

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Неравенства Белла и корреляции ЭПР–Бома: действующая классическая радиочастотная модель

Н.В. Евдокимов, Д.Н. Клышко, В.П. Комолов, В.А. Ярочкин

Описывается электронная модель, позволяющая имитировать парную корреляцию случайных дихотомных сигналов типа Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) в варианте Бома и демонстрировать выполнение неравенства Белла в классической физике. В схеме используются некоторые особенности параметрических генераторов радиоклебаний. Анализ работы схемы помогает понять отличие квантовых и классических корреляций в ЭПР-экспериментах. Предлагается конкретный механизм "нелокального" управления корреляцией ЭПР-типа между удаленными наблюдателями, присущий как классическим, так и квантовым моделям. При этом управляемая корреляция между двумя случайными телеграфными сигналами обеспечивается посылкой двум наблюдателям последовательности импульсов с одной и той же случайной фазой. Дается элементарный вывод неравенства Белла и обсуждается логика применения популярного термина квантовая нелокальность, обычно используемого при описании квантовых вариантов рассматриваемого эксперимента.

PACS numbers: 03.65.Bz, 42.50 Dv

Содержание

1. Введение (91).
 2. Демонстрация корреляций ЭПР–Бома (92).
 3. Проверка неравенства Белла (93).
 4. Корреляция ЭПР–Бома в случае трех наблюдателей (96).
 5. Управление корреляцией на расстоянии (97).
 6. Параметрические генераторы и управляемые корреляции (98).
 7. Заключение (99).
 8. Приложения (100).
 - I. Доказательство неравенства Белла. II. Статистика телеграфных сигналов и отрицательные "вероятности". III. Описание схемы ЭПР-имитатора.
- Список литературы (106).

1. Введение

Фундаментальное различие квантовых и классических физических представлений наиболее контрастно проявляется при рассмотрении экспериментов, демонстрирующих парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) [1] в варианте Бома [2] и нарушение неравенства Белла [3–5] (см. обзоры [6–10]). Многочисленные оптические эксперименты такого типа, проведенные за послед-

ние 25 лет [6–10], с большой степенью достоверности подтвердили адекватность квантовых моделей.

Несмотря на общезначимую значимость этого круга вопросов и неоднократные попытки его популяризации [11–14], сущность проблемы остается малоизвестной. Отчасти это связано с ненаглядностью рассматриваемых экспериментальных схем и сложной логической структурой соответствующих доводов.

Целесообразно выделить два отдельных вопроса или "парадокса":

1) существование "нелокально" управляемых корреляций типа ЭПР–Бома между показаниями удаленных приборов;

2) парадокс Белла — нарушение некоторых неравенств, составленных из этих показаний.

Эйнштейн, Подольский и Розен в 1935 г. обратили внимание на существование полных (100 %-ных) управляемых квантовых корреляций между наблюдаемыми свойствами двух удаленных частиц. На основании этого они пришли к выводу, что, измеряя свойства одной частицы, можно косвенно, без всякого возмущения, производить точные измерения некоммутирующих наблюдаемых у другой частицы, что противоречит квантовой теории. Если же принять возможность измерения некоммутирующих наблюдаемых, то они должны иметь определенные значения и до измерения, *априори*. Следовательно, можно дополнить квантовую теорию, т.е. описать свойства обеих частиц и их корреляции с помощью некоторых "скрытых" параметров, например, в терминах классической статистической физики и свести тем самым квантовую физику к классической.

Примерно 30 лет спустя Белл из весьма общих соображений показал, что эта программа ЭПР

Н.В. Евдокимов, Д.Н. Клышко, В.П. Комолов, В.А. Ярочкин.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы
Тел. (095) 939-11-04
E-mail: dnk@klyshko.phys.mu.su

Статья поступила 8 июня 1995 г.

возможна лишь, если дополнить классическую физику какими-то новыми далекодействующими взаимодействиями, т.е. ввести *нелокальность*. Экспериментальное подтверждение нарушения неравенства Белла (в точном соответствии с предсказаниями квантовой теории) показало — согласно современной распространенной терминологии — неприменимость *локального реализма*. Остаются две основные альтернативы — признать "нелокальный реализм" или примириться с квантовой теорией в ее копенгагенской (или иной) трактовке. Иногда говорят также (довольно непоследовательно) о *нелокальности квантовой теории*.

Следует подчеркнуть, что при доказательстве неравенства Белла используется не просто факт существования управляемых корреляций или их значение (фактически в доказательстве фигурируют неполные корреляции), а некоторое более тонкое их свойство. Поэтому естественно возникает вопрос: являются ли сами по себе управляемые корреляции типа ЭПР–Бома между показаниями двух приборов существенно квантовым явлением? Отрицательный ответ на него известен давно [3, 7, 11, 15, 16], но, по-видимому, не очень широко. Часто считают, что уже наличие этих корреляций является достаточным доказательством "нелокальности" и что парадокс ