ. При этом чистое состояние на входе преобразуется в другое чистое состояние на выходе. Подчеркнем, однако, что если рассматривать лишь один выходной пучок (игнорируя второй), то его следует описывать с помощью смешанного состояния (2-го рода, раздел 4.10), в котором одночастичное состояние  $|1\rangle$  и вакуумное состояние  $|0\rangle$  представлены с классическими вероятностями  $p_1$  и  $1 - p_1$ . Таким образом, если второй выходной пучок не включается в рассматриваемую систему, то интерферометр действует как поглотитель с коэффициентом передачи  $\eta = p_1$ .

Возможна ли амплитудная модуляция ВФ в свободном пространстве, без интерферометра, сохраняющая нормировку (т.е. число частиц)? Из изложенного ясно, что влияние поглотителя с коэффициентом прохождения  $\eta$  на пути электрона или нейтрона следует описывать с помощью классических вероятностей, в терминах смешанного состояния: на выходе поглотителя образуется некогерентная смесь состояний  $|1\rangle$  и  $|0\rangle$  с вероятностями  $\eta$  и  $1 - \eta$ , соответственно. Иначе говоря, поглотитель или непрозрачный экран при феноменологическом описании производят неунитарное преобразование состояния частицы (этот вопрос подробно исследовался в квантовой оптике [21]). Обтюратор, периодически перекрывающий пучок частиц, описывается зависящим от вре-

мени поглощением  $\eta(t)$ ; при этом добавляется классическая неопределенность попадания волнового пакета очередной частицы в "окно" обтюлятора. Поглотители модулируют не амплитуду ВФ, а классическую вероятность приготовления одночастичного состояния. С другой стороны, действие (полупрозрачного) зеркального экрана при учете отраженного пучка частиц можно описывать унитарным преобразованием, сохраняющим нормировку ВФ — аналогично рассмотренному случаю с двухпучковым интерферометром.

Рассмотрим фазовую (частотную) модуляцию ВФ частицы в свободном пространстве в одномерном приближении. Зависящая от времени фаза  $\phi(t)$  может привести к наблюдаемым эффектам в отличие от постоянной (глобальной) фазы ВФ. Пусть плоская монохроматическая ВФ с частотой  $\omega_0$  проходит через тонкий фазовый модулятор, установленный в плоскости  $x = 0$ . В случае гармонической модуляции с частотой  $\Omega \ll \omega_0$  и девиацией частоты  $\beta\Omega$  ВФ на выходе модулятора имеет вид

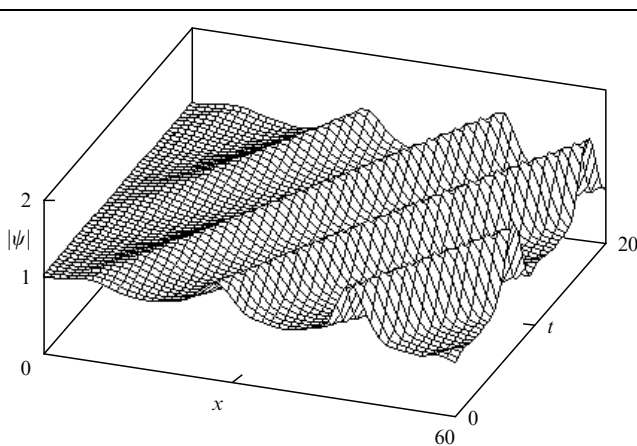
$$\psi(0, t) = \exp[-i\omega_0 t - i\beta \sin(\Omega t)].$$

Отсюда при  $x > 0$  получаем

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(ik_n x - i\omega_n t),$$

$$\omega_n \equiv \omega_0 + n\Omega, \quad k_n \equiv \left(\frac{2m\omega_n}{\hbar}\right)^{1/2} \quad (6.6.1)$$

( $J_n(x)$  — функции Бесселя). Таким образом, гармоническая модуляция фазы приводит к появлению новых частотных компонент  $\omega_0 \pm n\Omega$ . Эти компоненты за счет дисперсии  $\omega \sim k^2$  распространяются с различной скоростью, поэтому к фазовой модуляции ВФ при ее распространении добавляется примесь амплитудной, т.е. возникают медленные биения амплитуды волнового пакета в пространстве — времени (рис. 10). Период биений во времени равен  $\Delta t = 2\pi/\Omega$ , а в пространстве он составляет  $\Delta x \approx 2\pi/(k_1 - k_0) \approx v_0 \Delta t$ , где  $v_0 \equiv \hbar k_0/m$  — групповая скорость.



**Рис. 10.** Преобразование частотной модуляции волновой функции  $\psi(x, t)$  (при  $x = 0$ ) в амплитудную (при  $x > 0$ ) согласно (6.6.1). Частота модуляции  $\Omega = \omega_0/10$ , девиация частоты  $\beta = \Delta\omega/\Omega = 1$ ; координата  $x$  нормирована на  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ , а время  $t$  — на  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Эти биения можно обнаружить с помощью синхронного детектирования. Проявления такого периодического преобразования фазовой модуляции в амплитудную и обратно наблюдались недавно на атомах рубидия [92]; при этом регистрировались эффекты, подобные оптическому эхо [35]. В случае исходных пакетов конечной длины фазовая модуляция позволяет, в принципе, управлять их формой и длительностью — укорачивать или удлинять.

Аналогичное преобразование фазовой модуляции (*chirp*) световых волн в амплитудную и обратно за счет дисперсии широко используется для получения сверхкоротких и сверхмощных лазерных импульсов. В [93, 94] рассматривалась возможность наблюдения ряда схожих эффектов при различных методах модуляции пучка медленных нейтронов.

### 6.7. Квантовые магнитометры и парадокс Ааронова – Бома

Пусть в рассмотренном выше двухпучковом интерферометре для заряженных частиц, например, электронов, имеется источник статического магнитного поля с напряженностью  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  (влияние спина не учитываем). Эквивалентное описание поля дается вектор-потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , определяемом связью  $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Это определение неоднозначно: потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} + \text{grad } \chi$  (где  $\chi(\mathbf{r})$  — произвольное скалярное поле) дают одно и то же поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , поэтому они операционально неотличимы.

