

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Неклассический свет

Д.Н. Клышко

*Рассмотрены свойства неклассического света (НКС) с акцентом на экспериментально наблюдаемые отличительные признаки, в основе которых лежит известная формула Манделя, связывающая статистику фотоотчетов со статистикой падающего на детектор света. Излагается систематический операциональный подход к исследованию НКС на основе двух параллельных наборов измеряемых чисел: вероятностей фотоотчетов  $\{p_m\}$  и нормированных факториальных моментов отсчетов  $\{g_k\}$ . Подробно анализируются два частных примера: "подогретый" сжатый вакуум и "подогретое" однофотонное состояние. Предложен альтернативный метод обнаружения слабой неклассичности с помощью "обобщенных" моментов  $\{a_k(s)\}$ . Рассмотрено влияние на НКС линейного поглощения (усиления) и светоделиния и связь между НКС и абсолютной калибровкой фотодетекторов. Выяснены условия, при которых светоделинитель реализует математическую операцию суперпозиции двух одномодовых полей, которая полезна при исследовании НКС.*

PACS numbers: 03.65.Bz, 12.20.Ds, 07.60.Dq, 42.50.Dv

## Содержание

1. Введение (613).
2. Экспериментальная процедура (615).
  - 2.1. Фотоотсчеты. 2.2. Антигруппировка отсчетов. 2.3. Корпускулярная модель. 2.4. Квантовая модель.
3. Полуклассическая теория фотоотсчетов (616).
  - 3.1. Одномодовый детектор. 3.2. Формула Манделя. 3.3. Факториальные моменты. 3.4. Распределение амплитуды.
4. Наблюдаемые признаки НКС (618).
  - 4.1. Мера Ли. 4.2. Операциональное определение неклассичности. 4.3. Проблема моментов. 4.4. Связи между моментами. 4.5. Сжатие квадратур.
5. Квантовая теория фотоотсчетов (621).
  - 5.1. Дискретное представление. 5.2. Непрерывное представление. 5.3. Заглаженные функции. 5.4. Суперпозиция с тепловым полем. 5.5. Примеры.
6. Подогретый сжатый вакуум (623).
  - 6.1. Свет с четным числом фотонов. 6.2.  $P$ -распределение. 6.3. Прямое детектирование. 6.4. Гомодинное детектирование.
7. Подогретое однофотонное состояние (628).
  - 7.1.  $P$ -распределение. 7.2. Меры неклассичности.
8. Влияние поглощения и усиления на НКС (630).
9. Учет неидеальности детектора и абсолютная фотометрия (631).
10. Влияние светоделителя на НКС (632).
11. Заключение (633).

## 12. Приложения (634).

I. Ограничения на моменты. II. Обобщенные моменты.

## Список литературы (637).

## 1. Введение

Понятие неклассического света (НКС) привлекает большое внимание в современной квантовой оптике. Под НКС понимается свет, наблюдаемые свойства которого нельзя описать с помощью наглядных, привычных представлений, рассматривая пучок света как совокупность волн. Иначе говоря, НКС вызывает эффекты, не имеющие классических аналогов.

О свойствах света обычно судят по свойствам фототока, вызываемого падающим светом при фотоэффекте. В традиционных оптических экспериментах внимание обращается лишь на среднюю величину тока, пропорциональную средней интенсивности света. Наблюдаемые отклонения тока от его среднего значения имеют совершенно случайный, хаотический характер. Такие пуассоновские или дробовые шумы тока объяснялись случайностью моментов рождения фотоэлектронов и поэтому не привлекали интереса.

Впервые влияние тепловых флуктуаций интенсивности света на флуктуации фототока было обнаружено около 40 лет назад в известных экспериментах Брауна–Твисса [1]. В них использовался свет, излучаемый ртутной лампой или звездой, и наблюдались дополнительные шумы фототока — более сильные, чем пуассоновские. (Фактически в этих экспериментах наблюдались не флуктуации тока в одном детекторе, а корреляция между флуктуациями токов в двух детекторах, однако эти эффекты тесно связаны.) Избыточные, сверхпуассоновские шумы фототока, имеют тривиальное классическое объяснение: амплитуда световой волны изменяется

Д.Н. Клышко. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет  
119899 Москва, Воробьевы горы  
Тел. (095) 939-11-04  
E-mail: dnk@klyshko.phys.msu.ru

Статья поступила 22 декабря 1995 г.

случайным образом, что вызывает синхронное изменение числа порождаемых волной фотоэлектронов. Таким образом, свет, изучавшийся в экспериментах Брауна–Твисса, следует отнести к категории "классического света", т.е. описываемого классической теорией.

По иронии истории с эффектом Брауна–Твисса, который может быть успешно описан в терминах *классической оптики*, обычно связывают дату рождения *квантовой оптики*. Вначале он даже вызвал некоторые затруднения при его трактовке в рамках квантовой теории. Сейчас на наглядном фотонном языке его объясняют избыточными, сверхпуассоновскими флуктуациями в потоке частиц (фотонов), т.е. считают проявлением некоторой "группировки" фотонов, которая свойственна тепловым источникам света.

Первые оптические эксперименты с НКС описаны в 1965–1967 гг. [2–6]. В них использовались источники, излучающие фотоны по два, тесными парами. Такой свет, называемый *двухфотонным*, также вызывает избыточные шумы фототока, однако их статистические свойства несовместны с классическими представлениями о волнах со случайной амплитудой. Двухфотонный свет, излучаемый при двухквантовых переходах между тремя уровнями в атомах, исследовался в [2, 3]. В 1967 г. было открыто *параметрическое рассеяние света (spontaneous parametric down-conversion)* в прозрачных двупреломляющих пьезокристаллах [4–6], при котором двухфотонный свет излучается более эффективно. В 1977 г. впервые наблюдался свет с *антигруппировкой фотонов* или, иначе, *субпуассоновский свет* [7], для которого флуктуации фототока были меньше минимально возможных согласно классической теории. Другой вид НКС, *сжатый свет* (также излучаемый наиболее эффективно при параметрических нелинейных процессах) впервые наблюдался в 1985 г. [8–10].

В сжатом свете (точнее, в квадратурно-сжатом свете) флуктуации одной из квадратур подавлены, "сжаты"; при этом он состоит из четного числа фотонов. Фактически два вида НКС, двухфотонный параметрический свет и сжатый свет, описываются как предельные случаи одного и того же состояния (при слабой и сильной накачке, соответственно), которое называется *сжатым вакуумом*. Субпуассоновскому свету соответствует состояние со "сжатыми" флуктуациями энергии.

НКС позволил наблюдать ряд новых оптических эффектов. Отметим прежде всего обнаружение нарушения неравенств Белла [11] (что доказало неприменимость классических моделей со скрытыми параметрами). Это стало возможным благодаря открытию нового вида интерференции интенсивностей, названного впоследствии *двухфотонной интерференцией*. Она бывает двух видов (поляризационная [3, 11] и обычная [12]) и может иметь почти 100%-ную видимость. Именно последнее обстоятельство и позволило наблюдать нарушение неравенств Белла в оптике. Наблюдались также *субпуассоновский дробовой шум* [7–10], *двухфотонная дифракция* [13], *двухфотонная передача изображений* [14]. С помощью двухфотонного света была осуществлена *абсолютная фотометрия* [15]. Можно уже говорить о рождении "двухфотонной оптики" (как волновой, так и геометрической [12–16]).

НКС образуется в результате многоквантовых переходов в веществе и тесно связан с понятием оптической нелинейности вещества [17]. Строго говоря, обычное

тепловое излучение нагретого тела, изучавшееся еще Кирхгофом и Планком, при учете многоквантовых переходов может быть неклассическим, в частности, двухфотонным [17]. Однако практическое получение НКС с заметной интенсивностью требует особых условий (осуществленных в [2–16]). В настоящее время успешно осваиваются новые экспериментальные методы генерации НКС, например, с использованием полупроводниковых лазеров [18–20] и кубической нелинейности полупроводников [21], а также в процессе генерации второй гармоники [22–24].

Интерес к НКС вызван, в основном, возможными его применениями для передачи информации, для сверхточных интерферометрических измерений. Кроме того, НКС позволяет экспериментально продемонстрировать неадекватность классического описания некоторых оптических явлений [25]. Менее известны его фотометрические применения.

Проведены теоретические исследования, посвященные различным аспектам НКС (полную библиографию можно найти в обзорах [25–35], в специальных выпусках журналов [36–38], в монографиях [17, 39]). В то же время отсутствует, по-видимому, систематическое изложение вопроса о наблюдаемых признаках НКС, о влиянии на них квантовой эффективности детектора, линейного поглощения и усиления. В настоящей работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

Каково же определение НКС? Чем он отличается от классического света? Распространено мнение, что вообще любой свет неклассичен, поскольку он "состоит из фотонов". Однако последнее утверждение требует осторожности [25] и, кроме того, известно много работ, обосновывающих адекватность классических представлений об оптических явлениях. По существу, под НКС понимают свет, статистика которого не допускает описание в рамках классической стохастической оптики. Общепринятое наиболее общее формальное определение имеет следующий вид: *свет, для которого  $P$ -распределение Глаубера–Судариана принимает отрицательные значения или является нерегулярной (обобщенной) функцией, называется неклассическим* (определение I).

( $P$ -распределением называют квантовый аналог классического распределения вероятности для амплитуды поля (см. ниже).)

В настоящей работе будет рассмотрен ряд более частных признаков НКС. Часть из них исследуется, по-видимому, впервые. Основное внимание будет уделено *операциональным критериям* НКС, т.е. экспериментально наблюдаемым признакам (сингулярность  $P$ -распределения не относится, очевидно, к таковым). В основе этих признаков лежит известная формула Манделя [40], связывающая непосредственно измеряемую величину, статистику импульсов тока на выходе детектора (*статистику фотоотсчетов*), со статистикой падающего на детектор света. При этом имеется в виду стационарный световой поток в свободном пространстве, который описывается некоторым классическим или квантовым статистическим ансамблем. Будет рассмотрено также влияние на НКС линейного поглощения, усиления и светоделения и связь между НКС и абсолютной (беззатонной) калибровкой фотодетекторов. Для простоты рассматривается в основном экспериментальная схема только с одним детектором, т.е. вопросы корреляции показаний двух детекторов почти не затрагиваются. Не

будут анализироваться и динамические (спектральные) свойства поля, поскольку их квантовое описание мало отличается от классического (см. [35]).

Особое положение в множестве всевозможных состояний поля занимает *когерентное состояние* [41–43], описываемое в некотором приближении свет идеального лазера. Для него  $P$ -распределение имеет вид  $\delta$ -функции, т.е. имеет простейшую сингулярность, не нарушающую условие неотрицательности. Такое распределение классически допустимо, поэтому принято, что когерентное состояние описывает классический свет. Согласно [44] все другие чистые квантовые состояния имеют более сильные сингулярности. Например, квантовое состояние с определенным числом фотонов  $K$  описывается  $P$ -распределением в виде производной  $K$ -го порядка от  $\delta$ -функции. Аппроксимация такого распределения гладкими функциями показывает, что условие неотрицательности нарушено.

Таким образом, когерентное состояние стоит на границе между множествами классических и существенно квантовых состояний поля. (Отметим, однако, что, как показано в [45], возможно сконструировать состояние, более близкое к классическому монохроматическому полю с определенной амплитудой и фазой, чем когерентное.) Тепловой (хаотический, гауссов) свет является представителем классического света. По другую сторону границы находятся сжатый свет и свет с определенным числом фотонов. Эти три типа статистических состояний света, а также их суперпозиции и будут основным предметом обсуждения. Различные признаки неклассичности будут анализироваться на примере нескольких частных состояний поля с параметром  $T$ , позволяющим осуществлять непрерывный переход от неклассического к классическому свету.

Автор стремился сделать изложение максимально доступным для читателей, не знакомых с квантовой оптикой, поэтому в разделах 2 и 3 даются общие сведения о методах наблюдения и описания статистики света. Не требуется знания квантовой теории и в разделе 4, в котором описываются наблюдаемые проявления неклассичности света. В разделе 5 излагаются основы квантовой теории фотоотсчетов. В разделах 6 и 7 на двух типичных примерах НКС рассматриваются различные проявления неклассичности. Разделы 8 и 10 посвящены анализу влияния на статистику света линейного поглощения, усиления и перемешивания двух пучков света с помощью светоделителя. В разделе 9 рассматривается роль квантовой эффективности детектора и возможность ее абсолютного измерения. В приложениях приводятся некоторые математические соотношения, позволяющие, в принципе, экспериментально различить классический и неклассический свет.

## 2. Экспериментальная процедура

### 2.1. Фотоотсчеты

В оптике в подавляющем числе экспериментов информация о поле извлекается из показаний детекторов света (ФЭУ, полупроводниковые фотодиоды и т.д.), основанных на фотоэлектрическом эффекте. Наиболее детальная, неусредненная информация о статистических свойствах стационарного поля в одной точке пространства-времени получается при использовании счетчика фото-

нов, имеющего достаточно малую площадь и время инерции. При этом периодически подсчитывается число импульсов на выходе детектора  $m$  (*число фотоотсчетов*) в течение некоторого фиксированного малого интервала выборки  $T$ . Это число флуктуирует от опыта к опыту. Многократное повторение этой процедуры дает набор чисел  $\{m_i\}$ . Статистическая обработка полученного массива чисел позволяет, в принципе, определить полные вероятностные характеристики дискретной случайной величины  $m$ . Последние можно задать распределением вероятностей  $p_m$  ( $\sum p_m = 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) или *моментами* этого распределения

$$\langle m^k \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m^k p_m, \quad (2.1)$$

где  $k = 1, 2, \dots$

### 2.2. Антигруппировка отсчетов

Простейшими двумя числовыми параметрами статистики фотоотсчетов являются среднее число отсчетов  $\langle m \rangle$  и их дисперсия

$$\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2.$$

Из них определяются *фактор Фано* и *параметр группировки отсчетов*

$$F \equiv \frac{\langle \Delta m^2 \rangle}{\langle m \rangle}, \quad g_2 \equiv 1 + \frac{\langle \Delta m^2 \rangle - \langle m \rangle}{\langle m \rangle^2} = 1 + \frac{F - 1}{\langle m \rangle}. \quad (2.2)$$

Эти параметры характеризуют отличие статистики от пуассоновской. В случае пуассоновской статистики  $\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m \rangle$ , так что  $F = g_2 = 1$ , поэтому при  $F < 1$  или  $g_2 < 1$  говорят о *субпуассоновской* статистике фотоотсчетов или о субпуассоновском неклассическом свете (эквивалентный, как правило, термин — эффект *антигруппировки отсчетов* или *фотонов*; однако иногда эти понятия следует различать [29, 46]). Относительные флуктуации числа отсчетов от выборки к выборке характеризуются параметром  $\langle \Delta m^2 \rangle / \langle m \rangle^2 = F / \langle m \rangle$ , который определяет отношение шум/сигнал.

Что же необычного в свойстве потока фотоэлектронов  $\langle \Delta m^2 \rangle < \langle m \rangle$  (или  $g_2 < 1$ )? Почему его считают признаком неклассичности света? Само по себе оно тривиально. Им обладает, например, поток электронов в вакуумном диоде без насыщения (когда дробовой шум подавляется пространственным зарядом). Парадокс возникает лишь при некоторой интерпретации наблюдаемых импульсов на выходе фотодетектора.

### 2.3. Корпускулярная модель

Простейшая "корпускулярная" модель фотоэффекта основана на наглядном представлении светового пучка, падающего на катод детектора, в виде потока фотонов. Предположим для простоты, что квантовая эффективность детектора  $\eta$  равна 100 %, тогда прибытие каждого фотона вызывает испускание одного фотоэлектрона. В результате поток электронов просто дублирует поток фотонов и условие  $\langle \Delta m^2 \rangle \neq \langle m \rangle$  означает лишь, что поток фотонов имеет некоторую регулярность, фотоны распределены во времени не хаотически. При  $g_2 > 1$  фотоны имеют тенденцию как бы группироваться вместе, а при  $g_2 < 1$  — "отталкиваться". (Подчеркнем, что эти термины не имеют отношения к собственным свой-

ствам фотонов, как гипотетических элементарных частиц, они характеризуют лишь статистические свойства источника света.)

Так, в экспериментах [7] антигруппировка наблюдалась при резонансной флюоресценции одиночных атомов, возбуждаемых лазером. После излучения фотона возбужденным атомом его повторное возбуждение наступает лишь через некоторый конечный интервал времени  $\Delta t$ , поэтому моменты излучения двух последующих фотонов отделены интервалом, не меньшим  $\Delta t$ , т.е. тесные пары фотонов излучаться не могут. Это и дает субпуассоновскую статистику отсчетов. (Пуассоновское распределение предполагает равноправность всех моментов времени, поэтому последовательные отсчеты могут наблюдаться сколь угодно близко.) В идеальном случае полной антигруппировки фотоны излучаются регулярно через определенный интервал времени, при этом число  $m$  не флуктуирует, так что  $F = g_2 = \langle \Delta m^2 \rangle = 0$ .

Итак, условие  $g_2 < 1$  является совершенно естественным в рамках корпускулярной модели света. Эта примитивная модель фотонов-шариков качественно описывает многие эксперименты. В ее рамках любой свет является неклассическим и выделение подмножества классических статистических состояний света не имеет смысла, поскольку оно оказывается пустым. С ней связаны общеизвестные трудности, возникающие при описании интерференции и дифракции света.

#### 2.4. Квантовая модель

Для точного количественного описания всех наблюдаемых эффектов необходимо использовать, конечно, квантовую теорию как вещества, так и поля. При этом число фотонов  $n$  становится оператором. Его можно выразить через два "базисных" оператора уничтожения  $a$  и рождения  $a^\dagger$  фотонов:  $\hat{n} = a^\dagger a$ . Квантовая теория предсказывает (исходя из определенной модели источника света) распределение числа фотонов  $p_n$  и моменты этого распределения  $\langle n^k \rangle$ . Все известные эксперименты очень хорошо согласуются с предсказаниями квантовой оптики. В случае идеального детектора наблюдаемая статистика отсчетов дублирует квантовую статистику фотонов, задаваемую матрицей плотности поля (см. раздел 5). В рамках точной квантовой теории субпуассоновская статистика отсчетов также не вызывает никакого удивления.

Однако имеется третий способ описания статистики фотоотсчетов, использующий полуклассическую модель фотоэффекта и не допускающий субпуассоновскую статистику отсчетов. В его рамках и возникает понятие НКС.

### 3. Полуклассическая теория фотоотсчетов

В полуклассической модели атомы детектора рассматриваются квантовомеханически, а поле световой волны — классически. При этом статистические свойства поля задаются некоторыми законами распределения вероятностей. Квантовая теория поля намного сложнее классической стохастической электродинамики. Кроме большей сложности математического аппарата, квантовый формализм отличается тем, что его интерпретация (как правило, используется "копенгагенский" вариант интерпретации) связана с отказом от некоторых привычных физических концепций (что находит выражение в принципе дополнительности) и поэтому естественно пытаться по возможности описывать электромагнитное поле

классически, хотя бы в оптическом и радиодиапазонах. Во многих случаях это удается, и было сделано много попыток "узаконить" такой подход. Однако за последние десятилетия было обнаружено несколько оптических эффектов, которые не удается адекватно описать таким упрощенным способом. Термин НКС как раз и выделяет эти случаи.

#### 3.1. Одномодовый детектор

Используем максимально идеализированную модель. Пусть площадь детектора  $A$  равна площади когерентности  $A_{\text{coh}}$  падающего на него пучка света, а интервал выборки  $T$  равен времени когерентности  $\tau_{\text{coh}}$  (которое имеет порядок обратной ширины спектра,  $\tau_{\text{coh}} \sim 2\pi/\Delta\omega$ ; в пределах времени когерентности интенсивность поля заметно не изменяется). Такой детектор "видит" только одну моду поля, т.е. одну независимую колебательную степень свободы (необходимые поправки к этой идеализации будут найдены в разделе 9). Динамическое или статистическое описание одной моды поля эквивалентно описанию гармонического осциллятора. (Многомодовые детекторы усредняют флуктуации поля во времени и пространстве, что приводит в пределе к тривиальной пуассоновской статистике отсчетов, независимой от индивидуальных свойств поля (см., например, [47]).)

В случае стационарного квазимонохроматического пучка света поле на детекторе имеет вид  $E_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$ , где  $E_0$  и  $\phi$  — случайные медленно изменяющиеся функции времени. Характерное время изменения этих величин и называют временем когерентности. Вероятность появления очередного фотоэлектрона в детекторе принимается пропорциональной интенсивности  $E_0^2$  пучка, падающего на катод детектора в данный момент времени.

Удобно перейти к безразмерной величине  $n$  — энергии поля, заключенной в объеме когерентности  $V_{\text{coh}} = c\tau_{\text{coh}}A_{\text{coh}}$  (совпадающего по нашему предположению с объемом детектирования  $V_{\text{det}} = cTA$ ) и деленной на энергию одного фотона:

$$n \equiv \frac{E_0^2 V_{\text{coh}}}{8\pi\hbar\omega_0}.$$

В квантовой теории нашей классической переменной  $n$  соответствует оператор числа фотонов в одной моде  $\hat{n}$ , имеющий лишь дискретный целочисленный спектр значений 0, 1, 2, ... Здесь же  $n$  — просто энергия поля в некоторых удобных безразмерных единицах, которая может принимать непрерывный ряд значений от нуля до бесконечности. Соответственно, статистика фотоотсчетов в квантовой теории определяется дискретным распределением энергии поля  $p_n$ , а в классической — непрерывным распределением  $P(n)$ . Именно это различие в типе распределений и делает возможным операциональное (по статистике наблюдаемых фотоотсчетов) определение НКС.

Пусть, например, световой поток, падающий на детектор, имеет мощность  $I = 10^{-9}$  Вт, длину волны  $\lambda = 0,5$  мкм и ширину спектра  $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 10^9$  Гц, тогда  $n = I\lambda/hc\Delta f = 2,5$  фотона.

#### 3.2. Формула Мандела

Вероятность появления очередного фотоэлектрона в интервале  $(t, t + dt)$  принимается равной  $\eta n dt/T$ , где безразмерный коэффициент пропорциональности  $\eta$

называют квантовой эффективностью детектора. Среднее число отсчетов за время выборки  $T$  имеет вид  $\langle m \rangle = \eta \langle n \rangle$ . Эффективность современных детекторов приближается к 100 %, и мы полагаем детектор идеальным,  $\eta = 1$  (в разделе 9 будут учтены поправки за счет  $\eta < 1$ ).

Предположим, что интенсивность поля  $n$  постоянна, не флуктуирует (таково поле идеального лазера). При этом все моменты времени эквивалентны: очередной фотозлектрон может с одинаковой вероятностью  $n dt/T$  возникнуть в любом интервале времени  $dt$ , принадлежащем  $T$ . Эта модель приводит по правилам теории вероятностей к пуассоновской статистике числа отсчетов (см., например, [48]):

$$p_m = \frac{n^m \exp(-n)}{m!}. \quad (3.1)$$

Таким образом, даже в случае пучка света с постоянной амплитудой  $E_0$  (идеальный лазер) фотозэлектроны рождаются в случайные моменты времени (хаотически), что приводит к пуассоновскому дробовому шуму. В среднем за время  $T$  наблюдается  $n$  отсчетов. В нашем примере  $\langle m \rangle = n = 2,5$  фотонов и с вероятностями  $p_m = 0,08; 0,20; 0,26; 0,21; 0,13; 0,07$  будут наблюдаться  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  отсчетов соответственно. Квантовые флуктуации ("фотонный шум") вносятся в полуклассическую теорию предположением о вероятностном характере передачи энергии от поля к детектору (см., например, [35]). Формула (3.1) дает отображение  $n \rightarrow p_m$ ; она выражает математическую процедуру "дискретизации" и "стохастизации", когда детерминированной величине  $n$  ставится в соответствие случайная величина  $m$ , принимающая дискретные значения  $m = 0, 1, 2 \dots$  с вероятностями  $p_m$ .

Кажется очевидным, что все другие, не лазерные, источники света могут вызывать лишь дополнительные, "избыточные" шумы фототока, связанные с нестабильностью их интенсивности  $n$ . Избыточные флуктуации можно описать, полагая (единственный) параметр пуассоновского распределения  $n$  случайной величиной. В классической стохастической электродинамике вероятность того, что интенсивность падающего на детектор пучка света (выраженная в соответствующих единицах) принимает некоторое значение в интервале  $(n, n + dn)$  равна  $P(n) dn$ . Плотность распределения  $P(n)$  должна удовлетворять аксиомам теории вероятностей: условиям нормировки  $\int_0^\infty P(n) dn = 1$  и неотрицательности  $P(n) \geq 0$ . Дополнительно усредняя пуассоновское распределение по распределению  $P(n)$  величины  $n$ , получаем известную полуклассическую формулу Манделя [40]

$$p_m = \frac{1}{m!} \int_0^\infty n^m \exp(-n) P(n) dn, \quad (3.2)$$

$$P(n) \geq 0, \quad \int_0^\infty P(n) dn = 1.$$

Таким образом, распределение  $p_m$  наблюдаемой дискретной случайной величины  $m$  связано с предполагаемым распределением интенсивности падающего света  $P(n)$  "преобразованием Пуассона". В (3.2) заложена двойная стохастичность: за счет шумов "дискретизации" и за счет флуктуаций интенсивности света. Вторая составляющая получила название избыточный шум.

Заметим, что согласно (3.2) величины  $a_m \equiv m! p_m / p_0$  можно рассматривать как моменты модифицированного распределения  $\tilde{P}(n) \equiv P(n) \exp(-n) / p_0$  (множитель  $1/p_0$  играет роль нормирующего) [39].

### 3.3. Факториальные моменты

Как уже говорилось, результаты эксперимента по счету фотонов можно представить в виде набора вероятностей распределения отсчетов  $p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) или моментов этого распределения  $\langle m^k \rangle$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Эти два набора связаны формулой (2.1). Удобно ввести также факториальные моменты распределения  $p_m$

$$G_k \equiv \langle m(m-1) \dots (m-k+1) \rangle = \sum_{m=k}^\infty \frac{m!}{(m-k)!} p_m = \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+k)!}{m!} p_{m+k}. \quad (3.3)$$

Они являются линейными комбинациями обычных моментов  $\langle m^k \rangle$ , например,  $G_2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle$ . Если известны обычные моменты  $\langle m^i \rangle$  для  $1 \leq i \leq k$ , то можно вычислить и факториальные моменты  $G_k$ , и наоборот.

Можно показать, что факториальные моменты дискретного распределения отсчетов  $p_m$ , определяемого из (3.2), совпадают с обычными моментами непрерывного распределения энергии  $P(n)$ :

$$G_k = \langle n^k \rangle \equiv \int n^k P(n) dn. \quad (3.4)$$

Таким образом, благодаря свойствам пуассоновского преобразования (3.2), расчет обычных моментов  $\langle n^k \rangle$  исходного распределения энергии света  $P(n)$  дает факториальные моменты  $G_k$  распределения отсчетов  $p_m$ , а расчет моментов модифицированного распределения  $P(n) \exp(-n)$ , "укороченного" экспонентой, дает вероятности отсчетов  $p_m$ . Из последних можно построить обычные моменты отсчетов  $\langle m^k \rangle$  (см. (2.1)).

В квантовой теории в случае идеального детектора  $p_m = \rho_m$ , т.е.  $G_k$  являются также факториальными моментами дискретного распределения фотонов  $\rho_m$  (здесь  $\rho$  — оператор плотности).

Можно выразить  $p_m$  обратно через  $G_k$ . Разложив в (3.2) экспоненту в ряд, находим с учетом (3.4)

$$p_m = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} G_{m+k}. \quad (3.4a)$$

Из условий нормировки для  $p_m$  следует

$$\sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k! m!} G_{m+k} = 1. \quad (3.4b)$$

### 3.4. Распределение амплитуды

При описании поля с помощью распределения энергии  $P(n)$  игнорируется информация о фазе колебания  $\phi$ . Последнюю можно, в принципе, измерить с помощью гомодинного детектирования, т.е. образуя суперпозицию исследуемого поля с опорным лазерным пучком со стабильной фазой. Для полного статистического описания моды надо использовать двумерную плотность вероятности  $P_z(z)$ , причем  $\int d^2z P_z(z) = 1$ . Здесь

$z = z' + iz'' = |z| \exp(i\phi)$  — комплексная амплитуда колебания, которую будем нормировать так, чтобы

$$|z|^2 = n \equiv \frac{E_0^2 V_{\text{coh}}}{8\pi\hbar\omega_0};$$

интегрирование проводится по всей комплексной плоскости, играющей роль фазового пространства моды, и  $d^2z \equiv dz' dz'' = |z| d|z| d\phi$  — элемент этой плоскости. Теперь (3.2) принимает вид

$$p_m = \frac{1}{m!} \int d^2z P_z(z) |z|^{2m} \exp(-|z|^2). \quad (3.5)$$

Выразим распределение энергии  $P(n)$  через распределение комплексной амплитуды  $P_z(z) \equiv P_z(z', z'')$ . В общем случае

$$P(n) = P_z(|z|) \frac{d|z|}{dn} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi P_z(\sqrt{n} \cos \phi, \sqrt{n} \sin \phi). \quad (3.6)$$

В случае стационарного поля  $P_z$  не зависит от фазы, при этом  $P(n) = \pi P_z(\sqrt{n})$ .

При суперпозиции двух независимых колебаний распределение суммарного поля равно, в соответствии с правилами теории вероятностей, свертке исходных распределений

$$\begin{aligned} P_z(z) &= \int d^2z_1 P_z^{(1)}(z - z_1) P_z^{(2)}(z_1) = \\ &= \int d^2z_1 P_z^{(1)}(z_1) P_z^{(2)}(z - z_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть распределение  $P^{(2)}(z) = \delta^{(2)}(z - z_0) = \delta(z' - z'_0) \times \delta(z'' - z''_0)$  описывает лазерный свет с определенной комплексной амплитудой  $z_0$ , тогда  $P_z(z) = P_z^{(1)}(z - z_0)$ . Таким образом, при гомодинировании исходное распределение  $P_z^{(1)}(z)$  просто смещается в плоскости  $z$  без изменения формы. Следовательно, при этом статус состояния не изменяется: согласно определению I НКС остается неклассическим, а классический свет — классическим.

## 4. Наблюдаемые признаки НКС

### 4.1. Мера Ли

Выше было показано, что свойство неклассичности инвариантно к гомодинированию с помощью лазерного поля, описываемого когерентным состоянием с распределением амплитуды  $P_z(z) = \delta^{(2)}(z - z_0)$ .

Это не так при суперпозиции исследуемого света с тепловым полем. Последнее имеет экспоненциальное распределение интенсивности, при свертке с которым исходное распределение "заглаживается" тем сильнее, чем больше интенсивность теплового поля. При этом сингулярные и отрицательные участки исчезают, и в результате НКС может стать классическим (примеры даны ниже). Итак, суперпозиция с когерентным полем не изменяет характер исходного поля в отличие от суперпозиции с тепловым полем, которая "портит" неклассичность.

Удобную меру неклассичности предложил Ли [49, 50]. Пусть  $T$  — среднее число фотонов в одной моде вспомогательного теплового поля. Минимальное значение

$T = T_0$ , при котором  $P_z(z)$  остается неотрицательной регулярной функцией, можно принять в соответствии с определением I в качестве количественной меры неклассичности. Ниже будет показано, что  $T_0$  изменяется от 1 для максимально неклассических ( $K$ -фотонных) состояний до 0 для классических. Таким образом, добавление теплового поля со средним числом фотонов в одной моде, равным 1, заведомо делает любой свет классическим. В случае сжатого вакуума  $T_0 = \sqrt{N} = \Gamma \ll 1$  при слабом сжатии и  $T_0 = 1/2$  при  $\Gamma \gg 1$  ( $\Gamma$  — показатель усиления). Величину  $T_0$  можно, в принципе, измерить: для этого к исследуемому свету надо добавить (с помощью, например, светоделителя (см. раздел 10)) тепловой пучок с регулируемой интенсивностью. Однако при этом остается открытым вопрос: как определить экспериментально момент пропадания неклассичности при увеличении  $T_0$ ?

### 4.2. Операциональное определение неклассичности

Вернемся к формуле Манделя (3.2). Для пуассоновского распределения характерно равенство дисперсии среднему значению:  $\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m \rangle$ . Таким образом, свет идеального лазера дает  $g_2 = F = 1$ . Казалось бы, все другие источники света из-за нестабильности их интенсивности  $n$  могут лишь увеличить шумы фототока. Следовательно, наблюдение субпуассоновских флуктуаций с  $g_2 < 1$  в полуклассической теории представляется невозможным.

Эти качественные рассуждения подтверждаются расчетом. Из (3.2) следует  $\langle m \rangle = \langle n \rangle$  и  $\langle \Delta m^2 \rangle = \langle m \rangle + \langle \Delta n^2 \rangle$ . Поскольку  $P(n) \geq 0$  приводит к  $\langle \Delta n^2 \rangle \geq 0$ , то  $\langle \Delta m^2 \rangle \geq \langle m \rangle$ , т.е. всегда должны соблюдаться условия  $g_2 \geq 1$ ,  $F \geq 1$ . При этом

$$g_2 \equiv 1 + \frac{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2}{\langle m \rangle^2} = 1 + \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2}.$$

Таким образом, значение  $g_2 = 1$  является нижней границей в случае полуклассической теории фотоотчетов:  $g_{2 \text{ clas}} \geq 1$ , и простейшим наблюдаемым признаком НКС является неравенство  $g_{2 \text{ exp}} < 1$ , т.е. антигруппировка фотоотчетов. Ниже будет показано, что в общем случае для неклассичности света достаточно выполнения хотя бы одного из бесконечного набора условий вида  $D_k < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $D_1 \equiv g_2$ ). Но даже если ни одно из этих условий не выполнено, свет все же может быть неклассическим (см. приложение I).

Отметим, что и в квантовой теории имеются определенные ограничения на моменты (см. приложение I). Например, из  $\langle \Delta m^2 \rangle \geq 0$  следует  $g_2 \geq 1 - 1/\langle m \rangle$ . Равенство здесь достигается в случае состояний с определенным числом фотонов.

Естественно принять следующее операциональное определение НКС: *если наблюдаемая статистика фотоотчетов не согласуется с полуклассической формулой Манделя (3.2) при  $P(n) \geq 0$ , т.е. если падающий на детектор свет нельзя описать некоторым распределением энергии  $P(n)$ , то свет называется неклассическим (определение II).*

В частности, если свет порождает антигруппировку отсчетов, то он неклассичен (например, если  $G_1 = \langle m \rangle = 10$  и  $G_2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = 99$ ).

Можно судить о неклассичности и по вероятностям отсчетов  $p_m$ . В рамках квантовой теории, в принципе, нет

никаких ограничений на измеряемые наборы чисел  $\{p_m\}$  (кроме, конечно, условия нормировки  $\sum p_m = 1$ ). Наш идеализированный детектор дает непосредственно информацию о диагональных компонентах матрицы плотности  $\rho$  для одномодового поля в фоковском представлении:  $p_m = p_n = \rho_{mm}$ . Следовательно, если пользоваться корпускулярными представлениями и определять статистику отсчетов через дискретное распределение энергии поля, то любые измеренные наборы чисел  $\{p_m\}$  допустимы.

С другой стороны, полуклассическая формула (3.2), т.е. преобразование Пуассона, ограничивает определенным образом наблюдаемые наборы, что и позволяет на основании эксперимента разбить множество всевозможных статистических состояний поля на два класса, т.е. позволяет отличать классический и неклассический свет. Например, в разделе 4.4 мы покажем, что числа  $p_0 = 0, 23$ ;  $p_1 = 0, 35$  и  $p_2 = 0, 22$  несовместны с (3.2) при  $P(n) \geq 0$ .

В общем случае возникает задача применения определения  $\Pi$  к результатам эксперимента. Непосредственная проба на неклассичность включает, очевидно, попытку обращения формулы Манделя (3.2), т.е. определение функции  $P(n)$  через измеренный набор чисел  $\{p_m\}$  или  $\{G_k\}$ , и, если это удалось, последующую проверку условия неотрицательности,  $P(n) \geq 0$ .

**4.3. Проблема моментов**

Различные способы обращения преобразования (3.2) описываются, например, в [39, 48]. В общем случае эта процедура нетривиальна и неоднозначна, она связана с известной математической проблемой моментов (см., например, [51–54]). При этом приходится оперировать обобщенными функциями типа производных от  $\delta$ -функции.

В нашем случае задачу можно поставить следующим образом. Известны моменты  $G_k$  неотрицательной функции  $P(x) \geq 0$  (времененно заменяем  $n$  на  $x$ ). По определению  $G_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(x) dx > 0$  (полагаем  $P(x) \propto \theta(x)$ , где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция). Перейдем к фурье-представлению

$$\tilde{P}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \exp(i\omega x) dx = \int_0^{\infty} P(x) \exp(i\omega x) dx. \tag{4.1}$$

Эта функция называется характеристической. Если заменить  $i\omega$  на  $-s$  ( $s \geq 0$ ), т.е. использовать преобразование Лапласа, то получим производящую функцию

$$C(s) \equiv \int_0^{\infty} P(x) \exp(-sx) dx = \tilde{P}(is). \tag{4.2}$$

Отметим, что  $\tilde{P}(0) = C(0) = 1$  и

$$\frac{d}{ds} C(s) \equiv - \int_0^{\infty} x P(x) \exp(-sx) dx < 0.$$

Вообще, все четные производные  $C(x)$  положительны, а нечетные отрицательны, при этом  $C(s)$  — непрерывно убывающая от 1 до 0 функция (такие функции называются абсолютно монотонными [54]). Нарушение этих свойств может, в принципе, служить одним из признаков НКС.

Дифференцирование функций  $\tilde{P}(\omega)$  или  $C(s)$  позволяет найти моменты  $G_k$  и вероятности  $p_m$ . Разложение экспоненты в ряд около нуля

$$\tilde{P}(\omega) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k G_k}{2\pi k!}, \quad C(s) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k G_k}{k!} \tag{4.3}$$

показывает, что моменты  $G_k$  функции  $P(x)$  определяют коэффициенты степенных рядов для ее фурье- и лаплас-образов. Обратное фурье-преобразование  $\tilde{P}(\omega)$  дает формальное представление  $P(x)$  в виде суммы производных от  $\delta$ -функции

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\omega) \exp(-i\omega x) \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} G_k \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^k \exp(-i\omega x) \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} G_k \delta^{(k)}(x), \end{aligned} \tag{4.4}$$

здесь  $\delta^{(k)}$  — производная  $\delta$ -функции  $k$ -го порядка. Полагая  $x = n$ , получаем формальное решение задачи восстановления распределения энергии по факториальным моментам фотоотсчетов. Пусть, например, только один момент отличен от нуля:  $G_k = \delta_{kK}$ , тогда  $P(n) = \delta^{(K)}(n)/K!$ . Иначе говоря, (обобщенная) функция  $\delta^{(k)}(x)$  обладает лишь одним моментом. Конечно, такое распределение неприемлемо в классической статистической оптике.

С другой стороны, как уже отмечалось, согласно формуле Манделя вероятности  $p_m$ , умноженные на  $m!$  и деленные на  $p_0$ , можно рассматривать как моменты модифицированного распределения

$$\tilde{P}(n) \equiv P(n) \exp(-n) \frac{1}{p_0}$$

(множитель  $1/p_0$  играет роль нормирующего)

$$a_m \equiv m! \frac{P_m}{p_0} = \int_0^{\infty} n^m \tilde{P}(n) dn. \tag{4.5}$$

Следовательно, можно восстановить  $P(n)$  (или  $C(s)$ ) также и по вероятностям фотоотсчетов (напомним, что вероятности  $p_k$ , умноженные на  $(-1)^k$ , являются коэффициентами разложения  $C(s)$  в ряд около точки  $s = 1$ ). Действительно, замена в (4.4)  $P(n) \rightarrow p_0 \tilde{P}(n) \exp n$ ,  $G_k \rightarrow k! p_k / p_0$  дает

$$P(x) = \exp x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p_k \delta^{(k)}(x). \tag{4.6}$$

Рассмотрим чистое квантовое состояние  $|K\rangle$  с определенным числом фотонов  $K$ . Такое состояние согласно квантовой теории дает измеряемое идеальным детектором распределение отсчетов в виде  $p_m = \delta_{mK}$ ; при этом отсчеты не флуктуируют, всегда  $m = K$ . Согласно (4.6) это распределение удовлетворяет (3.2) при

$$P(n) = (-1)^K \delta^{(K)}(n) \exp n.$$

Ясно, что эта сингулярная функция не может описывать классическое распределение интенсивности света. Это очевидно при использовании представления  $\delta$ -функции в

виде предела какой-либо регулярной функции: производные этой функции принимают отрицательные значения. Следовательно,  $K$ -фотонное состояние соответствует НКС.

При конкретных расчетах удобнее сначала рассчитывать функцию  $\tilde{P}(\omega)$  (или  $C(s)$ ), а потом уже находить ее фурье- (или лаплас-) образ  $P(x)$ . Подставим в качестве примера в (4.4) факториальные моменты теплового поля  $G_k = k!N^k$ , тогда

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-N)^k \delta^{(k)}(x),$$

где  $N$  — среднее число фотонов. Чтобы убедиться, что этот ряд представляет регулярную функцию, произведем фурье-преобразование согласно (4.1):

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-N)^k \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i\omega x) \delta^{(k)}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (i\omega N)^k = (1 - i\omega N)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь использовано определение функции  $\delta^{(k)}$ , согласно которому интеграл равен производной  $k$ -го порядка функции  $\exp(i\omega x)$  при  $x = 0$ , умноженной на  $(-1)^k$ , т.е.  $(-i\omega)^k$ . Обратное фурье-преобразование дает регулярное распределение

$$P(x) = \frac{\exp(-x/N)}{N}, \quad x > 0.$$

Отметим, что иногда удобнее искать  $P(x)$  в виде разложения по полиномам Лагерра [39, 48].

В эксперименте мы всегда имеем ограниченный набор чисел  $a_1, \dots, a_K$ , по которому полностью восстановить функцию  $C(s)$  или  $P(n)$  невозможно. Дополнительные трудности дает ограниченная точность измерения статистических данных. Тем не менее недавно были описаны успешные эксперименты по восстановлению квазираспределения Вигнера по статистике фототока [55].

#### 4.4. Связи между моментами

Рассмотрим альтернативный подход к проблеме экспериментального обнаружения неклассичности. Эксперимент дает массив чисел отсчетов  $\{m_i\}$ . Из этих чисел можно сконструировать наборы вероятностей  $\{p_k\}$ , факториальных моментов  $\{G_k\}$  или, в общем случае, наборы обобщенных моментов  $\{a_k(s)\}$  при некоторых значениях параметра  $s$ ; так,  $a_k(0) = G_k$  и  $a_k(1) = k!p_k/p_0$  (см. приложение II). При фиксированном  $s$  получаем некоторый упорядоченный набор вещественных чисел  $\{a_k\}$ . Согласно классической теории фотоотсчетов эти числа являются моментами некоторой неотрицательной функции  $P(x) \exp(-sx) \geq 0$ , т.е.  $a_k = \int x^k P(x) \exp(-sx) dx$ , и, следовательно, они должны быть ограничены целым рядом неравенств (см. приложение I и [51–59]).

Например, согласно (I.10) для  $1 \leq m \leq n$

$$a_m a_n \leq a_{m-1} a_{n+1}, \quad D_m \equiv \frac{a_{m-1} a_{m+1}}{a_m^2} \geq 1. \quad (4.7)$$

Подчеркнем, что (4.7) являются необходимыми, но не достаточными условиями классичности. Обратные неравенства дают достаточные, но не необходимые признаки неклассичности.

У неравенств (4.7) простой геометрический смысл. Обозначим  $b_m \equiv \ln a_m$ . Тогда  $\Delta_{m-1} \equiv b_m - b_{m-1}$  — приращение функции (дискретного аргумента)  $b_m$  при сдвиге  $m-1 \rightarrow m$ . Теперь (4.7) принимают вид  $\Delta_{m-1} \leq \Delta_n$ , т.е. приращение в точке  $m-1$  меньше или равно приращению в точке  $n \geq m$ . Это означает, что функция  $b_m \equiv \ln a_m$  в случае классического света всюду вогнута, а в случае НКС имеет выпуклости. Условие  $D_m < 1$  означает локальную "неклассическую" выпуклость на графике функции  $b_m \equiv \ln a_m$  в точке  $m$ .

Подставляя в (4.7)  $a_k = k!p_k/p_0$  или  $a_k = g_k \equiv G_k/G_1^k$  ( $g_0 = g_1 = 1$ ), получаем два бесконечных ряда достаточных условий неклассичности

$$\begin{aligned} D_k(1) &= \frac{(k+1)p_{k-1}p_{k+1}}{kp_k^2} < 1, \\ D_k(0) &= \frac{g_{k-1}g_{k+1}}{g_k^2} < 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Будем называть эти условия  $D_k$ -критериями. В частности, условие  $D_1(0) = g_1 < 1$  совпадает с наиболее известным критерием неклассичности — антигруппировкой фотоотсчетов. Условие  $D_k(0) < 1$  при  $k \geq 2$  иногда называют антигруппировкой высших порядков. Эти величины могут служить и количественными мерами степени неклассичности:  $D_k = 0$  соответствует максимальной неклассичности и  $D_k = 1$  — минимальной (однако следует помнить о зависимости этих величин от выбора параметра  $s$ ).

Рассмотрим примеры применения  $D_k$ -критериев (4.8).

1. Идеальный лазерный свет дает пуассоновское распределение (3.1) с параметром  $\langle n \rangle = N = |z_0|^2$ . При этом  $a_k = G_k = N^k$ , так что  $D_k(0) = D_k(1) = 1$ . График функции  $b_k = \ln a_k = k \ln N$  является прямой линией. Таким образом, это распределение лежит на границе между классическим и неклассическим случаями.

2. Тепловое распределение дает  $G_k = k!N^k$ ,  $a_k = k! [N/(N+1)]^k$ , так что  $D_k(0) = D_k(1) = (k+1) \times 1/k > 1$ , и графики функций  $\ln G_k$  и  $\ln(p_k/k!)$  вогнутые.

3. Пусть вероятность для некоторого числа отсчетов  $k$  обращается в нуль:  $p_{k-1} \neq 0$ ,  $p_k = 0$  и  $p_{k+1} \neq 0$ , тогда  $D_{k-1}(1) = D_{k+1}(1) = 0$  и график  $\ln(p_k/k!)$  имеет две соседние "неклассические" выпуклости. Аналогично, если  $p_{k-1} = 0$ ,  $p_k \neq 0$  и  $p_{k+1} = 0$ , то  $D_k(1) = 0$  и имеется одна "неклассическая" выпуклость. Любое состояние с "обрезанным" распределением вероятностей отсчетов, когда начиная с некоторого номера все вероятности равны нулю, также неклассично.

Рассмотренные выше  $D_k$ -критерии являются весьма частными (хотя свойство субпуассоновости важно для приложений). Экспериментальная проверка определенной моды светового поля на неклассичность, строго говоря, должна включать измерение бесконечного множества моментов или вероятностей и проверку бесконечного множества составленных из них неравенств. Общие необходимые и достаточные признаки классичности приведены в приложении I. Они используют матрицы Ганкеля  $H_K$  и  $H_{K'}$ , составленные из моментов  $a_0 = 1$ ,  $a_1, \dots, a_{2K}$ . Эти матрицы в классическом случае должны быть положительно-определенными. Практически, конечно, максимальный порядок измеренных моментов  $G_k$  или вероятностей  $p_k$  ограничен (как и точность их измерения), так что в распоряжении экспериментатора имеется матрица  $H_K$  определенного порядка и проверка



на неклассичность сводится к определению знака  $\det H_K$  или  $K + 1$  собственных значений  $\lambda_0, \dots, \lambda_K$  этой матрицы (можно также использовать критерий Сильвестра — положительность всех угловых миноров  $H_K$  [60]). Если какие-либо из этих величин отрицательны, то свет неклассичен. Если все положительны, то надо переходить к матрице следующего порядка. Можно, кроме того, измерять  $D_k(s)$  при некотором оптимальном значении  $s$ , зависящем от состояния исследуемого света.

#### 4.5. Сжатие квадратур

Определим две квадратуры амплитуды поля в моде

$$q \equiv \sqrt{2} \operatorname{Re}(z), \quad p \equiv \sqrt{2} \operatorname{Im}(z). \quad (4.9)$$

Часто признаком НКС считается "сжатие" флуктуаций одной из квадратур ниже "вакуумного" значения,  $\langle \Delta q^2 \rangle < 1/2$  (см. (6.4)). Квадратуры некоторого слабого поля можно исследовать, добавляя к нему сильное когерентное поле с регулируемой фазой (гомодинное детектирование) [35], т.е. их можно считать наблюдаемыми величинами. При этом флуктуации фототока, порожденного суперпозиционным полем, пропорциональны флуктуациям определенной (в зависимости от фазы гомодина) квадратуры слабого поля, т.е. наблюдаемое распределение тока совпадает с распределением  $P(q)$  одной из квадратур (неупорядоченным [35]). Наблюдаемые признаки неклассичности (антигруппировка и т.д.) оказываются связанными со статистикой квадратуры. Так как фактор Фано для фототока равен удвоенной дисперсии определенной квадратуры слабого поля,  $F = 2\langle \Delta q^2 \rangle$  (см. (6.21)), то условия сжатия квадратуры и антигруппировки отсчетов ( $F < 1$ ) совпадают. Однако само по себе условие сжатия  $\langle \Delta q^2 \rangle < 1/2$  не противоречит классической теории, в которой нет никаких ограничений на  $P(q, p)$  и  $\langle \Delta q^2 \rangle$ . Лишь в рамках квантовой теории это условие связано с нерегулярностью  $P_z$ -распределения (см. раздел 6).

### 5. Квантовая теория фотоотсчетов

Квантовая теория фотодетектирования излагается, например, в [39, 41, 47], и мы дадим лишь краткую сводку необходимых результатов. Используемые обозначения Дирака подробно поясняются в [47, 61].

#### 5.1. Дискретное представление

В квантовой теории статистика фотоотсчетов (как и все другие наблюдаемые величины) определяется оператором плотности  $\rho$  для свободного поля, падающего на детектор.

При использовании дискретного фоковского базиса диагональный матричный элемент в случае нашего идеального детектора непосредственно дает вероятность наблюдения  $n$  отсчетов

$$p_n = \rho_{nn} \equiv \langle n | \rho | n \rangle. \quad (5.1)$$

В случае чистого состояния  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , так что  $p_n = |\langle n | \psi \rangle|^2$ .

Моменты (обычные) определяются как

$$\langle n^k \rangle = \langle (a^\dagger a)^k \rangle = \operatorname{tr}(\rho n^k) = \sum_n \rho_{nn} n^k. \quad (5.2)$$

Нормальные (нормально-упорядоченные) моменты общего вида вычисляются в дискретном представлении следующим образом:

$$G_{mm} \equiv \langle (a^\dagger)^m a^m \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(m+k)!(n+k)!}}{k!} \rho_{m+k, n+k}. \quad (5.3)$$

В стационарном случае  $\rho_{mm} = \rho_{nn} \delta_{mn}$ , так что  $G_{mm} = G_{nn} \delta_{mn} \equiv G_m \delta_{mn}$ . При  $m = n$  нормальные моменты совпадают с факториальными

$$G_m \equiv G_{mm} = \langle : n^k : \rangle = \langle n(n-1) \dots (n-m+1) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{k!} \rho_{m+k, m+k}. \quad (5.4)$$

Здесь  $n \equiv a^\dagger a$  и двоеточия обозначают операцию перестановки операторов  $a^\dagger$  левее операторов  $a$  (при перестановке не надо учитывать некоммутативность, например,  $:n^2: \equiv (a^\dagger)^2 a^2 = n^2 - n$ ). Отсюда при отождествлении  $p_m = \rho_{mm}$  получаем классическую формулу (3.3) для факториальных моментов. Производящую функцию отсчетов также можно выразить через  $\rho$

$$C(s) \equiv \langle (1-s)^{\hat{n}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n \rho_{nn} = \langle : \exp(-s\hat{n}) : \rangle. \quad (5.5)$$

Производные  $C(s)$  в точках 0 и 1 определяют соответственно факториальные моменты  $G_k$  и вероятности отсчетов  $p_m$ .

#### 5.2. Непрерывное представление

Что общего между квантовой формулой (5.1) и классической формулой Мандела (3.5) для вероятностей фотоотсчетов? Оказывается, связь  $p_n = \rho_{nn}$  можно преобразовать к форме (3.5). Для этого надо использовать непрерывное представление векторов и операторов по когерентным состояниям  $|z\rangle$  [39, 41–43, 47]. При этом оператор плотности изображается некоторой функцией  $P_z(z)$ , называемой представлением Глаубера–Сударшана [41–43]. Эта функция определяет распределение отсчетов  $p_m$  посредством преобразования Пуассона, совпадающим по форме с классической формулой Мандела (3.2) или (3.5). Единственное отличие в том, что функция  $P_z(z)$  или  $P(n) \equiv \pi P_z(\sqrt{n})$  определена теперь через оператор плотности и может быть при этом отрицательной и нерегулярной (поэтому она называется "квазираспределением"). С помощью  $P_z(z)$  удобно вычислять нормальные операторы, например,

$$p_m = \frac{\langle : \hat{n}^m \exp(-\hat{n}) : \rangle}{m!} = \frac{1}{m!} \int d^2z P_z(z) |z|^{2m} \exp(-|z|^2),$$

$$G_k = \langle : \hat{n}^k : \rangle = \int d^2z P_z(z) |z|^{2k},$$

$$C(s) = \langle : \exp(-s\hat{n}) : \rangle = \int d^2z P_z(z) \exp(-s|z|^2). \quad (5.6)$$

Фурье-образ функции  $P_z(z)$  называется нормальной (нормально-упорядоченной) характеристической функцией

$$\chi(w) = \langle \exp(wa^\dagger) \exp(-w^*a) \rangle = \langle : \exp(wa^\dagger - w^*a) : \rangle = \int d^2z P_z(z) \exp(wz^* - w^*z). \quad (5.7)$$

Производные этой функции в нуле определяют нормальные моменты общего вида:

$$G_{mn} = (-1)^n \frac{\partial^m}{\partial w^m} \frac{\partial^n}{\partial w^{*n}} \chi(w, w^*) \Big|_{w=w^*=0} \quad (5.8)$$

(аргументы  $w$  и  $w^*$  считаются независимыми).

### 5.3. Заглаженные функции

В случае НКС функция  $P_z(z)$  может относиться к классу обобщенных. Чтобы не иметь дела с обобщенными функциями, желательно использовать "заглаженные", регулярные модификации функции  $P_z(z)$ . Для этого определим новую характеристическую функцию следующим образом:

$$\chi(w, T) \equiv \exp(-Tww^*) \chi(w), \quad \chi(w) \equiv \chi(w, 0). \quad (5.9)$$

Определим также фурье-образ этой функции:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(z, T) &= \pi^{-2} \int d^2w \exp(zw^* - z^*w) \chi(w, T) = \\ &= \pi^{-2} \int dw' dw'' \exp[2i(z''w' - z'w'') - \\ &\quad - T(w'^2 + w''^2)] \chi(w', w''). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Параметр  $T \geq 0$  играет двоякую роль: во-первых, он ограничивает характеристическую функцию на бесконечности, что приводит к возможности ее фурье-преобразования; во-вторых,  $\chi(w, T)$  описывает суперпозицию исходного поля, задаваемого функцией  $\chi(w, 0) \equiv \chi(w)$ , с независимым тепловым полем, имеющим среднее число фотонов  $T$ . (Напомним, что при композиции двух независимых случайных процессов их характеристические функции перемножаются.)

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \chi(w, 0) &= \chi(w), \quad \tilde{\chi}(z, 0) = P_z(z), \\ \chi\left(w, \frac{1}{2}\right) &= \chi_{\text{sym}}(w), \quad \tilde{\chi}\left(z, \frac{1}{2}\right) = W(z), \\ \chi(w, 1) &= \chi_A(w), \quad \tilde{\chi}(z, 1) = Q(z). \end{aligned} \quad (5.11)$$

При  $T = 0$  функция  $\chi(w, T)$  является нормальной характеристической функцией. Ее производные в нуле определяют нормальные моменты вида  $G_{kl} \equiv \langle (a^\dagger)^k a^l \rangle$  (см. (5.3)). Фурье-преобразование  $\chi(w, 0)$  дает представление Глаубера–Сударшана  $P_z(z)$  для оператора плотности. Функция  $P_z(z)$  играет роль (квази)распределения для нормальных операторов.

При  $T = 1/2$  функция  $\chi(w, T)$  является симметризованной характеристической функцией. Ее фурье-образ  $W(z)$  называют функцией Вигнера. Эта функция всегда регулярна (но может принимать отрицательные значения), она играет роль квазираспределения для операторов, симметричных относительно перестановки  $a$  и  $a^\dagger$ .

Наконец, при  $T = 1$  функция  $\chi(w, T)$  определяет антинормальную характеристическую функцию; ее фурье-образ  $Q(z) = \langle z|\rho|z \rangle$  всегда неотрицателен и играет роль распределения для антинормальных операторов типа  $\langle a^\dagger (a^\dagger)^k \rangle$ .

Произведению характеристических функций соответствует свертка их фурье-образов. Таким образом, функция Вигнера  $W(z)$  равна свертке  $P_z(z)$  с функцией  $\exp(-|z|^2/2)$ , а функция  $Q(z)$  равна свертке  $P_z(z)$  с

функцией  $\exp(-|z|^2)$ . Эти математические операции, которые заглаживают возможные особенности  $P_z(z)$ , можно реализовать, добавляя тепловое поле с  $T = 1/2$  или  $T = 1$  [49, 50].

### 5.4. Суперпозиция с тепловым полем

В дальнейшем полагаем, что  $T$  — среднее число фотонов в дополнительном тепловом поле, используемом в качестве меры неклассичности исходного поля согласно Ли [49, 50]. При этом исходное состояние как бы "подогревается". Например, функция Вигнера суммарного поля имеет вид  $W(z, T) = \tilde{\chi}(z, T + 1/2)$  и определяется из (5.11). С помощью функции Вигнера распределения отсчетов и производящая функция определяются по следующим формулам [62, 63]:

$$p_m = \frac{2(-1)^m}{m!} \int d^2z W(z, T) L_m(4|z|^2) \exp(-2|z|^2), \quad (5.12)$$

$$C(s) = \frac{2}{2-s} \int d^2z W(z, T) \exp\left(-\frac{2s|z|^2}{2-s}\right). \quad (5.13)$$

Здесь  $L_K(x)$  — полиномы Лагерра,

$$\begin{aligned} L_K(x) &= K! \sum_{m=0}^K \frac{(-x)^m}{(m!)^2 (K-m)!}, \\ L_1(x) &= 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

В отличие от (5.6) здесь используется функция Вигнера, которая регулярна в случае НКС.

В случае стационарного поля  $\rho_{nm} = \rho_{nm} \delta_{nm}$  и имеет место связь

$$\chi(w, T) \equiv \exp(-Tww^*) \sum_n \rho_{nm} L_n(|w|^2). \quad (5.15)$$

### 5.5. Примеры

1. Поле идеального лазера описывается когерентным состоянием:

$$P_z(z) = \delta^{(2)}(z - z_0) = \delta(z' - z'_0) \delta(z'' - z''_0). \quad (5.16)$$

Фурье-преобразование этой функции дает

$$\chi(w) \equiv \exp(wz_0^* - w^*z_0). \quad (5.17)$$

При этом фотоотсчеты образуют пуассоновский процесс:  $p_m = n_0^m \exp(-n_0)/m!$  с параметром  $n_0 = |z_0|^2$ , для которого

$$C(s) = \sum (1-s)^n p^n = \exp(-sn_0), \quad G_k = n_0^k. \quad (5.18)$$

2. Одна мода поля или гармонический осциллятор в состоянии термодинамического равновесия описывается гауссовым распределением для амплитуды и экспоненциальным для энергии

$$P(n) = \pi P_z(\sqrt{n}) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{n}{T}\right). \quad (5.19)$$

Здесь  $T$  — средняя энергия, деленная на энергию фотона. Двумерный фурье-образ функции  $P_z(z)$  имеет вид

$$\chi(w) = \exp(-Tww^*). \quad (5.20)$$

Матрица плотности при этом диагональна

$$\rho_{mm} = p_m = \frac{T^m}{(1+T)^{m+1}} = p_0 \exp(-m\beta),$$

$$\exp(-\beta) \equiv \frac{T}{1+T}. \tag{5.21}$$

Отсюда легко найти

$$C(s) = \sum (1-s)^n \frac{T^n}{(1+T)^{n+1}} = \frac{1}{1+sT},$$

$$G_k = k! T^k. \tag{5.22}$$

3. Суперпозиция когерентного и теплового поля получается из (5.19) трансляцией на вектор  $z_0$  (в соответствии с (3.7) и (5.16))

$$P_z(z) = \frac{1}{\pi T} \exp\left(-\frac{|z-z_0|^2}{T}\right). \tag{5.23}$$

Характеристическая функция равна произведению (5.17) и (5.20)

$$\chi(w) = \exp(-Tww^* + wz_0^* - w^*z_0). \tag{5.24}$$

4. Распределение Скалли-Лемба [64]

$$p_m = c \frac{a^m}{(b+m)!} \approx \frac{a^{b+m} \exp(-a)}{(b+m)!},$$

$$c^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{(b+m)!} \approx a^{-b} e^a \tag{5.25}$$

описывает статистику лазера ниже порога возбуждения ( $a < b$ ), вблизи порога ( $a = b$ ) и выше него ( $a > b$ ). Нормировочная константа  $c$  определяет вероятность отсутствия отсчетов:  $p_0 = c/b!$ . Приближенные выражения справедливы при значительном превышении над порогом, когда  $a \gg b$  и  $c \ll 1$ . Среднее число фотонов имеет вид  $N = a - b(1 - p_0) \approx a - b$ . В пределе  $b \rightarrow \infty$  — это тепловое распределение, а при  $b \rightarrow 0$  — пуассоновское. Графики функции  $\ln(m!p_m)$  — вогнутые, т.е. имеют "классический" характер. Производящая функция имеет вид

$$C(s) = c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{(b+m)!} (1-s)^m \approx \frac{\exp(-as)}{(1-s)^b} \tag{5.26}$$

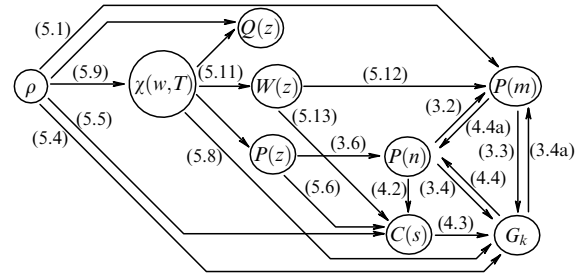
(приближенная формула справедлива при  $s \ll 1$ ).