Пусть поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  мало изменяется на поперечном сечении ВФ электрона в каждом пучке интерферометра, тогда из уравнения Шрёдингера с гамильтонианом  $(\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c)^2/2m$  следует, что сдвиг фазы каждой из двух компонент ВФ имеет вид криволинейного интеграла:

$$\phi_n = \frac{e}{\hbar c} \int_{C_n} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \quad (6.7.1)$$

где  $C_n$  — путь вдоль траектории электрона в  $n$ -м плече интерферометра от входного расщепляющего зеркала до выходного (под траекторией понимаем путь вдоль оси ограниченного пучка, как и в геометрической оптике). Отсюда находим разность фаз компонент ВФ на выходном зеркале:

$$\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 = \frac{e}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}_C) \, d\mathbf{r}_C = \frac{e}{\hbar c} \iint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} \equiv \frac{e}{\hbar c} \Phi_S. \quad (6.7.2)$$

Эта величина, которая уже не зависит от  $\chi$ , наблюдаема — она определяет вероятности  $p_{1,2}$  обнаружения электрона в двух выходных пучках интерферометра (см. предыдущий раздел). Здесь  $C = C_1 - C_2$  — замкнутый путь вдоль траектории электрона в двух плечах интерферометра,  $S$  — поверхность, ограниченная этим путем,  $\Phi_S$  — поток магнитного поля через эту поверхность.

Таким образом, интерферометр может служить для измерения магнитного потока. Подобный принцип используется в магнитометрах на переходах Джозефсона [95]. Это пример измерения классической величины с помощью квантового эффекта (такие устройства лежат в основе *квантовой метрологии*).

Отметим характерную особенность эффекта —  $\phi$  зависит лишь от интегральной (*глобальной*) характеристики  $\Phi_S$ , определяемой путем  $C$  и полем, и не зависит от

скорости электрона, а различные пути могут давать одинаковую разность фаз. В связи с этим подобные эффекты называют *топологическими* или *геометрическими*.

Согласно (6.7.1) сдвиг фазы на любом незамкнутом пути не определен (поскольку потенциал  $\mathbf{A}$  неоднозначен). Однако можно все же определить набег фазы  $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  в каждой точке  $\mathbf{r}$  некоторого пути относительно фазы в фиксированной точке  $\mathbf{r}_0$ . Для этого надо замкнуть траекторию от  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{r}_0$  по пути, ортогональному в каждой точке к  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , т.е. по пути, принадлежащему эквипотенциальным поверхностям поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Согласно (6.7.1) такое замыкание не влияет на фазу. Полученная "текущая" фаза проявляет свойство аддитивности:  $\phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) = \phi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)$ . Это определение при наличии нескольких источников поля проявляет интересные топологические особенности.

Эффектом Ааронова–Бома (см. [13, 95–98]) называют появление разности фаз (6.7.2) в случае, когда магнитное поле равно нулю на пути электрона (точнее, в области, в которой ВФ частицы имеют заметную величину),  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_C) = 0$ , но в то же время  $\Phi_S \neq 0$ . Это можно осуществить с помощью магнитной экранировки, тороидального магнита или достаточно длинного соленоида, помещенного между плечами интерферометра. При интерпретации эффекта Ааронова–Бома возникает интересный парадокс. Сила Лоренца, действующая на электрон в точке  $\mathbf{r}_C$ , определяется полем  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_C)$ , поэтому принято считать лишь  $\mathbf{B}$  "реальным" полем, а потенциал  $\mathbf{A}$  — вспомогательным математическим понятием. Но здесь  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_C) = 0$ , так что приходится признать эффект "нелокальности" или "дальнодействия" — статическое поле внутри соленоида  $\mathbf{B}_0$  каким-то образом "на расстоянии" влияет на электрон. Если выразить  $\mathbf{B}_0$  через ток соленоида  $I_0$ , то можно говорить о дальнодействии тока. Можно избежать этого, признав потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_C)$  "реальным" полем, однако он определяется в каждой точке  $\mathbf{r}_C$  неоднозначно. Обе альтернативы противоречат традициям. Отметим, что фактически условие  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_C) = 0$  не обязательно для формулировки парадокса, ведь интегральная формула (6.7.2) и в общем случае описывает глобальное (т.е. "нелокальное") действие поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , расположенного вне траектории электрона.

С другой стороны, можно исходить из того, что термин "действие" подразумевает динамический эффект — изменение наблюдаемой разности фаз  $\Delta\phi$  при изменении тока  $\Delta I$ . Ясно, что изменение фазы ВФ (*фазовая модуляция*, см. предыдущий раздел) будет происходить с некоторой задержкой во времени — в соответствии с решением уравнений Максвелла для классического поля, создаваемого заданным источником. Никакое мгновенное "действие на расстоянии" наблюдаться не будет. Более последовательно, вероятно, рассматривать источник поля (например, тяжелую частицу с дипольным магнитным моментом) как квантовую систему; при этом получаем задачу о взаимодействии двух квантовых систем, и проблема "реальности" поля или потенциала не возникает.

Эти рассуждения показывают, что вопрос о том, что "реальней" —  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_C)$  или  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_C)$  — не имеет операционального смысла; он относится к категории вопросов: "А что там на самом деле происходит?" Можно лишь констатировать, что в релятивистских задачах формализм, ис-

пользующий потенциал  $A_\mu$  вместо полей  $F_{\mu\nu}$ , обычно компактней и симметричней. В рамках *калибровочной теории электродинамики* именно потенциал играет центральную роль — его существование рассматривается как следствие закона сохранения заряда.

## 7. Заключение

Мы попытались придать операциональный смысл основным терминам нерелятивистской квантовой физики, исходя из реально используемых в лабораториях процедур и наблюдаемых экспериментальных данных. Конечно, со временем ситуация может резко измениться, например, в результате появления некоторой новой метатеории, объединяющей квантовую и классическую физику, или получения новых экспериментальных фактов. Сущность квантовых терминов разъяснялась также с помощью сопоставления с возможно более близкими наглядными моделями, проявляющими классическую случайность.

Основное внимание было уделено главному понятию квантовой физики — волновой функции. Были приведены доводы, согласно которым идеальная процедура приготовления позволяет приписать данной частице или другому индивидуальному квантовому объекту определенную ВФ  $\psi$  в соответствии с ортодоксальной точкой зрения. При этом понятие чистого состояния данной индивидуальной системы имеет четкий операциональный смысл на стадии (идеального) приготовления — оно определяется приготовительной процедурой. Знание состояния системы позволяет рассчитать вероятности всевозможных наблюдений над ней.