Другие примеры будут рассмотрены в разделах 6 и 7. На рисунке 1 приведена схема, поясняющая связи между введенными выше функциями, позволяющими определить статистику фотоотсчетов.

## 6. Подогретый сжатый вакуум

### 6.1. Свет с четным числом фотонов

Не исчерпывает ли условие антигруппировки  $g_2 < 1$  ( $g_2$ -критерий) все случаи неклассичности света, т.е. не является ли оно достаточным? Рассмотрим в качестве простого контрпримера шумовое излучение вырожденного параметрического усилителя. Этот эффект называют параметрическим рассеянием или преобразова-



**Рис. 1.** Связи между различными функциями, используемыми для расчета статистики фотоотсчетов; в круглых скобках — номера формул. Исходной теоретической величиной является оператор плотности  $\rho$ , экспериментально измеряемые величины представлены вероятностью отсчетов  $p_m$  и факториальными моментами  $G_k$ ;  $\chi(w, T)$  — характеристическая функция,  $W(z)$  — функция Вигнера,  $P(z)$  — распределение амплитуды Глаубера-Сударшана,  $P(n)$  — распределение энергии,  $C(s)$  — его лаплас-образ (производящая функция), функция  $Q(z) = \langle z|\rho|z \rangle$  определяет антинормально-упорядоченные моменты. В случае неклассического состояния функция  $W(z)$  принимает отрицательные значения, а функция  $P(z)$  также принимает отрицательные значения или вообще не существует как регулярная функция. \

нием частоты вниз (down-conversion) [4–6, 17]; соответствующее состояние поля называют сжатым вакуумом. Согласно квантовой теории  $\langle m \rangle = \sinh^2 \Gamma$  и  $\langle \Delta m^2 \rangle = 2\langle m \rangle(\langle m \rangle + 1)$  ( $\Gamma$  — показатель параметрического усиления). Отсюда  $D_1(0) = g_2 = 3 + \langle m \rangle^{-1} > 3$ , т.е. имеет место сверхпуассоновская статистика отсчетов и согласно  $g_2$ -критерию свет является классическим. (Более того, в эксперименте  $g_2$  обычно имеет порядок  $10^8$ , т.е. имеет место "сверхгруппировка".)

Почему же сжатый вакуум относят к категории НКС? Теоретически это следует из определения I: ниже будет показано, что регулярного  $P_z$ -распределения для сжатого вакуума не существует [66] (если исключить из рассмотрения обобщенные функции). Естественно попытаться найти операциональные, наблюдаемые признаки неклассичности сжатого вакуума.

Расчет матрицы плотности для сжатого вакуума дает  $\rho_{nn} = 0$  при нечетных  $n$ , т.е. с корпускулярной точки зрения сжатый вакуум состоит из четного числа фотонов. В идеальном случае нечетные числа фотоотсчетов не должны наблюдаться вообще,  $p_{2k+1} = 0$ . Интуитивно ясно, что подобные резкие "провалы" в распределении вероятностей противоречат формуле Манделя (3.2), согласно которой "соседние" вероятности  $p_{m-1}$ ,  $p_m$  и  $p_{m+1}$  должны, по-видимому, иметь сравнимые величины. Это подтверждается условием (4.8): при четных  $m$  имеем  $D_m(1) = p_{m-1}p_{m+1}/p_m^2 = 0$ , так что собственный шум параметрического усилителя неклассичен несмотря на отсутствие антигруппировки. (Кроме того, мы убедимся, что при малых  $\Gamma$   $D_{2n}(0) < 1$ .)

В предельном случае слабой накачки ( $\Gamma \ll 1$ ) параметрический усилитель излучает двухфотонный свет. При этом  $p_2 \ll p_0$ , а остальные вероятности пренебрежимо малы. Таким образом, фотоны или отсутствуют, или излучаются парами. Следовательно,  $D_2(1) = 0$  и двухфотонный свет (который является предельным случаем слабо сжатого вакуума) существенно неклассичен.

Отметим, что параметрический двухфотонный свет в невырожденном случае используется для демонстрации другой, более общей, неклассичности света. Этот тип

неклассичности основывается на противопоставлении не с классической стохастической оптикой, а с некоторой весьма общей вероятностной моделью Белла [67]. При этом нарушаются неравенства Белла, составленные из некоторой комбинации наблюдаемых отсчетов в двух детекторах [11, 68] (см. также [26, 34, 69]).

## 6.2. P-распределение

Как уже отмечалось, сжатый вакуум дает группировку фотонов:  $g_2 = 3 + 1/N$  ( $N \equiv \langle m \rangle$ ). При  $N \ll 1$  — это сверхгруппировка,  $g_2 \gg 1$ . Чтобы получить антигруппировку ( $g_2 < 1$ ), к сжатому вакууму необходимо добавить когерентную компоненту  $z_0$  с подходящей фазой. Далее, для оценки степени ("глубины") неклассичности  $T_0$  нужно добавить еще тепловое поле с известным средним числом фотонов  $T$ . Согласно Ли [49, 50]  $T_0$  — это минимальное значение  $T$ , уничтожающее неклассичность (по определению I). Можно попытаться оценить  $T_0$  экспериментально, например, по условию  $g_2(T_0) = 1$ . Таким образом, когерентное поле  $z_0$  создает антигруппировку, а тепловое  $T$  ее уничтожает.

Статистику суперпозиции удобно определять через характеристические функции исходных полей, которые при этом просто перемножаются. Характеристическую функцию сжатого вакуума можно найти исходя из квантовой модели параметрического усилителя [17, 47, 61, 66]

$$\chi(w, w^*) = \exp \left[ -Nww^* + \frac{1}{2} M(w^2 + w^{*2}) \right]. \quad (6.1)$$

Здесь

$$N = \langle a^\dagger a \rangle = \sinh^2(\Gamma), \quad (6.2)$$

$$M = \langle a^2 \rangle = \sqrt{N(N+1)} = \sinh(\Gamma) \cosh(\Gamma) \quad (6.3)$$

— среднее число фотонов и "аномальный" второй момент соответственно. Параметр  $M$  полагаем вещественным и положительным, что соответствует растяжению первой квадратуры и сжатию второй

$$\begin{aligned} \langle \Delta q^2 \rangle &= N + M + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \exp(2\Gamma), \\ \langle \Delta p^2 \rangle &= N - M + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \exp(-2\Gamma). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь квадратуры определены следующим образом:

$$q \equiv \frac{(a + a^\dagger)}{\sqrt{2}}, \quad p \equiv \frac{(a - a^\dagger)}{i\sqrt{2}}.$$

При суперпозиции сжатого вакуума с когерентным полем с амплитудой  $z_0$  и тепловым полем со средним числом фотонов  $T$  функция (6.1) умножается на соответствующие характеристические функции, что дает

$$\chi(w, w^*) = \exp \left[ -N'ww^* + \frac{1}{2} M(w^2 + w^{*2}) + z_0^*w - z_0w^* \right], \quad (6.5)$$

где  $N' \equiv N + T$ . Состояние, описываемое (6.5) при независимых параметрах  $N'$ ,  $M$ ,  $z_0$ , можно назвать обобщенным гауссовым или квазигауссовым [17]. Такое состояние можно получить, смешивая выходной собственный шум вырожденного параметрического усилителя с коге-

рентным и тепловым светом с помощью светоделителя (см. раздел 10).

Другой способ — подавать когерентный и тепловой свет на вход усилителя, при этом в (6.5) надо сделать следующую замену параметров [17]:

$$T \rightarrow T_{\text{in}}(\cosh^2 \Gamma + \sinh^2 \Gamma) = T_{\text{in}}(1 + 2N),$$

$$M \rightarrow (1 + 2T_{\text{in}}) \cosh \Gamma \sinh \Gamma = (2 + 2T_{\text{in}}) \sqrt{N(N+1)},$$

$$z_0 \rightarrow z_{\text{in}} \cosh \Gamma + z_{\text{in}}^* \sinh \Gamma.$$

Здесь  $N$  — среднее число фотонов на выходе в отсутствие дополнительных полей,  $T_{\text{in}}$  — среднее число фотонов теплового поля на входе и  $z_{\text{in}}$  — амплитуда когерентного поля на входе. Состояние выходного поля усилителя при этом получается из теплового состояния на входе операциями сжатия и смещения [63]. При  $z_{\text{in}} = 0$  это состояние называют сжатым термическим [70]. Если  $T_{\text{in}} \gg 1/2$ , то квантовыми эффектами можно пренебречь и выходное излучение усилителя можно назвать классическим сжатым светом [71, 72].

В классической теории средний квадрат комплексной амплитуды по модулю меньше или равен средней интенсивности

$$\langle a^2 \rangle = \int d^2z P_z(z) z^2 \leq \langle |a|^2 \rangle = \int d^2z P_z(z) |z|^2,$$

т.е.  $M \leq N$ . В то же время согласно (6.2), (6.3)  $M > N$ . Отсюда сразу находим нижнюю границу

$$T_0 \geq M - N = \sqrt{N(N+1)} - N = \frac{1}{2}(1 - \exp(-2\Gamma)).$$

Отметим, что параметр неклассичности  $|M|/N = \coth \Gamma$  сжатого вакуума тем больше, чем меньше усиление  $\Gamma$ ; в типичных экспериментах  $|M|/N \sim \sqrt{N} \sim 10^4$ . Однако эта неклассичность, которая была отмечена в [73] (см. также [56, 57]), непосредственно не наблюдаема, поскольку  $M$  — ненаблюдаемая величина (см., однако, (6.21)). Это же относится и к коэффициенту сжатия эллипса  $s$ , определенному через симметризованные дисперсии (6.4), характеризующие ширину распределений Вигнера

$$s^2 \equiv \frac{\Delta q^2}{\Delta p^2} = \frac{N' + M + 1/2}{N' - M + 1/2} = \exp 4\Gamma. \quad (6.6)$$

В последнем равенстве полагается  $T = 0$ .

Заметим, что в случае невырожденного сжатого вакуума две моды описываются двумя комплексными амплитудами  $a$ ,  $b$  и имеют место классические неравенства типа Коши–Шварца [56, 57, 74]

$$\langle |a|^2 |b|^2 \rangle \leq \langle |a|^2 \rangle \langle |b|^2 \rangle, \quad |\langle ab \rangle|^2 \leq \langle |a|^2 \rangle \langle |b|^2 \rangle. \quad (6.6a)$$

Двухфотонный свет дает сильные неравенства обратного смысла [56, 57, 73], что и приводит к "сверхклассической" видности двухфотонной интерференции, необходимой для демонстрации нарушения неравенства Белла [34, 72].

Фактически параметр  $M$  всегда комплексный:  $M \sim \exp(i\phi)$ , где  $\phi(t)$  — неизбежно дрейфующая фаза накачки параметрического усилителя (имеющей двойную частоту), поэтому для наблюдения стационарного эффекта необходимо, чтобы накачка и когерентное поле  $z_0$  происходили от общего задающего лазера. При этом под фазой  $z_0$  надо понимать регулируемый сдвиг фазы, вводимый в тракт автодина, и для антигруппировки

отсчетов необходимо условие  $\text{Re}(z_0^2) < 0$ . Будем в дальнейшем полагать фазу когерентного поля оптимальной:  $z_0 = i\sqrt{n}$  (при этом антигруппировка фотонов максимальна,  $g_2 = \min$ ).

$P$ -распределение является фурье-образом характеристической функции (6.5)

$$\begin{aligned} P_z(z) &= \pi^{-2} \int d^2 w \exp(zw^* - z^* w) \chi(w) = \\ &= \pi^{-2} \int dw' dw'' \exp[2i(z'' - z_0'') w' - 2i(z' - z_0') w'' - \\ &- N'(w'^2 + w''^2) + M(w'^2 - w''^2)] = \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} \exp\left[-\frac{(z' - z_0')^2}{a} - \frac{(z'' - z_0'')^2}{b}\right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$a \equiv N' + M = N + T + \sqrt{N(N+1)},$$

$$b \equiv N' - M = N + T - \sqrt{N(N+1)} = T - T_0(N).$$

Эта функция при  $N' > M$  является произведением двух гауссовых распределений с центром в точке  $(z_0', z_0'')$  и неравными дисперсиями  $N' \pm M = T + (\exp(\pm 2\Gamma) - 1)/2$ . При  $M > 0$  эллипс неопределенности сжат вдоль вертикальной оси  $z''$ .

При  $M > N'$  характеристическая функция (6.5) за счет слагаемого  $(M - N')w'^2$  в показателе экспоненты является неограниченной функцией и не имеет регулярного (не обобщенного) фурье-образа. Следовательно, согласно определению I функция (6.5) при  $M > N'$  описывает НКС. Отсюда находим меру Ли для сжатого вакуума

$$T_0(N) = M - N = \sqrt{N(N+1)} - N = \frac{1}{2}(1 - \exp(-2\Gamma)). \quad (6.8)$$

При малом сжатии  $T_0 \sim \sqrt{N} \sim \Gamma \ll 1$ , а при большом  $T_0 \rightarrow 1/2$ . Отметим, что  $T_0$  не зависит от  $z_0$ . В отличие от случая  $K$ -фотонных состояний добавление сколь угодно слабого теплового излучения не делает  $P$ -распределение сжатого вакуума регулярным.

При замене  $T \rightarrow T + 1/2$  функция (6.5) становится характеристической для симметризованных моментов и, соответственно, функция (6.7) становится функцией распределения Вигнера. Аналогично, замена  $T \rightarrow T + 1$  в (6.5) и (6.7) дает характеристическую функцию для антинормально-упорядоченных моментов и ее фурье-образ, так называемое  $Q$ -распределение, являющееся диагональным матричным элементом матрицы плотности в когерентном представлении:  $Q(z) = \langle z|\rho|z \rangle \geq 0$ .

### 6.3. Прямое детектирование

Рассмотрим сначала свойства подогретого сжатого вакуума без смещения, когда  $z_0 = 0$ . Это соответствует прямому детектированию (в отличие от гомодинного). Найдем распределение энергии  $P(n)$  с помощью функции  $P_z(z) \equiv P_z(z', z'')$ . Согласно (3.6)

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left[-\frac{n \cos^2 \phi}{a} - \frac{n \sin^2 \phi}{b}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{c}} \exp\left(-\frac{N'n}{c}\right) I_0\left(\frac{Mn}{c}\right), \\ c &\equiv ab = T^2 + 2TN - N. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Мы использовали, что

$$\int_0^{2\pi} d\phi \exp(x \cos^2 \phi) = 2\pi \exp\left(\frac{x}{2}\right) I_0\left(\frac{x}{2}\right)$$

( $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя).

Производящая функция для вероятностей и факториальных моментов отсчетов состояния (6.5) найдена в явном виде в [63]. При  $z_0 = 0$

$$C(s) = [(1 + as)(1 + bs)]^{-1/2}. \quad (6.10)$$

При  $T = 0$  отсюда следует  $C(s) = [1 + Ns(2 - s)]^{-1/2}$ . Графики этих функций даны на рис. 2. Характерно, что в случае НКС (при  $T < T_0$ ) функция  $C(s)$  имеет полюс в точке  $s_\infty = -1/b = [T_0 - T]^{-1}$  и превышает 1 при  $s_\infty > s > s_1 = 2N'/(M^2 - N'^2)$ , т.е. она неприемлема в качестве классической производящей функции, определяемой как лаплас-образ  $P(n)$ . В то же время  $C(s)$  продолжает определять моменты и вероятности отсчетов согласно ее "дискретному" определению (5.5). В точке  $s = s_1/2$  четные производные  $C(s)$  положительны, а нечетные равны нулю (см. рис. 2).

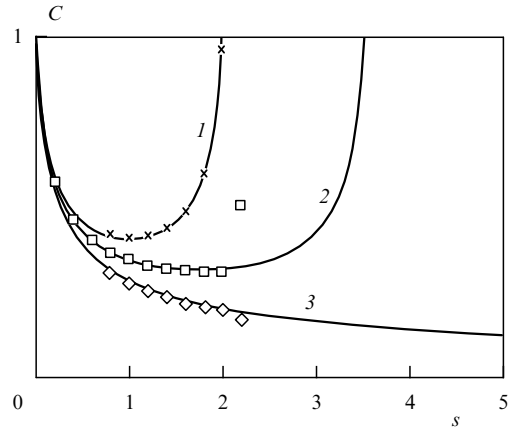


Рис. 2. Производящая функция подогретого сжатого вакуума при  $N = 5$  и числа тепловых фотонов  $T$ : 1 — 0; 2 — 0,2; 3 — 0,5. Графики 1 и 2 свидетельствуют о неклассичности статистики. Точки получены с помощью численного эксперимента, состоящего из  $10^4$  случайных чисел отсчетов, распределенных согласно (6.15).

Рассмотрим теперь  $g$ -критерии неклассичности. Дифференцируя повторно (6.5) или (6.10), можно найти факториальные моменты  $G_k$ . Общее выражение для них было найдено в [76]

$$\begin{aligned} G_k &= N^k \sum_{p=0}^k \left(\frac{k!}{p!}\right)^2 \frac{x^p}{2^p(k-p)!} \left|H_p\left(\frac{iz_0}{\sqrt{2M}}\right)\right|^2, \\ x &\equiv \frac{\sqrt{N(N+1)}}{N+T} = \frac{N+T_0(N)}{N+T}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь  $H_j(x)$  — полиномы Эрмита. При  $z_0 = 0$   $H_{2m+1} = 0$  и

$$H_{2m} = (-1)^m 2 \frac{(2m-1)!}{(m-1)!},$$

так что (6.11) принимает вид [77]

$$g_k = \sum_{p=0}^k \binom{k!}{p!}^2 \frac{x^{2p}}{2^{2p}(k-2p)!} = k!F\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k-1}{2}; 1; x^2\right), \quad (6.12)$$

где  $F$  — гипергеометрическая функция и  $g_k \equiv G_k/G_1^k$  — нормированные факториальные моменты ( $G_1 = N + T$ ). Отсюда при  $T = 0$  в случае слабого сжатия ( $N = \Gamma^2 \ll 1$ ) следует  $g_k \approx [(k-1)!!]^2/\Gamma^k$  (четные  $k$ ) и  $g_k \approx (k!!)^2/\Gamma^{k+1}$  (нечетные  $k$ ) [77], а при  $N \gg 1$   $g_k \approx (2k-1)!!$  [78].

Первые несколько моментов согласно (6.12) имеют вид

$$g_2 = 2 + x^2, \quad g_3 = 6 + 9x^2, \\ g_4 = 24 + 72x^2 + 9x^4, \quad (6.13)$$

где при  $T = 0$   $x^2 = 1 + 1/N$ . При малых  $N$  и  $T$  факториальные моменты обнаруживают немонотонную зависимость от номера, свидетельствующую о неклассических "выпуклостях" (рис. 3). Конечно, этот эффект — отражение свойства  $p_{2k+1} = 0$ : из (3.4а) следует  $G_k \approx k!p_k$  при рассматриваемых условиях. Согласно (6.13) параметр  $D_2(0)$  при  $T = 0$  имеет вид

$$D_2 = 3 \frac{5 + 3N^{-1}}{3 + N^{-1}}. \quad (6.14)$$

Эта функция меньше 1 (что является признаком НКС) при

$$N < \frac{\sqrt{33}}{12} - \frac{1}{4} = 0,229.$$

Рассмотрим вероятности отсчетов при  $z_0 = 0$ . Согласно [63]

$$p_m = \frac{f_1^m}{f_2^{m+1}} P_m\left(\frac{f_3}{f_1 f_2}\right), \quad (6.15)$$

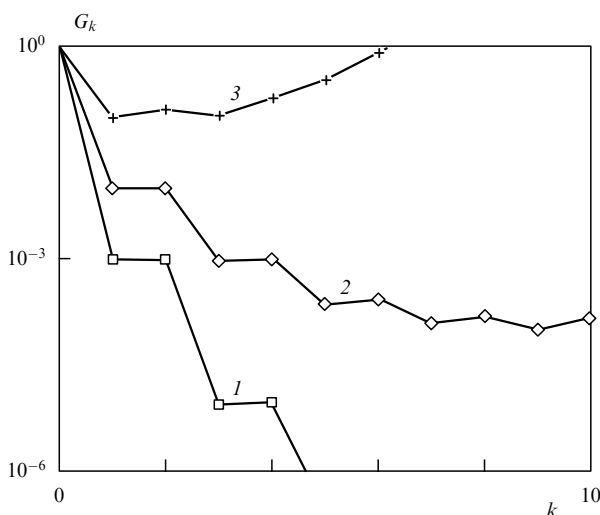


Рис. 3. Факториальные моменты сжатого вакуума  $G_k$  при  $N$ : 1 —  $10^{-3}$ ; 2 —  $10^{-2}$ ; 3 —  $10^{-1}$ .

где

$$f_1^2 \equiv N'^2 - M^2 = ab, \\ f_2^2 \equiv (N' + 1)^2 - M^2 = ab + a + b + 1, \\ f_3^2 \equiv N'(N' + 1) - M^2 = ab + \frac{1}{2}(a + b)$$

и  $P_m(x)$  — полиномы Лежандра. Графики этой функции, имеющие при  $T < T_0$  неклассические выпуклости, представлены на рис. 4.

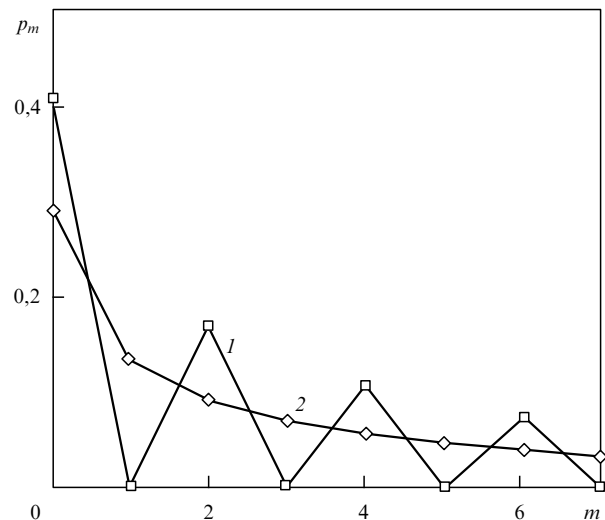


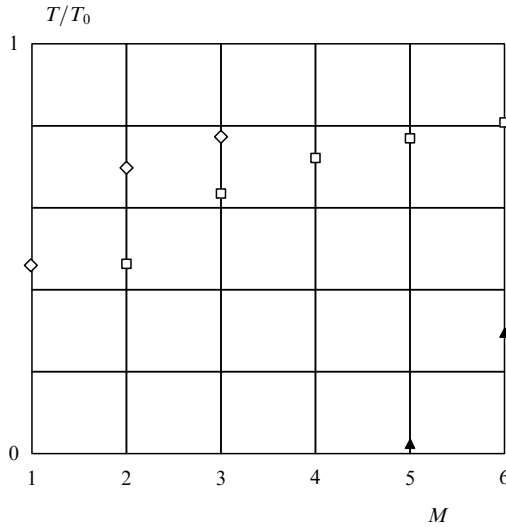
Рис. 4. Распределение вероятностей отсчетов: 1 — для сжатого вакуума; 2 — для подогретого сжатого вакуума при  $T = T_0(N) = 0,477$ . Интенсивность сжатого вакуума  $N$  равна 5 фотонов на моду.

При  $T = 0$  аргумент функций Лежандра в (6.15) обращается в нуль. С учетом  $P_{2m}(0) = (-1)^m \times (2m)!/2^{2m}(m!)^2$ ,  $P_{2m+1}(0) = 0$  находим [39]

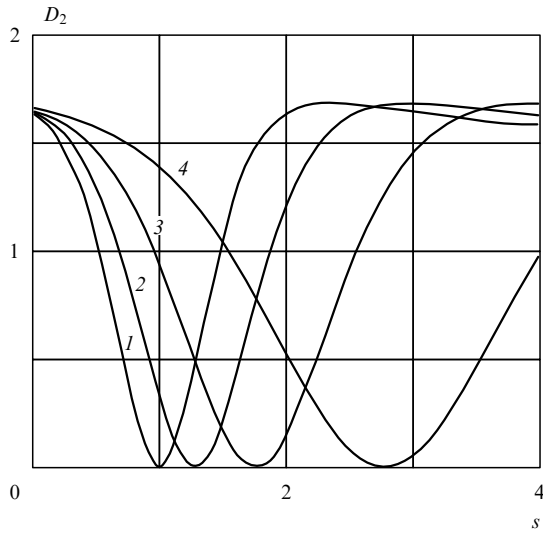
$$p_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \frac{N^m}{(N+1)^{m+1/2}}, \quad p_{2m+1} = 0. \quad (6.16)$$

При  $T = 0$  параметры "выпуклости"  $D_m(1)$  равны нулю для  $m = 2, 4, \dots$ , но при  $T \sim T_0/2$  все они достигают единицы.

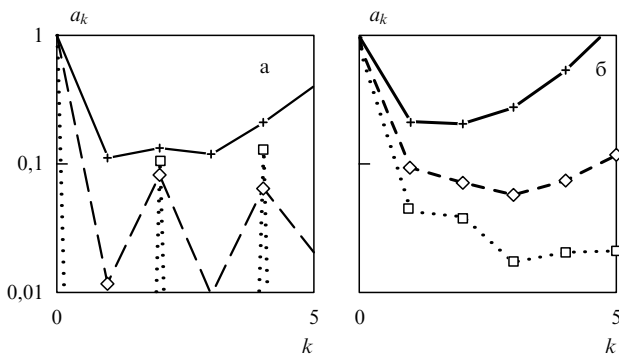
Рассмотрим теперь более чувствительные тесты на неклассичность, использующие матрицы Ганкеля  $H_K^{(n)}(s)$  порядка  $K + 1 > 2$  (см. приложения). В случае сжатого вакуума лишь матрицы  $H_K^{(2n+1)}(s)$  "чувствуют" неклассичность. При данной степени неклассичности, определяемой по параметру  $T$ ,  $\det H_K^{(1)}(s)$  становятся отрицательными лишь начиная с некоторого порядка  $K_{\min} + 1$  (рис. 5). Из графиков следует, что необходимый порядок матрицы резко увеличивается при приближении  $T$  к границе неклассичности  $T_0$  (равной 0,41 для  $N = 1$ ); при этом необходимое число вероятностей ( $s = 1$ ) заметно меньше числа моментов ( $s = 0$ ), т.е.  $p$ -критерии неклассичности более чувствительны. Еще чувствительней матрицы, составленные из обобщенных моментов при  $s = 2$ . Влияние параметра  $s$  на неклассичность показано на рис. 5–7.



**Рис. 5.** Зависимость приведенного параметра  $T/T_0$  в случае подогретого сжатого вакуума с  $N=1$  от порядка  $M=K+1$  матрицы Ганкеля, следующая из условия  $\det H_K^{(1)}(s, T) = 0$  согласно (1.5);  $\blacktriangle$  —  $s=0$ ;  $\square$  —  $s=1$ ;  $\diamond$  —  $s=2$ .



**Рис. 6.** Функция  $D_2(s)$  для сжатого вакуума при  $N=5$ : 1 —  $T=0$ ; 2 —  $T=0,1$ ; 3 —  $T=0,2$ ; 4 —  $T=0,3$ . Свет неклассичен, если хотя бы при одном значении  $s$   $D_2(s) < 1$ , поэтому при  $T=0,3$  параметры  $D_2(0)$  и  $D_2(1)$  не обнаруживают неклассичность; в то же время достаточно измерить, например,  $D_2(2)$ .



**Рис. 7.** Зависимость обобщенных моментов  $a_k(s)$  от номера  $k$ :  $+$  —  $s=0$ ,  $\diamond$  —  $s=1$ ,  $\square$  —  $s=2$  в случае подогретого сжатого вакуума при  $N=0,1$ . (а)  $T_0/T=0,05$  и неклассические выпуклости проявляют все три типа моментов; (б)  $T_0/T=0,5$  и выпуклости имеет лишь момент  $a_k(2)$ .

**6.4. Гомодинное детектирование**

Рассмотрим влияние смещения сжатого вакуума на антигруппировку. Согласно (6.11) при  $z_0 \neq 0$  первые два момента имеют вид

$$G_1 = N + T + n_0 \equiv N' + n_0,$$

$$G_2 = 2N'^2 + 4N'n_0 + n_0^2 + M^2 + 2M \operatorname{Re}(z_0^2). \quad (6.17)$$

Здесь  $n_0 \equiv |z_0|^2$ . Последнее слагаемое отрицательно при  $\operatorname{Re}(z_0^2) < 0$  (это необходимое условие антигруппировки). В дальнейшем полагаем  $z_0 = i\sqrt{n_0}$ . При этом эллипс неопределенности сжатого вакуума смещается вдоль своей малой оси. Поскольку  $T_0$  не зависит от  $z_0$ , мы убеждаемся еще раз, что антигруппировка не является необходимым признаком НКС. Из (6.17) находим нормированный момент

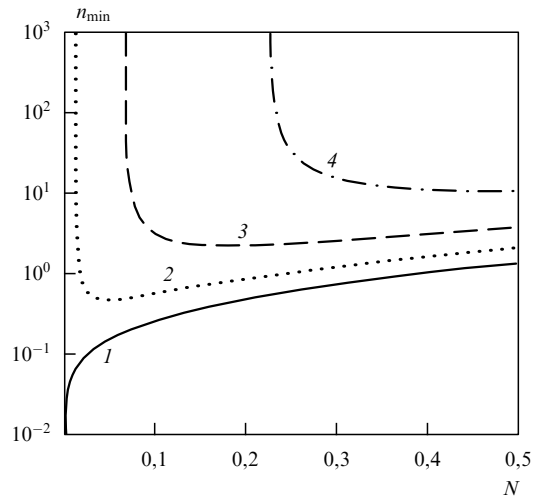
$$g_2 = \frac{G_2}{G_1^2} = 1 + \frac{1 + x^2 + 2y(1-x)}{(1+y)^2}, \quad (6.18)$$

где  $x = M/N'$ ,  $y = n_0/N'$ . Согласно (6.18) при заданных средних энергиях сжатого вакуума  $N$  и теплового поля  $T$  существует минимальная энергия когерентной составляющей  $n_{\min}$ , необходимая для антигруппировки,  $g_2 < 1$  (рис. 8):

$$y_{\min} = \frac{x^2 + 1}{2(x-1)}. \quad (6.19)$$

Обратим внимание на немонотонный характер зависимости  $n_{\min}$  от  $N$  при фиксированном  $T$ , имеющей минимум:  $n_{\min}$  возрастает как в области малых  $N$ , когда  $T$  приближается к критическому значению  $T_0$ , разрушающему неклассичность, так и при больших  $N$ , когда большая когерентная компонента нужна для антигруппировки независимо от  $T$ .

Функция  $g_2(n)$  согласно (6.18) достигает минимума при  $y_{\text{opt}} = x(x+1)/(x-1)$ . При этом



**Рис. 8.** Зависимость минимальной энергии когерентной составляющей  $n_{\min}$ , необходимой для антигруппировки отсчетов, от энергии сжатого вакуума  $N$  при тепловой энергии  $T$ , равной: 1 — 0; 2 — 0,1; 3 — 0,2; 4 — 0,3.

$$g_{2\min} = 1 + \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 - 2x^2}. \quad (6.20)$$

Отсюда следует, что при малом сжатии ( $N \ll 1$ ) можно получить сильную антигруппировку ( $g_2 = 4\sqrt{N}$ ): надо, чтобы  $n_0 = \sqrt{N}$  и  $T \ll N$ . При этом  $G_2 \approx 0$  или  $\langle m^2 \rangle \approx \langle m \rangle$ . Это означает, что наблюдаются лишь отсчеты  $m = 0$  и  $m = 1$ , т.е.  $p_0 = 1 - n_0$ ,  $p_1 = n_0$ ,  $p_2 = 0$  — вероятность обнаружения двух или более фотонов подавлена. В типичных экспериментах  $N \approx 10^{-8}$ , при этом без смещения имеет место "сверхгруппировка",  $g_2 \approx 10^8$ , а добавление когерентного поля с  $n_0 \approx 10^{-4}$  дает антигруппировку с  $g_2 \approx 4 \times 10^{-4}$ .

Однако практически важные параметры, такие как фактор Фано  $F = 1 + (N' + n_0)(g_2 - 1)$  и отношение шум/сигнал  $\langle \Delta m^2 \rangle / \langle m \rangle^2 = F / \langle m \rangle$ , принимают малые значения лишь при большом смещении  $n_0$  и сильном сжатии. Пусть  $n_0 \gg N \gg T$ , тогда

$$F = 1 + 2(N - M) = 2\langle \Delta p^2 \rangle = \exp(-2\Gamma). \quad (6.21)$$

Таким образом, при сильном гомодинном поле фактор Фано обратно пропорционален сжатию эллипса неопределенности  $s$  (см. (6.6)). Согласно (6.21) добавление сильного когерентного поля позволяет измерять дисперсию квадратур исследуемого слабого поля. При этом из условия "сжатия" одной из квадратур (например,  $\langle \Delta p^2 \rangle < 1/2$ ) при подходящей фазе  $z_0$  следует  $F < 1$ . Используется также понятие сжатия высших порядков [79].

## 7. Подогретое однофотонное состояние

Рассмотрим суперпозицию однофотонного поля и хаотического теплового поля со средним числом фотонов  $T$ . Среднее число фотонов результирующего поля  $\langle n \rangle$  равно, очевидно,  $T + 1$ . При  $T = 0$  имеем чистое однофотонное состояние, которое, как уже отмечалось, по  $D_k(1)$ -критерию (по выпуклости графика функции  $\ln(k!p_k)$ ) явно неклассично (согласно [44] любое чистое состояние, кроме когерентного, является неклассическим).

С наивной корпускулярной точки зрения распределение фотонов (и отсчетов) в суммарном поле определяется элементарно: добавление одного фотона просто сдвигает геометрическое тепловое распределение на единицу вправо. При этом  $p_0 = 0$ , минимальное число отсчетов равно единице,  $D_1(1) = 2p_0p_2/p_1^2 = 0$ , и состояние неклассично независимо от  $T$ . (Состояния этого типа рассматривались в [59], при этом их неклассичность устанавливалась по матрице  $H_2(0)$ , см. (I.5).) Однако это рассуждение верно лишь при рассмотрении суммарного числа отсчетов в двух независимых модах, в нем не учитывается интерференция между двумя компонентами исходных полей.

### 7.1. P-распределение

При последовательном расчете композиции двух независимых случайных полей как квантовом, так и классическом, распределение суммарного поля  $P_z(z)$  приравнивают к свертке двух исходных  $P_z$ -распределений.

Найдем характеристическую функцию однофотонного состояния:

$$\chi(w) = \langle 1 | \exp(wa^\dagger) \exp(-w^*a) | 1 \rangle. \quad (7.1)$$

При любом  $w$  имеем

$$\begin{aligned} \exp(-w^*a) | 1 \rangle &= \left( 1 - w^*a + \frac{w^{*2}a^2}{2} - \dots \right) | 1 \rangle = \\ &= | 1 \rangle - w^* | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\chi(w) = 1 - ww^*. \quad (7.2)$$

Добавим тепловое поле. При композиции независимых состояний характеристические функции перемножаются

$$\begin{aligned} \chi(w) &\equiv (1 - ww^*) \exp(-Tww^*) = \\ &= \left( 1 + \frac{\partial}{\partial T} \right) \exp(-Tww^*). \end{aligned} \quad (7.3)$$

$P_z$ -распределение для теплового поля имеет вид

$$\begin{aligned} P_z^T(z) &= \frac{1}{\pi^2} \int dw' \exp(2iz'w' - Tw'^2) \times \\ &\times \int dw'' \exp(2iz'w'' - Tw''^2) = \frac{1}{\pi T} \exp\left(-\frac{|z|^2}{T}\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Дифференцируя это выражение по  $T$  в соответствии с (7.3) находим

$$\begin{aligned} P_z(z) &= \left( 1 + \frac{\partial}{\partial T} \right) P_z^{(T)}(z) = \\ &= \frac{1}{\pi T} \exp\left(-\frac{|z|^2}{T}\right) \left( 1 - \frac{1}{T} + \frac{|z|^2}{T^2} \right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Аналогичным образом можно найти  $P$ -распределение для суперпозиции теплового поля и  $K$ -фотонного состояния [50]

$$P(n) = \frac{(T-1)^K}{T^{K+1}} \exp\left(-\frac{n}{T}\right) L_K\left(\frac{n}{T(1-T)}\right). \quad (7.6)$$

В частности, для  $K = 2$  имеем "заглаженную" вторую производную от  $\delta$ -функции

$$P(n) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{n}{T}\right) \left[ -\left(\frac{T-1}{T}\right)^2 + 2\frac{T-1}{T^3}n + \frac{n^3}{2T^4} \right]. \quad (7.7)$$

Согласно [50] при  $T \rightarrow 0$  функции (7.6) служат представлениями производных от  $\delta$ -функции, а при  $T \geq 1$  эти функции неотрицательны и могут служить классическими функциями распределения.

Вернемся к однофотонному случаю. Из (7.5) следует

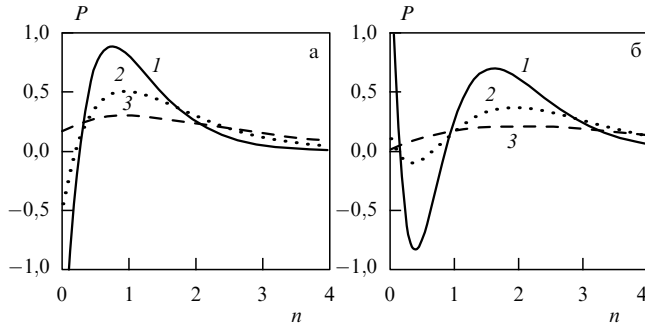
$$P(n) = \pi P_z(\sqrt{|z|}) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{n}{T}\right) \left( 1 - \frac{1}{T} + \frac{n}{T^2} \right). \quad (7.8)$$

Графики функции (7.8), являющейся "заглаженной" первой производной от  $\delta$ -функции, и функции (7.7) представлены на рис. 9.

### 7.2. Меры неклассичности

В качестве количественной меры неклассичности естественно выбрать параметр, связанный с площадями  $S_{\pm}$ , охватываемыми функцией  $P(n)$  в интервалах, где





**Рис. 9.** Квазираспределение энергии  $P(n)$  для подогретых однофотонного (а) и двухфотонного (б) состояний. Среднее число тепловых фотонов  $T$  равно: 1 — 0,5; 2 — 0,75; 3 — 1,25. При  $T < 1$  функции  $P(n)$  принимают отрицательные значения, что по определению служит признаком НКС. Сплошные кривые представляют также распределение Вигнера для чистых одно- и двухфотонных состояний при  $T = 0$ .

$P(n) > 0$  и  $P(n) < 0$ , соответственно (см. рис. 9). Эти площади имеют вид

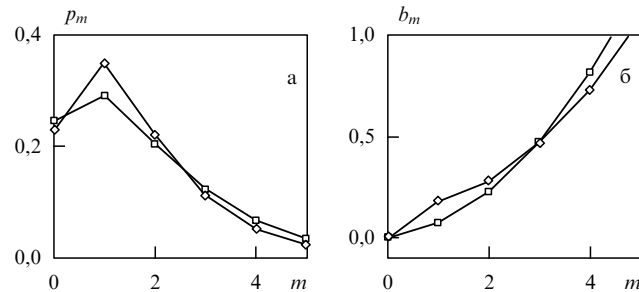
$$S_{\pm} \equiv \int_0^{\infty} P(n) \theta(\pm P(n)) \, dn, \quad (7.9)$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция. Из условия нормировки  $S_+ + S_- = 1$ . В случае классического света  $S_- = 0$ , а максимально неклассический свет дает  $S_+ = 1 - S_- \gg 1$ . Обозначим  $S \equiv 1/S_+$ , тогда при переходе от максимально неклассического света к классическому параметр  $S$  монотонно изменяется в интервале  $(0,1)$ .