Однако для убедительной проверки информации, содержащейся в символе  $\psi$ , надо располагать множеством одинаково приготовленных систем, что согласуется с ансамблевой точкой зрения. Таким образом, двум основным подходам к ВФ — ортодоксальному и ансамблевому — соответствуют различные экспериментальные процедуры, приготовительная и измерительная, что устраняет их кажущуюся несовместимость. Оба подхода имеют операциональное обоснование — каждый свое.

В то же время принципиального различия между одним испытанием и сколь угодно большим конечным числом испытаний не существует. По результатам измерения ВФ можно относить к одной системе с тем же основанием, что и, скажем, к 100 одинаково приготовленным системам (раздел 3.2): в обоих случаях теория дает лишь вероятностные предсказания (при исключении особого случая, когда система приготовлена в одном из собственных состояний наблюдаемого оператора). Даже в случае одного измерения знание процедуры приготовления ВФ для данной индивидуальной системы дает некоторую априорную информацию о результате опыта, например, данная частица после экрана с двумя щелями "почти наверняка" не попадет в "достаточно малую" окрестность около узла ВФ. С другой стороны, даже после 100 измерений координаты частицы, давших после статистической обработки  $\langle x \rangle_{100} = (1 \pm 0,1)$  см, нельзя полностью исключить возможность того, что истинное среднее значение  $\langle \psi | x | \psi \rangle$  равно 2 см.

В случае классической смеси чистых состояний (см. разделы 3.3 и 4.10) по определению речь идет об ансамбле уже на стадии приготовления состояния. При

отсутствии информации об условиях приготовления вопрос о том, обладает ли данная одиночная частица (например, в космических лучах) присущей ей ВФ, является риторическим, не операциональным, и выбор ответа на него — дело вкуса.

Современная техника дает удивительные возможности для приготовления атомов в определенных состояниях  $\psi$ , для управления и измерения этих состояний (последние яркие результаты описаны в [99]). "Реальность" индивидуальной ВФ была наглядно продемонстрирована, казалось бы, в разделе 6.6 с помощью вполне реалистического эксперимента с модуляцией фазы ВФ одиночной частицы, пролетающей через двухпучковый интерферометр. Но с другой стороны, подобные динамические эксперименты могут описываться также в формально эквивалентном представлении Гейзенберга (раздел 4.4), когда изменяется оператор координаты  $X(t)$ , а не ВФ. При этом наглядный образ движущейся частицы в виде (комплексного) волнового пакета  $\psi(x, t)$ , меняющего свою форму в процессе распространения, теряет смысл.

Вторая основная обсуждавшаяся тема — неклассические эффекты (разделы 4.5, 4.6, 5.6–5.8, 6.4). Сравнение предсказаний некоторых квантовых и классических вероятностных моделей приводит к парадоксам, демонстрирующим их несовместность. Принято разрешать эти парадоксы с помощью термина "квантовая нелокальность", однако возможна более консервативная точка зрения — констатация того, что квантовая теория "неколмогорова", и некоммутирующим наблюдаемым нет смысла приписывать априорные значения. Такой подход охватывает сразу несколько особенностей квантовых вероятностных моделей. Напомним, что сами по себе "нелокально" управляемые корреляции типа ЭПР имеют достаточно близкие классические аналоги [56]. Эти корреляции приводят к противоречиям лишь при количественном сопоставлении с классическими моделями, предполагающими априорное существование наблюдаемых.

Много внимания было уделено также наиболее, пожалуй, противоречивому квантовому понятию — редукции ВФ в результате акта измерения. В реальных лабораторных экспериментах никогда не используют процедуру измерения для приготовления состояния, это совершенно различные процедуры — вопреки установившимся еще с 30-х годов представлениям. К немногим диссидентам относится Лемб (W. Lamb), который в статье [100], названной "Операциональная интерпретация нерелятивистской квантовой механики" (Operational Interpretation of Nonrelativistic Quantum Mechanics), пишет: "Хотя некоторые авторы смешивают приготовление состояния и измерение, эти понятия существенно различны как физически, так и логически".

На сегодняшний день все, по-видимому, известные эксперименты количественно описываются стандартными алгоритмами квантовой теории и постулатом Борна (4.7.1). Согласно последнему для сопоставления с экспериментом достаточно вычислить проекцию вектора состояния системы на некоторый вектор, определяемый экспериментальной процедурой. Редукционная гипотеза Дирака (4.7.2), утверждающая, что в результате измерения приготавливается новая ВФ, при этом не нужна. Насколько нам известно, пока не обнаружено ни одного экспериментального факта, подтверждающего

или опровергающего гипотезу редукции, и различные модели процесса измерения, несмотря на все усилия, остаются полностью изолированными от эксперимента. Снова и снова подтверждается лишь адекватность квантового формализма (при правильном выборе модели) и постулат Борна. Примечательно, что проекционный постулат (4.7.2) (в отличие от постулата Борна (4.7.1)), по-видимому, никогда не используется при *количественном* описании реальных экспериментов; он, как и понятие частичной редукции (раздел 4.8), фигурирует лишь в общих качественных рассуждениях.

Таким образом, в настоящее время понятие редукции ВФ в момент измерения фактически излишне; оно является лишь удобным вспомогательным средством для наглядного описания наблюдаемых эффектов, для образного представления того, что происходит "на самом деле", т.е. это понятие относится к четвертой компоненте квантовой физики — ее *интерпретации* (раздел 2). Выбор интерпретации или наглядной модели — дело вкуса (что и является отличием *интерпретации* от *теории*). Отметим, однако, что описание квантовых корреляционных эффектов в терминах редукции и связанная с этим терминология (*нелокальность*, *телепортация*) ведут к (псевдо)парадоксам типа сверхсветового телеграфа и вносят в физику излишний дух таинственности, мистики, обеспечивают дополнительными ресурсами различные лженауки. Представляется полезным время от времени возвращаться назад, к истокам, и пытаться придать аксиоматическую структуру данному разделу физики с точной классификацией необходимых и избыточных понятий с помощью операционального подхода.

С другой стороны, нецелесообразно, конечно, отказываться от удобных, но не строго определенных понятий; речь может идти лишь об уточнении их статуса. Наглядность понятия редукции, как и других модельных представлений физики, способствует планированию новых экспериментов, развитию интуиции, обнаружению новых эффектов. Здесь уместно вспомнить о плодотворной роли идей алхимиков, силовых линий Фарадея, различных моделей эфира, образного представления Дираком позитронов как "дырок" в море частиц с отрицательной энергией или их определения Уилером и Фейнманом как движущихся назад во времени электронов. Известны также исторические примеры превращения "метафизики" в физику (атомы, античастицы, кварки). Не исключено, что в будущем проявления редукции будут все же обнаружены (для событий, разделенных времени-подобными интервалами).

В разделе 6.1 была представлена простая модель процедуры измерения продольной координаты частицы, которая позволила установить связь между параметрами измерительной аппаратуры  $x_1$ ,  $t_1$ , непосредственно измеримыми с помощью линеек и часов, и основной теоретической конструкцией квантового формализма — функцией  $\psi(x, t)$ .

В разделах 4.9 и 6.2 мы попытались обосновать тезис о том, что действительная необходимость в редукционном постулате в виде формулы Вигнера (4.9.1) возникает лишь при количественном описании узкого класса корреляционных экспериментов типа времени-пролетных с наблюдением двух или более некоммутирующих (при учете взаимодействия) операторов. Такие специально поставленные эксперименты могли бы, по-видимому,

дать непосредственное свидетельство применимости формулы Вигнера для описания повторных измерений. С чисто операциональной точки зрения формулу Вигнера (4.9.1), полученную объединением постулатов Борна (4.7.1) и Дирака (4.7.2), можно принять в качестве основного измерительного постулата квантовой теории, обобщающего постулат Борна. Существенным, на наш взгляд, обстоятельством является то, что, согласно использованной в разделе 6.2 модификации формулы Вигнера, "редукция" происходит не в один из многочисленных моментов (наблюдаемых при повторных испытаниях) регистрации пролета частицы первым детектором  $t_i$ , а в некоторый абстрактный момент  $t_1$ . Этот параметр является аргументом функции распределения, определяемой при статистической обработке результатов большой серии наблюдений (см. рис. 6).

**Благодарности.** Автор признателен П.В. Елютину за неизменный интерес, многочисленные обсуждения и ценные замечания в ходе подготовки данной работы, Ю.И. Воронцову за конструктивную критику, А.И. Липкину за плодотворные дискуссии о роли моделей в физике, а также анонимному рецензенту за ряд критических замечаний, которые я постарался учесть.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (тема ГКНТ "Фундаментальная метрология", грант № 96-02-16334-а) и Российского фонда по поддержке ведущих научных школ ("Квантовые явления в нелинейной оптике", грант № 96-15-96673).

## 8. Приложения

### I. Собственные векторы операторов Стокса и парадокс Гринбергера – Хорна – Цайлингера

При описании поляризации фотона удобно использовать два базиса, образованных собственными векторами  $|x\rangle$ ,  $|y\rangle$  оператора  $S_1$  и собственными векторами  $|\pm\rangle = (|x\rangle \pm i|y\rangle)/\sqrt{2}$  оператора  $S_3$ . Согласно (5.4.3)

$$\begin{aligned} S_1|x\rangle &= |x\rangle, & S_1|y\rangle &= -|y\rangle, & S_1|\pm\rangle &= |\mp\rangle, \\ S_2|x\rangle &= |y\rangle, & S_2|y\rangle &= |x\rangle, & S_2|\pm\rangle &= \pm i|\mp\rangle, \\ S_3|x\rangle &= i|y\rangle, & S_3|y\rangle &= -i|x\rangle, & S_3|\pm\rangle &= \pm|\pm\rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Пусть падающее поле приготовлено в следующем трехфотонном состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{|+\rangle_A|+\rangle_B|+\rangle_C + |-\rangle_A|-\rangle_B|-\rangle_C}{\sqrt{2}}, \quad (\text{I.2})$$

где индексы А, В, С относятся к трем пучкам. При этом согласно (I.1)  $\langle S_{1Z} \rangle = \langle S_{2Z} \rangle = \langle S_{3Z} \rangle = 0$ , т.е. излучение полностью деполяризовано, измерение параметров Стокса в каждом пучке даст с равной вероятностью значения  $s_{kZ} = \pm 1$ . Однако с помощью (I.1) легко убедиться, что вектор  $|\psi\rangle$  является собственным для некоторых произведений из трех операторов Стокса:

$$\begin{aligned} S_{1A}S_{1B}S_{1C}|\psi\rangle &= |\psi\rangle, & S_{1A}S_{2B}S_{2C}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle, \\ S_{2A}S_{1B}S_{2C}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle, & S_{2A}S_{2B}S_{1C}|\psi\rangle &= -|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \langle \psi | S_{1A}S_{1B}S_{1C} | \psi \rangle &= 1, & \langle \psi | S_{1A}S_{2B}S_{2C} | \psi \rangle &= -1, \\ \langle \psi | S_{2A}S_{1B}S_{2C} | \psi \rangle &= -1, & \langle \psi | S_{2A}S_{2B}S_{1C} | \psi \rangle &= -1. \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Таким образом, в экспериментах с ориентациями призм Николя  $\chi_A = \chi_B = \chi_C = 0$  должна наблюдаться идеальная корреляция между наблюдаемыми фотоотсчетами в трех приемниках,  $s_{1A}s_{1B}s_{1C} = \langle S_{1A}S_{1B}S_{1C} \rangle = 1$ . Аналогично, при  $\chi_A = 0$  и  $\chi_B = \chi_C = 45^\circ$  должна наблюдаться идеальная антикорреляция,  $\langle S_{1A}S_{2B}S_{2C} \rangle = -1$ . Этот результат приводит к парадоксу ГХЦ (см. раздел 5.8).

### II. К теории "квантовой телепортации"

Действие светоделителя BS и преобразователя  $T_C$  (см. рис. 5) описывается в представлении Гейзенберга следующими унитарными преобразованиями операторов:

$$\begin{aligned} a'_j &= \frac{a_j + b_j}{\sqrt{2}}, & c'_x &= t_C^* c_x + r_C^* c_y, \\ b'_j &= \frac{-a_j + b_j}{\sqrt{2}}, & c'_y &= -r_C c_x + t_C c_y. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Здесь  $a, b, c$  — операторы рождения фотонов в пучках А, В, С;  $j = x, y$  и  $|t_C|^2 + |r_C|^2 = 1$ . Эти соотношения определяют матрицу преобразования  $6 \times 6$  всей оптической системы  $G_{mm}$ , связывающую выходные операторы с входными и, следовательно, позволяют выразить статистику поля на выходе через статистику на входе, задаваемую ВФ исходного поля  $|\psi\rangle$ .