Пуассоновское преобразование (3.2) распределения (7.8) дает следующие вероятности отсчетов (рис. 10)

$$p_m = \frac{T^m}{(1+T)^{m+1}} \left[ 1 - \frac{1}{T} + \frac{1+m}{T(1+T)} \right]. \quad (7.10)$$

Факториальные моменты этого распределения равны обычным моментам распределения (7.8):  $G_k = k!T^{k-1} \times (k+T)$ . Нормированные факториальные моменты



**Рис. 10.** Вероятности отсчетов  $p_m$  (а) и величины  $b_m = \log(m!p_m/p_0)$  (б) в случае подогретого однофотонного состояния;  $\diamond$  —  $T = 0,55$ ;  $\square$  —  $T = 0,75$ . При переходе от  $T = 0,75$  к  $T = 0,55$  появляется выпуклость в точке  $m = 1$ , наглядно демонстрирующая неклассичность поля согласно  $D_1(1)$ -критерию (б). В то же время неклассичность поля явно не проявляется, хотя набор соседних вероятностей 0,23; 0,35 и 0,22 при  $m = 0, 1$  и 2 недопустим в классическом варианте формулы Манделя (а).

имеют вид

$$g_k(T) \equiv \frac{G_k(T)}{\langle m \rangle^k} = k!T^{k-1} \frac{k+T}{(1+T)^k}. \quad (7.11)$$

В частности,

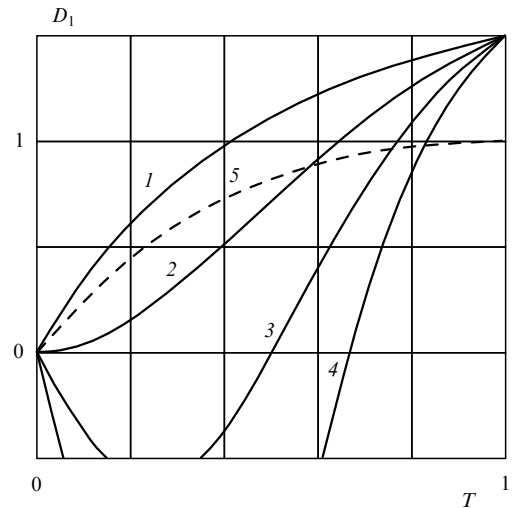
$$g_2 = 2[1 - (1+T)^{-2}]. \quad (7.12)$$

На рисунке 11 сравниваются различные параметры неклассичности.

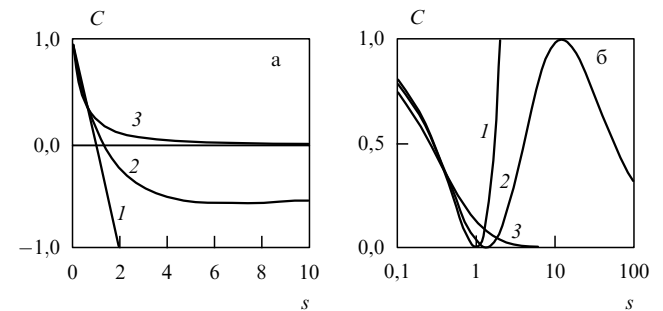
Из (7.6) получаем производящие функции для суперпозиций  $K$ -фотонных и теплового состояний (рис. 12)

$$C_K(s) = \frac{[1 + s(T-1)]^K}{(1+sT)^{K+1}}. \quad (7.13)$$

В отличие от случая подогретого сжатого вакуума эти функции вещественны при всех вещественных  $s$ .



**Рис. 11.** Зависимость параметра  $D_1(s)$  от среднего числа тепловых фотонов  $T$ : в случае суперпозиции однофотонного состояния и теплового: 1 —  $s = 0$ ; 2 —  $s = 1$ ; 3 —  $s = 2$ ; 4 —  $s = 3$  параметр  $S$  согласно (7.9). Неравенство  $D_1(s) < 1$  является признаком неклассичности. По мере возрастания  $s$  чувствительность к неклассичности увеличивается (параметр группировки  $g_2 = D_1(0)$  наименее чувствителен).



**Рис. 12.** Производящие функции для подогретых однофотонного (а) и двухфотонного (б) состояний: 1 —  $T = 0$ ; 2 —  $T = 0,25$ ; 3 —  $T = 1$ . Лишь функции при  $T = 1$  приемлемы в классической теории.

## 8. Влияние поглощения и усиления на НКС

Пусть исследуемый свет перед детектированием проходит через линейный поглотитель с коэффициентом передачи по интенсивности  $\eta$ . В классической теории поглотитель просто уменьшает интенсивность прошедшего света:  $n \rightarrow n' = \eta n$ . Соответствующее изменение распределения имеет, очевидно, вид

$$P(n) \rightarrow P'(n) = \frac{1}{\eta} P\left(\frac{n}{\eta}\right). \quad (8.1)$$

Таким образом, линейное поглощение не изменяет форму распределения  $P(n)$ , а лишь меняет его масштаб, "пережимая" его в область малых энергий.

Возможность такого простого описания поглощения сохраняется и в квантовой теории, если его применять лишь к нормальным операторам (см., например, [80]). В таких операторах исключен вклад квантовых шумов и поэтому они ведут себя при линейных преобразованиях подобно соответствующим классическим величинам. В частности, в (8.1) можно под  $P(n)$  понимать квантовое квазираспределение. Соответственно, характеристическая и производящая функции также лишь меняют свои масштабы:

$$\chi'(w, w^*) = \chi(\sqrt{\eta}w, \sqrt{\eta}w^*), \quad (8.2)$$

$$C'(s) = C(\eta s).$$

Факториальные моменты распределения отсчетов просто умножаются на соответствующую степень  $\eta$ :  $G'_k = \eta^k G_k$ , а нормированные факториальные моменты вообще оказываются инвариантами преобразования (8.2):  $g'_k \equiv G'_k / (G'_1)^k = g_k$ . Производящая функция для нормированных факториальных моментов  $\tilde{C}(s) \equiv C(s/\langle m \rangle)$  инвариантна к линейному поглощению:  $\tilde{C}'(s) = \tilde{C}(s)$ .

Отсюда следует, что факт неклассичности света, определяемый по нерегулярности и знаку функции  $P(n)$  (или по неограниченности характеристической функции  $\chi(w)$ , по неабсолютной монотонности производящей функции  $C(s)$ ), не изменяется под действием поглощения: если функция  $P(n)$  принимала отрицательные значения, то же делает и  $P(n/\eta)$ . Итак, НКС после сколь угодно сильного поглощения остается неклассическим. Аналогично, линейное поглощение оставляет классический свет классическим (парадоксальное исключение из этого правила рассмотрено в [35]). С другой стороны, нелинейное поглощение может использоваться для превращения лазерного света в НКС (см. [32, 65, 81]).

Следовательно, количественные меры неклассичности, определяемые через нормированные факториальные моменты  $g_k$ , также не изменяются при поглощении. Это же относится и к мере Ли  $T_0$ . В то же время параметры, определяемые через ненормированные моменты  $G_k$  и через вероятности отсчетов  $p_m$ , изменяются. Например, фактор Фано испытывает преобразование

$$\begin{aligned} F \rightarrow F' &= 1 + \langle m \rangle' (g_2 - 1) = \\ &= 1 + \eta \langle m \rangle (g_2 - 1) = 1 + \eta(F - 1). \end{aligned} \quad (8.3)$$

При идеальной начальной антигруппировке  $g_2 = 1 - 1/\langle m \rangle$  и  $F = 0$ ; после поглощения  $F' = 1 - \eta$ . При достаточно большом поглощении, когда  $\eta \rightarrow 0$ ,

$F \rightarrow 1$  и статистика отсчетов становится пуассоновской, даже если до поглощения имелась идеальная антигруппировка,  $F = 0$  или, наоборот, сильная группировка,  $F \gg 1$ . В этом смысле поглощение "пуассонизирует" любой свет. Относительный шум на выходе поглотителя определяется параметром  $\langle \Delta m^2 \rangle' / \langle m \rangle'^2 = F' / \langle m \rangle'$ , который увеличивается с поглощением. В идеальном случае  $\langle \Delta m^2 \rangle' / \langle m \rangle'^2 = (1 - \eta) / \langle m \rangle'$ .

Рассмотрим изменение вероятностей отсчетов при поглощении. Из (8.2), (II.2) находим преобразование обобщенных моментов

$$a'_k(s) = (-1)^k \frac{d^k C'(s)}{ds^k} = \eta^k a_k(\eta s). \quad (8.4)$$

Полагая  $s = 0$ , получаем  $G'_k = \eta^k G_k$ . Далее, с помощью (II.3) находим

$$\begin{aligned} a'_k(s) &= \eta^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s - \eta s)^m}{m!} a_{k+m}(s) = \\ &= \eta^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(s - \eta s)^{n-k}}{(n-k)!} a_n(s). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Отсюда при  $s = 1$  и  $a_k(1) = k! p_k$  получаем известное преобразование для вероятностей [82]

$$p'_m = \sum_{k=m}^{\infty} C_k^m \eta^m (1 - \eta)^{k-m} p_k. \quad (8.6)$$

Замена  $\eta$  на  $1/\eta$  дает обратное преобразование  $p' \rightarrow p$  (это следует из  $a_k(s) = \eta^{-k} a'_k(s/\eta)$ ), с помощью которого можно восстановить исходное распределение  $p_k$  по измененным поглощением вероятностям  $p'_k$ . Отметим ограничение сверху на величину  $1/\eta$ , следующее из условия  $p_k \geq 0$  в случае НКС:  $a'_k(1/\eta) \geq 0$  (вообще, из  $G_k \geq 0, p_k \geq 0$  следует  $a_k(0) \geq 0, a_k(1) \geq 0$ ).

В общем случае преобразование (8.6) существенно изменяет вид распределения. Однако существуют типы распределения, "устойчивые" к этому преобразованию. Изменяются лишь численные параметры распределения, а его функциональная форма остается неизменной. Например, в случае пуассоновского и теплового распределений единственный параметр распределения  $\langle m \rangle$  заменяется на  $\eta \langle m \rangle$ . В то же время имеются неустойчивые распределения, форма которых существенно изменяется. Известным примером является состояние с определенным числом фотонов  $|K\rangle$ . При этом  $p_m = \delta_{Km}$  и из (8.6) следует

$$p'_m = C_K^m \eta^m (1 - \eta)^{K-m}. \quad (8.7)$$

Аналогично, провалы для нечетного числа отсчетов в случае сжатого вакуума (см. рис. 4) под действием поглощения заглаживаются. В следующем разделе мы покажем, что свет с неустойчивой статистикой можно использовать для фотометрии.

Выше поглотитель считался холодным. В общем случае надо учитывать его собственное тепловое излучение. Согласно [17, 80] при этом статистика поля на выходе описывается следующей характеристической функцией (ср. (8.2))

$$\chi'(w, w^*) = \chi(\sqrt{\eta}w, \sqrt{\eta}w^*) \exp[-\eta w w^* T(1 - \eta)]. \quad (8.8)$$

Здесь  $T \equiv (\exp \beta - 1)^{-1}$  — среднее число фотонов в равновесном поле, имеющем температуру поглотителя  $\hbar\omega/k\beta$ . Таким образом, влияние теплового излучения нагретого поглотителя эквивалентно суперпозиции с тепловым полем, имеющим среднее число фотонов  $\bar{T} = T(1 - \eta)$ . Последнее соотношение аналогично закону Кирхгофа для теплового излучения; роль "поглощающей способности" вещества играет  $1 - \eta$ .

Преобразование (8.8) остается в силе и в случае усиления поля с помощью квантового усилителя с эффективной (спиновой) температурой  $\hbar\omega/k\beta < 0$  и усилением  $\eta > 1$  [17, 80]. При полной инверсии населенностей в усилителе  $\hbar\omega/k\beta = -0$  и  $T = -1$ , так что число фотонов в эквивалентном суперпозиционном поле равно  $\bar{T} = \eta - 1$  (это закон Кирхгофа для отрицательных температур, описывающий собственные шумы квантового усилителя). Но ранее мы убедились, что суперпозиция с тепловым полем, имеющим среднее число фотонов, равное или большее 1, заведомо делает любое поле классическим. Следовательно, усилитель с  $\eta > 2$  (т.е. усилением, большим 3 дБ) наверняка "деквантует" любой НКС.

В отличие от случая с холодным поглотителем теперь нормированные факториальные моменты также изменяются. Например, в случае однофотонного состояния, подставляя в (7.12)  $T = \eta - 1$ , получаем  $g'_2 = 2[1 - \eta^{-2}]$ . Антигруппировка исчезает после усиления в  $\sqrt{2}$  раз.

## 9. Учет неидеальности детектора и абсолютная фотометрия

Выше предполагалось, что объем детектирования  $V_{\text{det}}$  и объем когерентности  $V_{\text{coh}}$  совпадают. Однако фактически, чтобы получить неусредненную информацию о статистике поля, обычно необходимо выполнение более сильного условия  $V_{\text{det}} \ll V_{\text{coh}}$ . При этом энергия, которую "видит" детектор, уменьшается в  $V_{\text{det}}/V_{\text{coh}}$  раз, а статистика отсчетов изменяется так, как будто свет испытал поглощение  $\eta = V_{\text{det}}/V_{\text{coh}}$ .

Аналогично, квантовая эффективность детектора  $\eta_{\text{det}} < 1$  также приводит к эффективному поглощению энергии поля. Оба эти фактора можно учесть, полагая, что свет испытывает общее дополнительное поглощение  $\eta = \eta_{\text{det}} V_{\text{det}}/V_{\text{coh}}$ . Таким образом, статистика отсчетов при учете этих факторов описывается формулами раздела 8 при замене в них параметра  $\eta$  на  $\eta_{\text{det}} V_{\text{det}}/V_{\text{coh}}$ .

Использование одномодового описания стационарного пучка света в свободном пространстве требует обоснования. В соответствии с классической картиной идеальный широкополосный детектор при  $T \ll \tau_{\text{coh}}$  измеряет флуктуации во времени потока энергии  $R(t)$  (деленной на  $\hbar\omega_0$ ) через его поверхность; при этом  $\langle m \rangle = \eta_{\text{det}} \langle R \rangle T$  (здесь  $\langle m \rangle$  — среднее по большому набору отсчетов  $\{m_i\}$ , измеренных за суммарное время, много большее  $\tau_{\text{coh}}$ , а  $\langle R \rangle$  — средний по времени поток). Возникает вопрос, можно ли представить флуктуации  $R$  как флуктуации энергии по ансамблю, описывающему один эквивалентный классический или квантовый осциллятор?

Пучок с одной поперечной модой содержит множество продольных мод (фурье-компонент), статистику которых можно задать набором функций корреляции Глаубера  $G_n(t_1, \dots, t_n)$  [41–43]. Факториальные моменты отсчетов детектора имеют вид  $G'_n = (\eta_{\text{det}} T)^n G_n(0, \dots, 0)$

при  $T \ll \tau_n$ , где  $\tau_n$  — характерное время изменения функции  $G_n(t_1, \dots, t_n)$ . Размерность  $G_n(t_1, \dots, t_n)$  равна  $c^{-n}$ , при этом  $G_1(t_1) \equiv \langle R \rangle$  имеет смысл среднего потока фотонов (не зависящего от времени в стационарном пучке). В общем случае функциям  $G_n(t_1, \dots, t_n)$  соответствуют различные времена когерентности  $\tau_n$  и одномодовое описание невозможно. Пусть, однако, все  $\tau_n$  одинаковы,  $\tau_n = \tau_{\text{coh}}$  (например, пучок пропущен через фильтр с обратной полосой частот  $\tau_{\text{coh}} \gg \tau_n$ ; другая возможность рассмотрена в [90]), тогда  $G_n(0, \dots, 0) = (\tau_{\text{coh}})^{-n} G_n$ , где  $G_n = \langle : \hat{n}_0^n : \rangle$  — факториальные моменты числа фотонов в некоторой эффективной моде. В результате  $G'_n = \eta^n G_n$ , где  $\eta = \eta_{\text{det}} T / \tau_{\text{coh}}$ . Таким образом, наблюдаемая статистика отсчетов после обратного преобразования ("усиления" в  $\eta^{-1}$  раз) совпадает со статистикой фотонов в одной эффективной моде.

Из теории фотоотсчетов следует возможность абсолютного (т.е. безэталонного) измерения интенсивности света и квантовой эффективности фотодетекторов [15, 33, 65, 83]. Например, согласно (6.13) при  $T = 0$

$$g_2 = 3 + \frac{1}{\langle n \rangle}, \quad (9.1)$$

где  $\langle n \rangle$  — среднее число фотонов в одной моде падающего на детектор света, связанное с интенсивностью  $I$  и эффективной полосой частот света  $\Delta\omega$  (с одной поперечной модой):  $I = \hbar\omega\Delta\omega\langle n \rangle/2\pi$ . Квантовая эффективность детектора (как и поглощение) не влияет на нормированные факториальные моменты отсчетов, поэтому для измерения параметра  $g_2$  не нужно знать  $\eta$  и из (9.1) можно определить  $\langle n \rangle$ :

$$\langle n \rangle = (g_2 - 3)^{-1}, \quad g_2 = \frac{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle}{\langle m \rangle^2}. \quad (9.2)$$

Отсюда находим

$$\eta = \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle} = \langle m \rangle (g_2 - 3). \quad (9.3)$$

Все параметры в последней части выражения (9.3) определяются по фотоотсчетам, т.е. измеряются без помощи каких-либо калиброванных приборов.

При практическом применении этого общего принципа абсолютной фотометрии используется невырожденное параметрическое рассеяние (при котором фотоны в паре излучаются в разных направлениях и/или с разными поляризациями) и двухдетекторная схема совпадений фотоотсчетов [15].

Согласно (7.12) можно использовать также "подогретый" однофотонный свет. При этом  $\langle n \rangle = 1 + T$  и  $g_2 = 2(1 - \langle n \rangle^{-2})$ , так что параметр  $T$  исключается

$$\langle n \rangle = \left(1 - \frac{g_2}{2}\right)^{-1/2}, \quad \eta = \langle m \rangle \left(1 - \frac{g_2}{2}\right)^{1/2}. \quad (9.4)$$

В случае распределения Скалли–Лемба (5.21) достаточно измерить  $g_2$  и  $g_3$  [65].

Вообще, при абсолютной калибровке детекторов необходимо, чтобы нормированные факториальные моменты зависели от параметров распределения, причем эта зависимость должна быть обратимой и известной [65]. При этом в результате поглощения (или

детектирования) дискретная статистика фотонов (или отсчетов) изменяет свою функциональную форму, как, например, в случае  $K$ -фотонного света (см. (8.7)). В то же время когерентный или тепловой свет сохраняет при поглощении форму распределения. Производящая функция для нормированных факториальных моментов  $\tilde{C}(s) \equiv C(s/\langle m \rangle)$  не изменяется при поглощении (детектировании) и в ней заключена вся информация о свете, которую можно получить с помощью детектора с неизвестной эффективностью. Следовательно, для абсолютной фотометрии необходимо, чтобы функция  $\tilde{C}(s)$  зависела от  $\langle m \rangle$  и других параметров распределения. Это не так в случае "обычных" источников света.

В идеальном случае измеренная функция  $C'(s)$  "сжимается" преобразованием  $s \rightarrow ks$  ( $k > 1$ ) до тех пор, пока она не совпадет с заданной функцией  $C(s)$ ; при этом  $\eta = 1/k$ . Эквивалентное преобразование вероятностей определяется (8.6) при замене  $p_m \leftrightarrow p'_m$ ,  $\eta \rightarrow k$  (последнее преобразование в случае НКС может приводить к отрицательным  $p_m$ ).

Возникает вопрос, необходим ли НКС для абсолютной калибровки детекторов? Соотношение (9.4) справедливо и при  $T > 1$ , т.е. когда состояние однофотонного поля не является неклассическим. Аналогично, в случае "подогретого" сжатого вакуума (6.13) позволяет измерить параметр  $x$  по статистике отсчетов независимо от параметра неклассичности  $T_0$  (для перехода от  $x$  к  $N$  и  $T$  можно повторить измерение, уменьшив  $T$ , например, в два раза). Следовательно, "калибровочный" свет для абсолютной фотометрии не обязательно должен относиться к классу неклассических. В [65] было рассмотрено несколько примеров приготовления такого света. Можно, в принципе, использовать излучение лазера вблизи порога при условии, что его статистика описывается распределением Скалли–Лемба (5.18) [64], а также обычный свет, пуассоновский или тепловой, после его нелинейного (двухфотонного или с эффектом насыщения) поглощения.

## 10. Влияние светоделителя на НКС

При учете фазового сдвига в поглотителе надо ввести амплитудный коэффициент передачи  $t \equiv \sqrt{\eta} \exp(i\phi)$ , при этом (ср. (8.1), (8.2))

$$P'_z(z) = t^{-1} P_z(t^{-1}z), \quad \chi'(w, w^*) = \chi(tw, t^*w^*). \quad (10.1)$$

Подобные по форме соотношения справедливы и при произвольном линейном преобразовании многомодового поля [80, 84].