Согласно постулату Борна (4.7.1) вероятности  $p' = |q'|^2$  (в дальнейшем штрихи у  $p$  и  $q$  опускаются) обнаружения определенных чисел фотонов в шести выходных модах определяются проекциями  $|\psi\rangle$  на соответствующие фоковские состояния:

$$q(n_1, \dots, n_6) = \langle n_1, \dots, n_6 | \psi \rangle = \frac{\langle 0 | a_1'^{n_1} \dots a_6'^{n_6} | \psi \rangle}{\sqrt{n_1! \dots n_6!}}. \quad (\text{II.2})$$

Отметим, что в случае однофотонных состояний вероятности совпадают с соответствующими моментами:

$$p(110010) = \mu(Ax, Ay, Cx) \equiv \langle \psi | N'_{Ax} N'_{Ay} N'_{Cx} | \psi \rangle. \quad (\text{II.3})$$

(Моды нумеруем в следующем порядке:  $Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy$ .)

Подстановка (II.1) в (II.2) дает вероятности всех наблюдаемых в эксперименте событий. Например, амплитуда вероятности регистрации трех фотонов в выходных модах  $Ax, By, Cx$  равна

$$\begin{aligned} q(Ax, By, Cx) &= \langle 0 | a'_x b'_y c'_x | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle 0 | (a_x + b_x)(-a_y + b_y)(t_C^* c_x + r_C^* c_y) | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Эффект телепортации имеет место при условии, что из восьми матричных элементов в (II.4) лишь два отличны от нуля. Пусть в каждом пучке на входе имеется по одному фотону, тогда  $\langle 0 | a_x a_y | \psi \rangle = \langle 0 | b_x b_y | \psi \rangle = 0$ . Пусть также  $\langle 0 | a_x b_y c_y | \psi \rangle = \langle 0 | a_y b_x c_x | \psi \rangle = 0$ , тогда (II.4) прини-

мает вид

$$q(Ax, By, Cx) = \frac{1}{2} \langle 0 | (t_C^* a_x b_y c_x - r_C^* a_y b_x c_y) | \psi \rangle. \quad (\text{II.5a})$$

Согласно этому выражению преобразователь  $T_C$  действует на поляризацию фотонов в пучках А и С одинаковым образом.

С другой стороны, амплитуда вероятности регистрации двух фотонов в одной выходной моде  $Ax$  и одного в  $Cx$  имеет вид

$$\begin{aligned} q(2Ax, Cx) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle 0 | (a_x + b_x)^2 (t_C^* c_x + r_C^* c_y) | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle 0 | 2a_x b_x (t_C^* c_x + r_C^* c_y) | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | (r_C^* a_x b_x c_y) | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.5б})$$

В этих событиях не проявляется нужный эффект (они не зависят от  $t_C$ ), что приводит к необходимости их исключения с помощью схемы совпадения или затвора.

Конкретизируем входное состояние. Пусть

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_{BC}, \quad (\text{II.6a})$$

$$|\psi\rangle_A = \alpha |Ax\rangle + \beta |Ay\rangle, \quad (\text{II.6б})$$

$$|\psi\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|Bx, Cy\rangle - |By, Cx\rangle). \quad (\text{II.6в})$$

Здесь  $|Ax\rangle \equiv |10***\rangle$  — состояние с одним фотоном в моде  $A$  с поляризацией  $x$ ,  $|Bx, Cy\rangle \equiv |**1001\rangle$  — состояние с одним фотоном в модах  $Bx, Cy$  и т.д. Состояние  $|\psi\rangle_{BC}$  обладает нужными свойствами  $b_x c_x |\psi\rangle_{BC} = -b_y c_x |\psi\rangle_{BC} = |0\rangle/\sqrt{2}$  и  $b_x c_x |\psi\rangle_{BC} = b_y b_y |\psi\rangle_{BC} = 0$ , дающими переход от (II.4) к (II.5).

В случае (II.6) с помощью (II.4) и аналогичных выражений находим

$$q(Ay, Bx, Cx) = -q(Ax, By, Cx) = \frac{1}{\sqrt{8}} (t_C^* \alpha + r_C^* \beta), \quad (\text{II.7a})$$

$$q(Ax, Ay, Cx) = -q(Bx, By, Cx) = \frac{1}{\sqrt{8}} (-t_C^* \alpha + r_C^* \beta), \quad (\text{II.7б})$$

$$q(2Ax, Cx) = -q(2Bx, Cx) = \frac{r_C^* \alpha}{2}, \quad (\text{II.7в})$$

$$q(2By, Cx) = -q(2Ay, Cx) = \frac{t_C^* \beta}{2}. \quad (\text{II.7г})$$

Здесь  $|2Ax\rangle$  — состояние с двумя фотонами в пучке А с одинаковой поляризацией  $x$ . Амплитуды вида  $q(*, *, Cy)$  находятся заменой  $t^* \rightarrow -r, r^* \rightarrow t$ ; при этом  $p(*, *, Cx) + p(*, *, Cy) = 1$ ; амплитуды  $q(Ax, Bx, *)$  и  $q(Ay, By, *)$  равны нулю. В результате вероятности всех 16 наблюдаемых событий принимают вид

$$\begin{aligned} p(Ax, By, Cx) &= p(Ay, Bx, Cx) = \\ &= \frac{1}{8} [|t_C \alpha|^2 + |r_C \beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(t_C r_C^* \alpha^* \beta)], \\ p(Ax, By, Cy) &= p(Ay, Bx, Cy) = \\ &= \frac{1}{8} [|r_C \alpha|^2 + |t_C \beta|^2 - 2 \operatorname{Re}(t_C r_C^* \alpha^* \beta)], \end{aligned} \quad (\text{II.8a})$$

$$\begin{aligned} p(Ax, Ay, Cx) &= p(Bx, By, Cx) = \\ &= \frac{1}{8} [|t_C \alpha|^2 + |r_C \beta|^2 - 2 \operatorname{Re}(t_C r_C^* \alpha^* \beta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(Ax, Ay, Cy) &= p(Bx, By, Cy) = \\ &= \frac{1}{8} [|r_C \alpha|^2 + |t_C \beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(t_C r_C^* \alpha^* \beta)], \end{aligned} \quad (\text{II.8б})$$