Важный пример дает смещение двух пучков света с помощью светоделителя — полупрозрачного зеркала или поляризационной призмы. Квантовой теории светоделения посвящено значительное число работ (см. [32, 80, 85–89]). Мы будем следовать [80]. В классической оптике действие светоделителя описывается следующим преобразованием амплитуд двух пучков

$$d' = ta + rb, \quad b' = -r^*a + t^*b. \quad (10.2)$$

Здесь  $t$ ,  $r$  — феноменологические коэффициенты прохождения и отражения. При отсутствии потерь  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . Штрихованные величины относятся к выходным пучкам.

При переходе к квантовой теории надо под  $a$ ,  $b$  понимать операторы уничтожения фотонов и под  $a^*$ ,  $b^*$  — операторы рождения фотонов  $a^\dagger$ ,  $b^\dagger$  (при этом  $a^{\dagger'} = t^*a^\dagger + r^*b^\dagger$ ,  $b^{\dagger'} = -ra^\dagger + tb^\dagger$ ) и (10.2) также можно применять, но только после преобразования операторных функций от  $a$ ,  $b$ ,  $a^\dagger$ ,  $b^\dagger$  к нормальному (нормально-упорядоченному) виду [80]. Это правило обеспечивает инвариантность коммутационных соотношений между операторами.

Выразим входные амплитуды  $a$ ,  $b$  через выходные  $d'$ ,  $b'$  с помощью преобразования, обратного (10.2)

$$a = t^*d' - rb', \quad b = r^*d' + tb'. \quad (10.3)$$

Пусть входные пучки независимы, тогда их совместная статистика определяется произведением исходных характеристических функций

$$\chi(u, v) = \chi_a(u) \chi_b(v). \quad (10.4)$$

Как показано в [80], нормальная характеристическая функция преобразованного (выходного) поля совпадает с (10.4) после замены в правой части аргументов  $u$ ,  $v$  на  $u = t^*u' - rv'$ ,  $v = r^*u' + tv'$  в соответствии с (10.3). В результате получаем

$$\chi'(u', v') = \chi_a(t^*u' - rv') \chi_b(r^*u' + tv')$$

или, опуская штрихи у аргументов,

$$\chi'(u, v) = \chi_a(t^*u - rv) \chi_b(r^*u + tv). \quad (10.5)$$

Здесь аргументы  $u$ ,  $v$  относятся к выходным пучкам  $a$ ,  $b$  соответственно. Выходные пучки оказываются, конечно, не независимыми, их статистики "перемешиваются".

Пусть нас интересует статистика света только в одном выходном пучке, например  $a$ , тогда она определяется из (10.5) при  $v = 0$

$$\chi(u) \equiv \chi'_a(u) = \chi_0(t^*u) \chi_b(r^*u). \quad (10.5a)$$

В то же время в случае суперпозиции двух независимых полей  $\chi(u) = \chi_a(u) \chi_b(u)$ . Сравнение с (10.5a) показывает, что на выходе светоделителя образуется суперпозиция двух исходных полей, но испытавших эффективное амплитудное поглощение  $t^*$  и  $r^*$  соответственно. Ясно, что реализация неискаженной суперпозиции с помощью светоделителя возможна лишь при трех условиях: хотя бы одно поле ("гомодинное") должно иметь устойчивую к поглощению статистику (как, например, когерентное или тепловое поле); необходимо  $t \approx 1$  и, соответственно, интенсивность устойчивого поля  $\mathbf{b}$  должна быть увеличена в  $|r|^{-2} \gg 1$  раз.

Согласно (5.4) моменты суперпозиции  $\chi(u) = \chi_a(u) \chi_b(u)$  выражаются через моменты исходных полей в соответствии с правилом дифференцирования произведения двух функций

$$G_{mm} = (-1)^n \frac{\partial^m}{\partial u^m} \frac{\partial^n}{\partial u^{*n}} (\chi_a \chi_b) \Big|_{u=u^*=0} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{l} G_{kl}^{(a)} G_{m-k, n-l}^{(b)}, \quad (10.6)$$

где  $\binom{m}{k}$ , — число сочетаний из  $m$  по  $k$ .

В стационарном случае

$$G_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 G_k^{(a)} G_{m-k}^{(b)}. \quad (10.7)$$

В соответствии с (10.5) заменим  $G_{kl}^{(a)}$ ,  $G_{m-k, n-l}^{(b)}$  в (10.6) на

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{kl}^{(a)} &\equiv (t^*)^k t^l G_{kl}^{(a)}, \\ \tilde{G}_{m-k, n-l}^{(b)} &\equiv (r^*)^{m-k} r^{n-l} G_{m-k, n-l}^{(b)}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Здесь  $\tilde{G}_{kl}^{(a)}$ ,  $\tilde{G}_{kl}^{(b)}$  — моменты двух исходных полей, испытавших эффективное амплитудное поглощение  $t$  и  $r$  соответственно. В результате выражаем моменты в одном выходном пучке через моменты двух входных пучков света

$$G_{mm} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{l} \tilde{G}_{kl}^{(a)} \tilde{G}_{m-k, n-l}^{(b)}. \quad (10.9)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. На входе  $b$  — вакуум,  $G_{m-k, n-l}^{(b)} = \delta_{mk} \delta_{nl}$ , так что  $G'_{mm} = (t^*)^m t^n G_{mm}^{(a)}$  и  $G_m = \eta^m G_m^{(a)}$  (здесь  $\eta \equiv |t|^2$ ). Это частный случай поглощения, когда роль поглотителя играет светоделитель. Истинной диссипации здесь нет, "поглощенная" энергия уходит во второй, не наблюдаемый канал.

2. В стационарном случае

$$G'_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \eta^k (1-\eta)^{m-k} G_k^{(a)} G_{m-k}^{(b)}. \quad (10.10)$$

Пусть на входе — состояния с определенными числами фотонов  $N_a$  и  $N_b$ , тогда

$$\begin{aligned} G_k^{(a)} &= N_a(N_a - 1) \dots (N_a - k + 1), \\ G_{m-k}^{(b)} &= N_b(N_b - 1) \dots (N_b - m + k + 1). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Отсюда

$$G'_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \frac{\eta^k N_a!}{(N_a - k)!} \frac{(1-\eta)^k N_b!}{(N_a - n + k)!}. \quad (10.12)$$

В частности

$$\begin{aligned} G'_1 &= \eta N_a + (1-\eta) N_b, \\ G'_2 &= N_a(N_a - 1) \eta^2 + 4\eta(1-\eta) N_a N_b + \\ &\quad + N_b(N_b - 1)(1-\eta)^2. \end{aligned} \quad (10.13)$$

В результате находим фактор Фано на выходе

$$F' = 1 - \frac{\eta^2 N_a - 2\eta(1-\eta) N_a N_b + (1-\eta)^2 N_b}{\eta N_a + (1-\eta) N_b}. \quad (10.14)$$

При  $N_b = 0$  имеем  $F' = 1 - \eta$ . Характерно, что на выходе имеются флуктуации энергии,  $F' \neq 0$ , несмотря на "бесшумный" вход. Можно объяснить это совместным влиянием "шумов разделения" и эффективным поглощением.

3. Поле  $b$  — когерентное,  $G_{m-k, n-l}^{(b)} = (z_0^*)^{m-k} z_0^{n-l}$ . Из (10.8) следует

$$G'_{mm} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{l} (t^*)^k t^l G_{kl}^{(a)} (r^* z_0^*)^{m-k} (r z_0)^{n-l}. \quad (10.15)$$

В общем случае это выражение не описывает смещенное состояние  $a$ . Но если  $t \approx 1$ , то получаем (с некоторой конечной точностью) желаемый результат. При этом исходная амплитуда когерентного поля должна быть увеличена в  $1/r \gg 1$  раз.

4. Поле  $b$  — тепловое,  $G_{m-k}^{(b)} = (m-k)! T^{m-k}$ . Из (10.10) следует

$$G'_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \eta^k G_k^{(a)} (m-k)! [(1-\eta) T]^{m-k}. \quad (10.16)$$

Опять для реализации неискаженной суперпозиции необходимо  $t \approx 1$ ,  $r \approx 0$  и соответствующее увеличение интенсивности  $T$  теплового поля.

## 11. Заключение

Итак, полуклассическая формула Манделя для статистики фотоотсчетов приводит к ряду наблюдаемых признаков НКС, т.е. света, который нельзя рассматривать как совокупность волн со случайной интенсивностью  $n$ , имеющей некоторое неотрицательное распределение  $P(n)$ . Эти признаки непосредственно связаны с известной математической проблемой моментов Стильбеса. Многие из них наблюдались за последние годы с большой степенью надежности.

Проследим еще раз исходную причину несовместности квантового и полуклассического описания процесса фотодетектирования. В квантовых моделях процесс передачи энергии от возбужденной системы к невозбужденной определяется нормально-упорядоченными моментами передающей системы и антинормально-упорядоченными принимающей системы (см., например, [47]); нормальная упорядоченность обеспечивает, в частности, отсутствие вклада вакуумных флуктуаций. Нормально-упорядоченные моменты не являются "истинными" моментами какого-либо неотрицательного распределения и поэтому они не подчиняются обычным соотношениям типа Коши-Шварца — в противоположность классическим моментам. Именно это различие и позволяет выделить класс состояний поля, не имеющих классических аналогов.

Мы пытались здесь систематизировать операциональный подход к НКС на основе двух альтернативных наборов измеряемых параметров: вероятностей фотоотсчетов  $\{p_m\}$  и нормированных факториальных моментов отсчетов  $\{g_k\}$ . В рамках классической оптики оба набора должны быть моментными, т.е. они должны определяться через неотрицательную функцию распределения  $P(n)$  для интенсивности света; соответствующая производящая функция  $C(s)$  должна монотонно убывать от 1 до 0. Это приводит к бесконечному набору неравенств между функциями от  $p_m$  и  $g_k$ . Соответственно, экспериментальные критерии неклассичности подразделяются на два класса:  $p$ - и  $g$ -критерии. По-видимому,  $p$ -критерии рассмотрены здесь впервые. Как оказалось, в некоторых случаях они более чувствительны.

Простейшие из классических неравенств имеют наглядный геометрический образ — вогнутость графиков  $\ln(g_k)$  или  $\ln(m!p_m)$ . В частности, выпуклость графика  $\ln(g_k)$  в точке  $k = 1$  дает наиболее известный и практически важный  $g_2$ -критерий НКС — антигруппировку числа отсчетов.

Были также введены обобщенные моменты  $a_k(s)$  с дополнительным параметром  $s$ , позволяющим объединить и обобщить эти подходы ( $a_0(s) = C(s)$ ,  $a_k(0) = G_k$ ,  $a_k(1) = k!p_k$ ). При соответствующем выборе  $s$  условия  $a_k(s) > 0$  позволяют обнаруживать слабые неклассичности.

Все наблюдаемые признаки НКС следуют из условий отрицательности матриц Ганкеля  $H_K^{(n)}(s)$  ( $K, n = 1, 2, \dots$ ), составленных из  $a_k(s)$  при фиксированном  $s$ . Достаточно использовать матрицы двух основных типов:  $H_K^{(0)} \equiv H_K$  или  $H_K^{(1)} \equiv H'_K$ , так что наблюдаемые признаки неклассичности можно разделить на два класса по типу используемой матрицы Ганкеля:  $H$  или  $H'$ .

Мера неклассичности  $T$ , предложенная Ли [49] (см. также [91]), позволяет теоретически и экспериментально проследить за непрерывным переходом света от максимально неклассического ( $T = 0$ ) к классическому ( $T$  — среднее число фотонов вспомогательного теплового излучения, которое добавляется к исследуемому свету). Для каждого квантового состояния существует минимальное значение  $T = T_0 \leq 1$ , при котором у суперпозиционного состояния появляется классическое распределение энергии. Сравнение  $T_0$  со значением  $T$ , приводящим к потере некоторого признака НКС, позволяет сравнивать чувствительность различных наблюдаемых критериев неклассичности.

Подробно проанализированы два частных примера — "подогретый" сжатый вакуум (I) и "подогретое" однофотонное состояние (II). Эти примеры выявили два типа неклассических состояний: в случае I регулярное  $P$ -распределение существует лишь при  $T > T_0$ , а в случае II регулярное  $P$ -распределение имеется при сколь угодно малом  $T$  (но в интервале  $[0, T_0)$  оно отрицательно). Кроме того, эти случаи отличаются и по типу матрицы Ганкеля, чувствительной к неклассичности:  $H'$  в случае I и  $H$  в случае II. Известно множество других типов НКС (как реалистичных, так и не очень), для которых интересно было бы провести аналогичный анализ.

Проведенный анализ показал также, что условие неклассичности света не является обязательным при абсолютном измерении эффективности детекторов по статистике фотоотчетов. В связи с этим представляется важным поиск типов состояний света, оптимальных для фотометрии и методов его приготовления.

Наконец, были выяснены условия, при которых светоделитель реализует математическую операцию суперпозиции двух одномодовых полей, которая часто используется при исследовании НКС.

Рассматривалась лишь одноточечная статистика отсчетов в случае с одним одномодовым счетчиком фотонов. Исследование динамики и спектральных свойств поля имеет большое значение для практических применений НКС, однако оно не должно существенно изменить наши выводы. Многомодовые детекторы не дают новой информации о свете, они лишь усредняют статистику поля по пространственно-временному объему детектирования.

Более интересны корреляционные измерения с двумя (или более) детекторами. Некоторые признаки неклассичности известны и для этого случая (см. (6.6а), (I.12–I.14) и [27, 41, 56, 57, 74, 92]), однако представляют, по-видимому, интерес более систематические исследования, в частности, рассмотрение  $p$ -критериев. В общем случае имеем  $n$  мод и столько же одномодовых детекторов.

Результатом экспериментов являются наборы совместных вероятностей  $p(m_1, \dots, m_n)$  или факториальных моментов. В классической оптике эти наборы являются моментными, т.е. определяются через неотрицательное совместное распределение  $n$  модовых амплитуд. В результате для операционального определения неклассичности многомодового света необходимо рассмотреть проблему моментов для  $n$  переменных. Отметим, что нетривиальная многомодовая статистика, приводящая, в частности, к интерференции интенсивностей с видностью 100 % и нарушению неравенства Белла, предполагает нефакторизованный вектор состояния поля; такие состояния называют перепутанными (entangled states) (см. [93]).

Отметим в заключение некоторый парадокс — квантовая природа света приводит к дробовым (фотонным) шумам при его детектировании, но она же и предоставляет метод избавления от них с помощью субпуассоновского неклассического света. Однако практически освоить эту возможность пока еще только предстоит, и в настоящее время единственным техническим применением НКС является, по-видимому, абсолютная фотометрия.

И еще одно заключительное замечание: представляется нетривиальным, что простые модели квантовой оптики с небольшим числом феноменологических параметров прекрасно описывают все известные сейчас оптические эксперименты с макроприборами, состоящими из  $\sim 10^{23}$  атомов и расположенными иногда на расстояниях в сотни метров. Вероятно, это еще один пример общей закономерности: любые макроявления, описываемые феноменологическими динамическими уравнениями, при достаточно низких температурах подчиняются соответствующим квантовым законам.

## 12. Приложения

### I. Ограничения на моменты

Условия существования решения у проблемы моментов формулируются с помощью набора матриц Ганкеля [39, 51–54]. Составим из моментов  $a_0 = 1, a_1, \dots, a_{2K}$  матрицу  $H \equiv H_K^{(0)}$  порядка  $K+1$  по правилу

$$H_{ij} = a_{i+j} = \int_0^\infty dx P(x) x^{i+j}, \quad (I.1)$$

т.е.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_K \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{K+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{K+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_K & a_{K+1} & a_{K+2} & \dots & a_{2K} \end{bmatrix}. \quad (I.2)$$

Эта матрица определяет квадратичную форму  $Q(u) = \sum_{i,j} H_{ij} u_i u_j$  — функцию  $K+1$  переменных  $u \equiv (u_0, \dots, u_K)$ . Подставив сюда определение моментов  $a_i$  через  $P(x) \geq 0$ , получаем неравенство

$$\begin{aligned} Q(u) &= \int_0^\infty dx P(x) \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K u_i u_j x^i x^j = \\ &= \int_0^\infty dx P(x) \left( \sum_{i=0}^K u_i x^i \right)^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (I.3)$$

которое справедливо при любых  $u$ . Форма  $Q(u)$  (а также соответствующая ей матрица  $H_{ij}$ ), удовлетворяющая этому неравенству, называется неотрицательно определенной. Условие (I.3) равносильно требованию неотрицательности определителя,  $\det H \geq 0$  [60].

Поскольку экспериментальные значения моментов определяются с конечной точностью, то случай равенства в (I.3) (и следующих ниже неравенствах) можно не принимать во внимание и ограничиться условием положительной определенности матрицы  $H$ , т.е.  $\det H > 0$ .

Следовательно, в случае классического света все собственные значения матрицы моментов  $H_{ij}$  должны быть положительными:  $\lambda_i > 0, i = 0, 1, \dots, K$ . Это необходимое условие того, что набор  $a_0, \dots, a_{2K}$  является моментным, т.е. определяется через некоторое неотрицательное распределение  $P(x)$ . Можно показать, что переход к нормированным моментам  $a'_k = g_k \equiv G_k/G_1^k$  сводится к умножению  $\det H$  на  $G_1^{K(K+1)}$  и не изменяет условия  $\det H > 0$ .

Равносильное условие — положительность всех угловых (прилежающих к левому верхнему углу матрицы  $H$ ) миноров (критерий Сильвестра [60]), т.е. определителей всех матриц Ганкеля предыдущих порядков,  $K' = 1, 2, \dots, K - 1$ .

Рассмотрим также "смещенные" на  $n$  шагов вправо матрицы  $H_K^{(n)} \equiv (a_{i+j+n})$ . Для них аналогично (I.3) находим

$$Q(u) = \int_0^\infty dx P(x) \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K u_i u_j x^{i+j+n} = \int_0^\infty dx P(x) x^n \left( \sum_{i=0}^K u_i x^i \right)^2 \geq 0. \quad (I.4)$$

Таким образом, необходимые условия классичности имеют вид

$$\begin{aligned} \det H_1^{(0)} &\equiv \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \geq 0, & \det H_1^{(1)} &\equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \geq 0, \\ \det H_1^{(2)} &\equiv \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \geq 0, & & \\ \det H_2^{(0)} &\equiv \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \geq 0, & & \\ \det H_2^{(1)} &\equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} \geq 0, \dots, & & \end{aligned} \quad (I.5)$$

где  $a_k = G_k$  или  $a_k = k!p_k/p_0$ . Обратные неравенства образуют достаточные условия неклассичности. В случае когерентного состояния, дающего пуассоновскую статистику, все эти определители равны нулю.

Решение проблемы моментов существует (т.е. свет классичен) тогда и только тогда, когда  $\det H_K \equiv \det H_K^{(0)} > 0$  и  $\det H'_K \equiv \det H_K^{(1)} > 0$  ( $K = 1, 2, \dots$ ) [53].

Критерии  $\det H_K > 0$  при  $a_k = G_k$  использовались в [59], где рассматривалось некоторое состояние поля, для которого  $\det H_1 > 1$  (т.е. не было антигруппировки), но  $\det H_2 < 1$ . Для получения количественной меры неклассичности вводилась нормировка  $\det H_K$  на определители матриц Ганкеля  $\check{H}_K$ , составленных из обычных (не факториальных) моментов  $\langle n^k \rangle$ . Эти матрицы, как будет показано ниже, всегда неотрицательны.

Из (I.5) следуют простейшие необходимые условия классичности в виде (ср. (4.7))

$$D_k \equiv \frac{\det H_1^{(k-1)}}{a_k^2} + 1 = \frac{a_{k-1} a_{k+1}}{a_k^2} \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (I.7)$$

Например,

$$a_2 \geq a_1^2, \quad a_1 a_3 \geq a_2^2. \quad (I.8)$$

В квантовой теории также имеются аналогичные ограничения на (обычные) моменты  $\langle n^k \rangle$ , следующие из неотрицательности матрицы плотности. Если под  $a_k$  понимать  $\langle n^k \rangle$  и заменить в (I.1), (I.3) классическое усреднение квантовым в соответствии с (5.2), то все приведенные выше неравенства остаются в силе, причем уже независимо от состояния поля. Например,  $D_1 \geq 1$  теперь означает  $\langle n^2 \rangle \geq \langle n \rangle^2$ , т.е.  $G_2 \geq \langle n \rangle (\langle n \rangle - 1)$ .