$$p(2Ax, Cx) = p(2Bx, Cx) = \frac{1}{4} |r_C \alpha|^2,$$

$$p(2Ax, Cy) = p(2Bx, Cy) = \frac{1}{4} |t_C \alpha|^2,$$

$$p(2Ay, Cx) = p(2By, Cx) = \frac{1}{4} |t_C \beta|^2,$$

$$p(2Ay, Cy) = p(2By, Cy) = \frac{1}{4} |r_C \beta|^2. \quad (\text{II.8в})$$

Согласно (II.7a) или (II.8a) преобразователь  $T_C$  действует на четыре события  $p(Ax, By, *)$  и  $p(Ay, Bx, *)$  (происходящие в 25 % всех испытаний) точно так же, как будто он находится в пучке А на входе системы. Совместное действие  $T_A$  и  $T_C$  на эти события описывается произведением матриц Джонса  $T_C T_A$ , при этом, варьируя  $T_C$ , можно измерить  $\alpha, \beta$ . В этом и заключается операциональное определение наблюдавшегося эффекта.

Можно сделать зависимости еще четырех событий  $p(Ax, Ay, *)$  и  $p(Bx, By, *)$  от  $T_A$  и  $T_C$  такими же. Для этого при наступлении этих событий надо в соответствии с (II.8б) производить перед  $T_C$  дополнительное унитарное преобразование  $T'_C = \sigma_z$ , изменяющее знак  $\beta$  [75].

В то же время 8 событий (II.8в) с попаданием двух фотонов на один детектор (происходящих в 50 % всех испытаний) не проявляют эффект. Их можно исключить с помощью оптического затвора. При этом пучок С будет полностью поляризованным,  $P_C = 1$ .

Суммируя все вероятности вида  $p(*, *, Cx)$ , находим маргинальную вероятность регистрации  $Cx$ -фотона:  $p(Cx) = \sum p(*, *, Cx) = \langle N'_{Cx} \rangle = 1/2$ . Аналогично,  $p(Cy) = \sum p(*, *, Cy) = \langle N_{Cy} \rangle = 1/2$ , т.е.  $C$ -фотоны, как и следовало ожидать, остаются полностью деполаризованными. Таким образом, преобразователи  $T_A$  и  $T_C$  никак не влияют на безусловные отсчеты в двух детекторах  $D_C$  пучка С.

Найдем степень поляризации пучка С при использовании управляемого преобразователя  $T'_C$ , но без затвора, исключая события (II.8в). Согласно (II.8), с учетом обратного знака у  $\beta$  в (II.8б), параметры Стокса пучка С имеют вид  $S_{0C} = 1, S_{1C} = 0, S_{2C} = \operatorname{Re}(\alpha^* \beta) = (1/2) S_{2A}, S_{3C} = \operatorname{Im}(\alpha^* \beta) = (1/2) S_{3A}$ . В результате для степени поляризации  $P_C$  пучка С получаем выражение  $P_C = (1/2) \sin(\theta_A)$ , где  $\theta_A = \arctan |\beta/\alpha|$  — полярный угол точки, отображающей состояние фотона А на сферу Пуанкаре (см. (5.4.2)). Например, при линейной поляризации А-фотонов  $P_C = 1/2$ , а при круговой  $P_C = 0$ . Таким образом, управляемого унитарного преобразования  $T'_C$ , равного 1 или  $\sigma_x$ , недостаточно для точного копирования поляризации А-фотона — даже в случае идеальных детекторов и элементов тракта необходим затвор.

Рассмотрим кратко тот же расчет в представлении Шрёдингера. Эквивалентные (II.1) преобразования век-

торов осуществляются матрицами  $T^+$ :

$$\begin{aligned} |A_j\rangle &= \frac{|A'_j\rangle - |B'_j\rangle}{\sqrt{2}}, & |C_x\rangle &= t_C |C'_x\rangle - r_C^* |C'_y\rangle, \\ |B_j\rangle &= \frac{|A'_j\rangle + |B'_j\rangle}{\sqrt{2}}, & |C_y\rangle &= r_C |C'_x\rangle + t_C^* |C'_y\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Здесь штрихами отмечены выходные моды. Подстановка этих выражений в (II.6) дает ВФ поля на выходе схемы  $|\psi'\rangle$ . Пусть для простоты  $T_C = 1$ , тогда

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} [(|Ay', Bx'\rangle - |Ax', By'\rangle)(\alpha|Cx'\rangle + \beta|Cy'\rangle) + \\ &+ (|Bx', By'\rangle - |Ay', Ax'\rangle)(\alpha|Cx'\rangle - \beta|Cy'\rangle) + \\ &+ \sqrt{2}\beta(|2By'\rangle - |2Ay'\rangle)|Cx'\rangle + \\ &+ \sqrt{2}\alpha(|2Ax'\rangle - |2Bx'\rangle)|Cy'\rangle]. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Здесь  $|2Ax'\rangle = (a_x^+)^2|0\rangle/\sqrt{2}$  — состояние с двумя фотонами в моде  $Ax'$ .

Согласно постулату Борна в представлении Шрёдингера

$$q(Ay, Bx, Cx) = \langle 0|a_y b_x c_x |\psi'\rangle = \langle Ay', Bx', Cx' | \psi'\rangle$$

и т.д. Все операторы здесь коммутируют, поэтому порядок их написания не играет роли. Однако для расчета зависимости выходных моментов от  $T_A$  и  $T_C$  удобно сначала находить проекции  $|\psi'\rangle$  на векторы, описывающие регистрацию фотонов только в пучках  $A'$  и  $B'$ . Например,

$$\langle Ay', Bx' | \psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (\alpha|Cx'\rangle + \beta|Cy'\rangle) \equiv |\psi\rangle_{\text{Ceff}}. \quad (\text{II.11})$$

Эта величина является (ненормированным) вектором в пространстве  $C$ . Здесь определена также нормированная эффективная ВФ  $|\psi\rangle_{\text{Ceff}}$  для поля  $C$ , которая описывает влияние  $T_A$  и  $T_C$  на вероятность подмножества событий (0110\*\*). Существенно, что вектор  $|\psi\rangle_{\text{Ceff}}$  совпадает по форме с исходной ВФ  $|\psi\rangle_A$  для пучка  $A$ . Отсюда получаем  $q(Ax, By, Cx) = \alpha/\sqrt{8}$ ,  $q(Ax, By, Cy) = \beta/\sqrt{8}$ . Замена  $|C_j\rangle$  согласно (II.7) или эквивалентная замена  $(\alpha, \beta) \rightarrow T_C^*(\alpha, \beta)$  дает снова (II.7).

Рассмотрим вариант эксперимента (см. рис. 5), при котором поляризационные призмы и один из двух детекторов в пучках  $A$  и  $B$  отсутствуют, т.е. когда не производится поляризационный анализ  $A$ - и  $B$ -фотонов (по-видимому, в [80] использовался этот вариант). Согласно (II.8б) вероятность обнаружения одного фотона в пучке  $A$  и одного в  $B$  независимо от их поляризации, а также третьего фотона в моде  $Cx$ , равна

$$\begin{aligned} p(A, B, Cx) &= 2p(Ax, By, Cx) = \\ &= \frac{1}{4} [|t_C \alpha|^2 + |r_C \beta|^2 + 2 \text{Re}(t_C r_C^* \alpha^* \beta)]. \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Эти события проявляют эффект копирования — в отличие от событий с попаданием двух фотонов в один

выходной пучок  $A$  или  $B$ , имеющих вероятность

$$\begin{aligned} 2p(2A, Cx) &= 2p(2B, Cx) = \\ &= 2[p(2Ax, Cx) + p(2Ay, Cx) + p(Ax, Ay, Cx)] = \\ &= \frac{1}{4} [1 + |r_C \alpha|^2 + |t_C \beta|^2 - 2 \text{Re}(t_C r_C^* \alpha^* \beta)]. \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Для их исключения опять необходим затвор. Доля благоприятных событий теперь равна  $p(A, B, Cx) + p(A, B, Cy) = 1/4$  — в два раза меньше, чем при использовании четырех управляющих детекторов и преобразователя  $T'_C$ .

## Список литературы

1. Home D, Whitaker M A В *Phys. Rep.* **210** 223 (1992)
2. Садбери А *Квантовая механика и физика элементарных частиц* (М.: Мир, 1989) [Sudbery A *Quantum Mechanics and the Particles of Nature* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986)]
3. Wigner E P *Am. J. Phys.* **31** 6 (1963)
4. Блохинцев Д И *Принципиальные вопросы квантовой механики* (М.: Наука, 1966); *Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам* (М.: МГУ, 1988); Blokhintsev D I *Principles of Quantum Mechanics* (Reidel: Dordrecht, 1964)
5. Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972)
6. Марков М А *О трех интерпретациях квантовой механики* (М.: Наука, 1991)
7. Липкин А И "Парадоксы" квантовой механики глазами "реалиста-эмпирика", "конструктивиста-эмпирика" и "конструктивиста-рационалиста", в сб. *Философия науки* Вып.2 (М.: ИФРАН, 1996)
8. Севостьянов Б А *Вероятностные модели* (М.: Наука, 1992)
9. Anderson M H et al. *Science* **269** 198 (1995)
10. Bradley C C et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687 (1995)
11. Davis K B et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969 (1995)
12. Andrews M R et al. *Science* **275** 637 (1997)
13. *Fundamental Problems in Quantum Theory* (Ann. N.Y. Acad. Sci., Vol. 755, Eds D M Greenberger, A Zeilinger) (New York: New York Academy of Sciences, 1995)
14. *Atom Interferometry* (Ed. P R Berman) (San Diego: Academic Press, 1997); Special Issue on Optics and Interferometry with Atoms: *Appl. Phys. B* **54** (1992)
15. Pritchard D et. al., in Ref. [13] p. 192
16. *Quantum Communications and Measurement* (Eds V P Belavkin, O Hirota, R L Hudson) (New York: Plenum Press, 1995)
17. *Quantum Communication, Computing, and Measurement* (Eds O Hirota, A S Holevo, C M Caves) (New York: Plenum Press, 1997)
18. Воронцов Ю И *Теория и методы макроскопических измерений* (М.: Наука, 1989)
19. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge, New York: Cambridge Univ. Press, 1992)
20. Glauber R J *Phys. Rev.* **130** 2529 (1963); Глаубер Р, в сб. *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (М.: Мир, 1966) [Glauber R, in *Quantum Optics and Electronics* (Eds C DeWitt, A Blandin, C Cohen-Tannoudji) (New York: Gordon and Breach, 1965)]
21. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **137** 334 (1989)
22. Бом Д *Квантовая теория* (М.: ГИФМЛ, 1961) [Bohm D *Quantum Theory* (New York: Prentice-Hall, 1952)]
23. Special Issue: *J. Mod. Opt.* **44** (11/12) (1997)
24. Smithy D T et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 1244 (1993)
25. Dunn T J, Walmsley I A, Mukamel S *Phys. Rev. Lett.* **74** 884 (1995)
26. Schiller S et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 2933 (1996)
27. Kurtsiefer Ch, Pfau T, Mlynek J *Nature* **386** 150 (1997)
28. Bertrand J, Bertrand P *Found. Phys.* **17** 397 (1987)
29. Vogel K, Risken H *Phys. Rev. A* **40** 2846 (1989)
30. D'Ariano G M, Macchiavello C, Paris M G A *Phys. Rev. A* **50** 4298 (1994)
31. Munroe M et al. *Phys. Rev. A* **52** R924 (1995)
32. Leonhardt U et al. *Opt. Commun.* **127** 144 (1996)