Условия (I.7) нетрудно получить непосредственно. Рассмотрим для этого произведение двух моментов распределения  $P(x) \geq 0$ :

$$a_k a_l \equiv \langle x^k \rangle \langle y^l \rangle = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy P(x) P(y) x^k y^l \equiv \langle x^k y^l \rangle. \quad (I.9)$$

Здесь  $k, l = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $l - k + 1 \equiv m \geq 0$ . Докажем неравенство [58]

$$a_k a_l \leq a_{k-1} a_{l+1}, \quad (I.10)$$

(при  $k = l$  получаем (I.7); более общий случай рассмотрен в [58]). Это неравенство можно представить как  $\langle x^k y^l \rangle \leq \langle x^{k-1} y^{l+1} \rangle$  или

$$\langle x^k y^l + y^k x^l \rangle \leq \langle x^{k-1} y^{l+1} + y^{k-1} x^{l+1} \rangle.$$

Поскольку  $P(x)P(y) \geq 0$ , то достаточно доказать, что при всех  $x, y \geq 0$  выполняется неравенство

$$x^k y^l + y^k x^l \leq x^{k-1} y^{l+1} + y^{k-1} x^{l+1}.$$

При  $x, y = 0$  это неравенство выполняется, поэтому без потери общности можно считать  $x, y > 0$ . Поделив обе части на  $x^{k-1} y^{l+1}$  и обозначив  $x/y \equiv \varepsilon > 0$ , получаем  $\varepsilon + \varepsilon^m \leq 1 + \varepsilon^{m+1}$  или  $\varepsilon^m - 1 \leq \varepsilon(\varepsilon^m - 1)$ . При  $\varepsilon = 1$  это неравенство выполняется. Разделим обе части на  $\varepsilon^m - 1$ . Если  $\varepsilon > 1$ , то  $\varepsilon^m - 1 > 0$  и при делении знак неравенства не изменяется, что дает согласующийся с исходным предположением результат  $1 < \varepsilon$ ; при  $\varepsilon < 1$  делим на  $\varepsilon^m - 1 < 0$  с изменением знака неравенства, что опять дает правильный результат  $1 > \varepsilon$ .

Ряд ограничений на моменты следует непосредственно из неравенств Коши–Шварца и Коши [60]

$$|\langle fg \rangle| \leq \sqrt{\langle f^* f \rangle \langle g^* g \rangle} \leq \frac{1}{2} [\langle f^* f \rangle + \langle g^* g \rangle], \quad (I.11)$$

где  $f \equiv f(x, y, \dots)$ ,  $g \equiv g(x, y, \dots)$  и  $x, y, \dots$  — случайные величины. Полагая  $f = x^{(m-k)/2}$ ,  $g = x^{(n+k)/2}$ , получаем (при четном  $(m+n)/2$ )

$$|a_{(m+n)/2}|^2 \leq a_{m-k} a_{n+k}. \quad (I.12)$$

В случае двух мод имеем две случайные интенсивности  $x, y$  и моменты

$$a_{m,n} \equiv \langle x^m y^n \rangle \equiv \iint dx dy P(x, y) x^m y^n$$

(ср. (I.9)). Полагая в (I.11)

$$f^2 = x^m y^n, \quad g^2 = x^{2k-m} y^{2l-n},$$

получаем

$$(a_{k,l})^2 \leq a_{mm} a_{2k-m, 2l-n}. \quad (\text{I.13})$$

Кроме того, аналогично (I.10) можно доказать неравенство [92]:

$$a_{k,l} + a_{l,k} \leq a_{k+1, l-1} + a_{l+1, k-1} \quad (k \geq l = 1, 2, \dots). \quad (\text{I.14})$$

Полагая  $a_{mm} = G_{mm}$  или  $a_{mm} = m!n!p_{mm}$ , получаем ряд ограничений на факториальные моменты  $G_{mm}$  и совместные вероятности отсчетов в двух детекторах  $p_{mm}$  (последние определяются двумерным преобразованием Пуассона). Например,

$$\begin{aligned} (p_{11})^2 &\leq 4p_{00}p_{22}, & (G_{11})^2 &\leq G_{22}, \\ (p_{11})^2 &\leq 4p_{02}p_{20}, & (G_{11})^2 &\leq G_{02}G_{20}. \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Высокая видность интерференции интенсивностей при использовании двухфотонного света [3, 12, 13] свидетельствует о нарушении последних двух неравенств.

## II. Обобщенные моменты

Примеры состояний, рассмотренные в разделах 6 и 7, показали, что экспериментальные тесты на неклассичность, основанные на вероятностях  $p_m$  и на факториальных моментах  $G_k$ , имеют различную чувствительность. Естественно попытаться найти оптимальный метод обработки массива отсчетов  $\{m_i\}$ , дающий наибольшую чувствительность к неклассичности.

Определим обобщенные моменты следующим образом:

$$\begin{aligned} a_k(s) &\equiv \sum_{m=k}^{\infty} p_m (1-s)^{m-k} \frac{m!}{(m-k)!} = \\ &= \int_0^{\infty} x^k \exp(-sx) P(x) dx = \langle : \hat{n}^k \exp(-s\hat{n}) : \rangle \quad (\text{II.1}) \\ (s \geq 0). \end{aligned}$$

Отсюда в классической теории  $a_k(s) > 0$ . При  $s = 0$  (II.1) дает обычные факториальные моменты  $G_k$ , а при  $s = 1$  — вероятности  $p_k$ , умноженные на  $k!$ . Согласно (II.1) и (4.2) момент  $a_k(s)$  равен  $k$ -й производной от производящей функции  $C(s)$ , умноженной на  $(-1)^k$ ,

$$\begin{aligned} a_0(s) &= C(s), & a_k(s) &= (-1)^k \frac{d^k C(s)}{ds^k}, \\ \frac{da_k(s)}{ds} &= -a_{k+1}(s). \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Добавив в (II.1) множитель  $1 - \exp(-s'x) \sum (s'x)^m / m!$  получаем

$$a_k(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s' - s)^m}{m!} a_{k+m}(s'). \quad (\text{II.3})$$

Соотношения (3.3) и (3.4а) следуют отсюда как частные случаи при  $(s, s')$  равном  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$ . Условие нормировки  $\sum p_m = 1$  дает

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(s-1)^m}{k!m!} a_{k+m}(s) = 1. \quad (\text{II.4})$$

Операционное определение через массив  $\{m_i\}$  имеет вид

$$a_k(s) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1-s)^{m_i-k} m_i(m_i-1) \dots (m_i-k+1) \quad (\text{II.5})$$

$(m_i \geq k)$ .

При  $s \rightarrow 1$  отличны от нуля лишь члены с  $m_i = k$ , т.е.  $a_k(1)/k!$  совпадает с эмпирическим определением вероятности  $p_k$ .

Радиус сходимости  $s_{\max}$  степенного ряда для функций  $a_k(s)$  зависит от вида распределения  $p_k$ .

Из (II.1) следует, что в классическом случае обобщенные моменты должны удовлетворять всем неравенствам для факториальных моментов и вероятностей, рассмотренным выше, однако теперь в нашем распоряжении имеется дополнительный параметр  $s$ .

Уже неравенства  $a_0(s) > 1$ ,  $a_k(s) < 0$  при любых  $s$  являются достаточным признаком НКС. Первое условие в случае подогретого сжатого вакуума выполняется согласно (6.10) при

$$s > s_1 \equiv \frac{2(N+T)}{N(N+1) - (N+T)^2}. \quad (\text{II.6})$$

При  $s = s_1/2$  нечетные моменты обращаются в нуль, что дает  $D_{2k+1}(s_1) = 0$ .

В случае подогретого однофотонного состояния со средним числом фотонов  $1+T$  момент  $a_0(s)$  согласно (7.14) оказывается отрицательным, т.е. обнаруживает неклассичность, при  $s > 1/(1-T)$ . Например, чтобы обнаружить неклассичность при  $T = 0, 5$ , надо найти  $a_0(2) = \langle (-1)^m \rangle = M^{-1} \sum_i (-1)^{m_i}$  ( $i$  — номер и  $M$  — число испытаний). Эта процедура может оказаться точнее, чем расчет определителей матриц Ганкеля высокого порядка. Из рисунка 9 ясно, почему функция  $a_0(s)$  оказывается отрицательной при достаточно больших аргументах: экспоненциальный множитель в (II.1) подчеркивает вклад начальных участков распределения  $P(n)$ , где оно отрицательно (при  $T < 1$ ).

Согласно (II.2) "сдвиг" матриц Ганкеля эквивалентен их дифференцированию по параметру  $s$

$$H_K^{(n+1)}(s) = \frac{-dH_K^{(n)}(s)}{ds}. \quad (\text{II.7})$$

Можно определить также комплексные моменты

$$\begin{aligned} c_k(\omega) &\equiv \int_0^{\infty} \exp(ik\omega n) P(n) dn = \langle : \exp(ik\omega \hat{n}) : \rangle, \\ c_k(\omega) &= c_{-k}(\omega)^* = c_k(-\omega)^* \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

при  $k = 0, \pm 1, \dots, N$ . Эти величины совпадают с  $\hat{P}(k\omega) = C(-ik\omega)$ , где  $\hat{P}(\omega)$  и  $C(s)$  — характеристическая и производящая функции чисел отсчетов (см. (4.1), (4.2)). Образует эрмитовы матрицы  $[H_N(\omega)]_{kl} \equiv c_{k-l}(\omega)$ ,



$N = 1, 2, \dots$ , и соответствующие квадратичные формы

$$Q(u) \equiv \sum_{k,l}^N c_{k-l}(\omega) u_k u_l^* = \int dn P(n) \left| \sum_k^N \exp(ik\omega n) u_k \right|^2 \quad (\text{II.9})$$

(при  $\omega = 2\pi$  они называются теплицевыми [52]). В классической теории  $P(n) \geq 0$ , так что матрицы  $H_N(\omega)$  неотрицательно определены. Таким образом, условия  $\det H_N(\omega) = \det \{ \tilde{P}[(k-l)\omega] \} \geq 0$  также можно использовать как тесты на неклассичность. Например, при  $N = 1$  и  $2$  получаем

$$1 - |\tilde{P}(\omega)|^2 \geq 0, \\ 1 + 2\text{Re}[\tilde{P}(2\omega)\tilde{P}(\omega)^{2*}] - |\tilde{P}(2\omega)|^2 - 2|\tilde{P}(\omega)|^2 \geq 0. \quad (\text{II.10})$$

В случае подогретого однофотонного состояния эти условия обнаруживают неклассичность лишь при  $T < 0,41$  и  $T < 0,55$  соответственно, т.е. они не имеют преимущества перед тестами, использующими вещественные моменты  $a_k(s)$ .

## Список литературы

- Brown RH, Twiss R Q *Nature* **177** 27 (1956)
- Lipeles M, Novick R, Tolk N *Phys. Rev. Lett.* **15** 690 (1965); Kaul R D *J. Opt. Soc. Am.* **56** 1262 (1966)
- Koher C. A, Commins E D *Phys. Rev. Lett.* **18** 575 (1967)
- Ахманов С А и др. *Письма ЖЭТФ* **6** 575 (1967)
- Harris S E, Oshman M K, Byer R L *Phys. Rev. Lett.* **18** 732 (1967)
- Magde D, Mahr H *Phys. Rev. Lett.* **18** 905 (1967)
- Kimble H J, Dagenais M, Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **39** 691 (1977)
- Slusher R E et al. *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409 (1985)
- Shelby R M et al. *Phys. Rev. Lett.* **57** 691 (1986)
- Wu L A et al. *Phys. Rev. Lett.* **57** 2520 (1986)
- Freedman S J, Clauser J F *Phys. Rev. Lett.* **28** 938 (1972)
- Ghosh R & Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **59** 1903 (1987)
- Strekalov D V et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 3600 (1995)
- Pittman T B et al. *Phys. Rev. A* **52** R 3429 (1995)
- Китаева Г Х и др. *ДАН СССР* **247** 586 (1979); Малыгин А А, Пенин А Н, Сергиенко А В *Письма ЖЭТФ* **33** 493 (1981)
- Белинский А В, Клышко Д Н *ЖЭТФ* **105** 487 (1994) [*JETP* **78** 259 (1994)]
- Клышко Д Н *Фотон и нелинейная оптика* (М.: Наука, 1980) [Klyshko D N *Photons and Nonlinear Optics* (Gordon and Breach, 1988)]
- Machida S, Yamamoto Y, Itaya Y *Phys. Rev. Lett.* **58** 1000 (1987)
- Richardson W H, Shelby R M *Phys. Rev. Lett.* **64** 400 (1990)
- Wang H, Freeman M J, Steel D G *Phys. Rev. Lett.* **71** 3951 (1993)
- Fox A M et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 1728 (1995)
- Pereira S F et al. *Phys. Rev. A* **38** 4931 (1988)
- Paschotta R et al. *Phys. Rev. Lett.* **72** 3807 (1994)
- Ralph T C et al. *Opt. Lett.* **20** 1316 (1995)
- Клышко Д Н *УФН* **164** 1187 (1994) [*Physics-Uspekhi* **37** 1097 (1994)]
- Clauser J F, Shimony A *Rep. Prog. Phys.* **41** 1881 (1978)
- Loudon R *Rep. Prog. Phys.* **43** 913 (1980)
- Loudon R, Knight P L *J. Mod. Optics* **34** 709 (1987)
- Смирнов Д Ф, Трошин А С *УФН* **153** 233 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30** 851 (1987)]
- Teich M C, Saleh B E A *Quant. Opt.* **1** 153 (1989); *УФН* **161** 101 (1991)
- Fabre C *Phys. Rep.* **219** 215 (1992); Kimble H J *ibid.* 227
- Paul H *Rev. Mod. Phys.* **54** 1061 (1982)
- Клышко Д Н, Пенин А Н *УФН* **152** 653 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30** 716 (1987)]; Penin A N, Sergienko A V *Appl. Opt.* **30** 3582 (1991)
- Белинский А В, Клышко Д Н *УФН* **163** 1 (1993) [*Physics-Uspekhi* **36** 653 (1993)]
- Клышко Д Н, Масалов А В *УФН* **165** 1249 (1995)
- J. Mod. Optics* **34** 709 (1987) (special issue)
- J. Opt. Soc. Am. B* **4** 1715 (1987) (special issue)
- Laser Physics* **4** 4 (1994) (special issue)
- Перина Я *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений* (М.: Мир, 1987) [Perina J. *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena* (Reidel, 1984)]
- Mandel L *Proc. Phys. Soc. (London)* **72** 1037 (1958)
- Глаубер Р *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (М.: Мир, 1966)
- Glauber R *Phys. Rev.* **131** 2766 (1963)
- Sudarshan E C G *Phys. Rev. Lett.* **10** 277 (1963)
- Hillery M *Phys. Lett A* **111** 409 (1985); *Phys. Rev. A* **39** 2994 (1989)
- Елютин П В *Вест. Моск. Унив. Сер. Физ., Астрон.* **32** 87 (1991)
- Teich M C, Saleh B E A, Stoler D *Opt. Commun.* **46** 244 (1983)
- Клышко Д Н *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986)
- Ахманов С А, Дьяков Ю Е, Чиркин А С *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981)
- Lee C T *Phys. Rev. A* **44** 2775 (1991)
- Lee C T *Phys. Rev. A* **45** 6586 (1992)
- Ахмезер Н И *Классическая проблема моментов* (М.: Физматгиз, 1961)
- Беллман Р *Введение в теорию матриц* (М.: Наука, 1969) [Bellman R *Introduction to Matrix Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1960)]
- Джоунс У, Трон В *Непрерывные дроби* (М.: Мир, 1985) [Jones W B, Thron W J *Continued Fractions* (Addison-Wesley, 1980)]
- Феллер В *Введение в теорию вероятностей* (М.: Мир, 1984) [Feller W *Introduction to Probability Theory* (New York: Wiley & Sons, 1971)]
- Smithy D T, Beck M, Raymer M G *Phys. Rev. Lett.* **70** 1244 (1993)
- Graham R *Phys. Rev. Lett.* **52** 117 (1984)
- Reid M D, Walls D F *Phys. Rev. A* **34** 1260 (1986)
- Lee C T *Phys. Rev. A* **41** 1721 (1990)
- Agarval G S, Tara K *Phys. Rev. A* **46** 485 (1992)
- Корн Г, Корн Т *Справочник по математике* (М.: Наука, 1970) [Korn G, Korn T *Mathematical Handbook* (New York: McGraw-Hill, 1961)]
- Люисселл У *Излучение и шумы в квантовой электронике* (М.: Наука, 1972) [Louisell W *Radiation and Noise in Quantum Electronics* (New York: McGraw-Hill, 1964)]
- Agarval G S, Adam P *Phys. Rev. A* **38** 750 (1988)
- Chaturvedi S, Srinivasan V *Phys. Rev. A* **40** 6095 (1989)
- Scully M O, Lamb W E, Jr, *Phys. Rev.* **159** 208 (1967)
- Клышко Д Н *ЖЭТФ* **90** 1172 (1986) [*Sov. Phys. JETP* **63** 682 (1986)]
- Mollow B R, Glauber R *Phys. Rev.* **160** 1076 (1967)
- Bell J S *Physics* **1** 195 (1964)
- Clauser J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **23** 880 (1969)
- Евдокимов Н В и др. *УФН* **166** 91 (1996) [*Physics-Uspekhi* **39** 83 (1996)]
- Kim M S, Oliveira F A M, Knight P L *Phys. Rev. A* **40** 2494 (1989)
- Ахманов С А, Белинский А В, Чиркин А С *Квант. электрон.* **15** 873 (1988)
- Klyshko D N *Phys. Lett. A* **146** 93 (1990)
- Зельдович Б Я, Клышко Д Н *Письма ЖЭТФ* **9** 69 (1969) [*JETP Lett.* **9** 40 (1969)]
- Zubairy M S *Phys. Lett. A* **87** 162 (1982)
- Klyshko D N *Phys. Lett. A* **132** 299 (1988)
- Janszky J, Adam P, Yushin Y *Opt. Commun.* **93** 191 (1992); Adam P *J. Mod. Opt.* **42** 1311 (1995)
- Marian P *Phys. Rev. A* **44** 3325 (1991)
- Janszky J, Yushin Y *Phys. Rev. A* **36** 1288 (1987)
- Hong C K, Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **54** 323 (1985)
- Klyshko D N *Phys. Lett. A* **137** 334 (1989)
- Bandilla A *Opt. Commun.* **23** 299 (1977)
- Scully M O, Lamb W E Jr *Phys. Rev.* **179** 368 (1969)
- Клышко Д Н *Квант. электрон.* **4** 1056 (1977)
- Belinsky A V, Klyshko D N *Phys. Lett. A* **166** 303 (1992)
- Fearn H, Loudon R *Opt. Commun.* **64** 485 (1987)

86. Ou Z Y, Hong C K, Mandel L *Opt. Commun.* **63** 118 (1987)  
87. Huttner B, Ben-Aryeh Y *Phys. Rev. A* **38** 204 (1988)  
88. Башканский Е Г, Митюгов В В *Теор. Мат. Физика* **7** 348 (1971)  
89. Plank R W, Suttorp L G *Opt. Commun.* **112** 145 (1994)  
90. Tatarskii V I *Phys. Lett. A* **144** 491 (1990)  
91. Lutkenhaus N, Barnett S M *Phys. Rev. A* **51** 3340 (1995)  
92. Lee C T *Phys. Rev. A* **41** 1569; *A* **42** 1608 (1990)  
93. Ekert A, Knight P L *Am. J. Phys.* **63** 415 (1995)

### Non-classical light

#### D.N. Klyshko

*M.V. Lomonosov Moscow State University, Physics Department,  
Vorob'evy gory, 119899 Moscow  
Tel. (7-095) 939-11 04  
E-mail: dnk@klyshko.phys.msu.su*

Properties of the non-classical light (NCL) are considered with the emphasis on experimentally observed signatures, which are underlied by the well-known Mandel's formula relating the statistics of photon counts to that of the light incident on the detector. A systematic operational approach is presented to study the NCL using two parallel sets of numbers measured: probabilities of photon counts  $\{p_m\}$  and normalised factorial moments of counts  $\{g_k\}$ . Two particular examples are examined in detail: a 'heated' squeezed vacuum and a 'heated' one-photon state. An alternative method is proposed to discover weak non-classicality using 'generalised' moments  $\{a_k(s)\}$ . The influence the linear absorption (amplification) and the beam-splitting exert on the NCL, and the relation between the NCL and the absolute calibration of photodetectors are considered. The conditions are found under which the beam-splitter realises a mathematical operation of superposition of two one-mode fields, which is useful in studying the NCL.

PACS numbers: 03.65.Bz, 12.20.Ds, 07.60.Dq, 42.50.Dv

Bibliography — 93 references

*Received 22 December 1995*