33. Richter Th *Phys. Lett. A* **221** 327 (1996)
34. Janicke U, Wilkens M *J. Mod. Opt.* **42** 2183 (1995); Leichtle C et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 1418 (1998)
35. Клышко Д Н *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986)
36. Клышко Д Н, Масалов А В *УФН* **165** 1249 (1995) [*Phys. Usp.* **38** 1203 (1995)]
37. Клышко Д Н *УФН* **164** 1187 (1994) [*Phys. Usp.* **37** 1097 (1994)]
38. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **218** 119 (1996); *Laser Phys.* **6** 1056 (1996)
39. Bell J S *Physics* **1** 195 (1964); Clauser J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **23** 880 (1969)
40. Clauser J F, Horne M A *Phys. Rev. D* **10** 526 (1974); Clauser J F, Shimony A *Rep. Prog. Phys.* **41** 1881 (1978)
41. Kochen S, Specker E P *J. Math. Mech.* **17** 59 (1967)
42. Santos E *Phys. Rev. A* **45** 3646 (1992)
43. Hillery M *Phys. Rev. A* **39** 2994 (1989)
44. Клышко Д Н *УФН* **166** 613 (1996) [*Phys. Usp.* **39** 573 (1996)]; *Phys. Lett. A* **213** 7 (1996)
45. Lee C T *Phys. Rev. A* **41** 1569, 1721 (1990)
46. Kimble H J, Dagenais M, Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **39** 691 (1977)
47. Paul H *Rev. Mod. Phys.* **54** 1061 (1982)
48. Balian R *Am. J. Phys.* **57** 1019 (1989)
49. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *УФН* **166** 651 (1996) [*Phys. Usp.* **166** 609 (1996)]
50. Margenau H *Ann. Phys. (N.Y.)* **23** 469 (1963)
51. Home D, Whitaker M A B *Phys. Lett. A* **128** 1 (1988)
52. Ballentine L E *Int. J. Theor. Phys.* **27** 211 (1988)
53. Namiki M, Pascazio S, in Ref. [13] p. 335; *Phys. Rev. A* **44** 39 (1993)
54. *Quantum Mechanics without Reduction* (Eds M Sini, J Levy-Leblond) (Bristol: Hilger, 1990)
55. Шифф Л *Квантовая механика* (М.: ИЛ, 1959) [Schiff L I *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill Book Co., 1955)]
56. Евдокимов Н В и др. *УФН* **166** 91 (1996) [*Phys. Usp.* **39** 83 (1996)]
57. Клышко Д Н *УФН* **154** 133 (1988) [*Sov. Phys. Usp.* **31** 74 (1988)]; *УФН* **158** 327 (1989) [*Sov. Phys. Usp.* **32** 555 (1989)]
58. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **123** 179 (1998); *Laser Phys.* **8** 363 (1998)
59. Bennet C H *Phys. Today* **48** (10) 24 (1995)
60. Sleator T, Weinfurter H, in Ref. [13] p. 715
61. Maitre X et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 769 (1997)
62. Вальтер Г *УФН* **166** 777 (1996) [*Phys. Usp.* **39** 727 (1996)]
63. Клышко Д Н *ЖЭТФ* **111** 1955 (1997) [*JETP* **84** 1065 (1997)]
64. Чиркин А С, Орлов А А, Парашук Д Ю *Квант. электрон.* **20** 999 (1993)
65. Bennett C H et al. *J. Crypto* **5** 3 (1992)
66. Bennett C H *Phys. Rev. Lett.* **68** 3121 (1992)
67. Special Issue on Quantum Communication: *J. Mod. Opt.* **41** (12) (1994)
68. Bennett C H, Brassard G, Ekert A K *Sci. Am.* **267** (4) 50 (1992)
69. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **227** 1 (1997)
70. Клышко Д Н *ЖЭТФ* **105** 1574 (1994) [*JETP* **78** 848 (1994)]
71. Strekalov D V et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 3600 (1995)
72. Pittman T B et al. *Phys. Rev. A* **53** 2804 (1996)
73. Greenberger D M et al. *Am. J. Phys.* **58** 1131 (1990)
74. Klyshko D N *Phys. Lett. A* **172** 399 (1993)
75. Bennett C H et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895 (1993)
76. Braunstein S L, Mann A *Phys. Rev. A* **51** R1727 (1995); **53** 630(E) (1996)
77. Davidovich L et al. *Phys. Rev. A* **50** R895 (1994)
78. Cirac J I, Parkins A S *Phys. Rev. A* **50** R4441 (1994)
79. Braunstein S L, Kimble H J *Phys. Rev. Lett.* **80** 869 (1998)
80. Bouwmeester D et al. *Nature* **390** 575 (1997)
81. Boschi D et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 1121 (1998)
82. Зельдович Б Я, Клышко Д Н *Письма в ЖЭТФ* **9** 69 (1969) [*JETP Lett.* **9** 40 (1969)]
83. Клышко Д Н *Квант. электрон.* **4** 1056 (1977) [*Sov. J. Quant. Electron.* **7** 591 (1977)]
84. Hong C K, Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **56** 58 (1986)
85. Shih Y H, Alley C O *Phys. Rev. Lett.* **61** 2921 (1987)
86. Rubin M H, Klyshko D N, Shih Y H, Sergienko A V *Phys. Rev. A* **50** 5122 (1994)
87. Kwiat P G et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 4337 (1995)
88. Raymer M G *Am. J. Phys.* **62** 986 (1994)
89. Татарский В И *УФН* **139** 587 (1983)
90. Hillery M et al. *Phys. Rep.* **106** 121 (1984)
91. Вихман Э *Квантовая физика* (М.: Наука, 1977) [Wichmann E H *Quantum Physics* (McGraw-Hill Book Co., 1974)]
92. Cahn S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 784 (1997)
93. Франк А И, Носов В Г *ЯФ* **57** 1029 (1994)
94. Frank A I, Nosov V G, in Ref. [13] p. 293
95. Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* (М.: Мир, 1967) [Feynman R P, Leighton R B, Sands M *Feynman Lectures on Physics* (Reading: Addison-Wesley, 1963)]
96. Aharonov Y, Bohm D *Phys. Rev.* **115** 485 (1959)
97. Olariu S, Popescu I I *Rev. Mod. Phys.* **57** 339 (1985)
98. Hamilton J *Aharonov–Bohm and Other Cyclic Phenomena* (Springer Tracts in Modern Physics, 139) (Berlin, New York: Springer-Verlag, 1997)
99. Leibfried D, Pfau T, Monroe C *Phys. Today* **51** (4) 22 (1998)
100. Lamb W *Phys. Today* **22** 23 (1969) [перевод: *УФН* **99** 719 (1969)]

### Basic quantum mechanical concepts from the operational viewpoint

D.N. Klyshko

*M.V. Lomonosov Moscow State University, Physics Department,  
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russia  
Tel. (7-095) 939-1104  
E-mail: dnk@klyshko.phys.msu.su*

The physical meaning of the basic quantum mechanical concepts (such as the wave function, reduction, state preparation and measurement, the projection postulate, and the uncertainty principle) is clarified using realistic experimental procedures and employing classical analogies whenever possible. Photon polarization measurement and particle coordinate and momentum measurement are considered as examples, as also are Einstein–Podolsky–Rosen correlations, Aharonov–Bohm effects, quantum teleportation, etc. Various nonclassicality criteria of quantum models, including photon-antibunching and the violation of the Bell inequality, are discussed.

PACS number: 03.65.Bz

Bibliography — 100 references

Received 17 February 1998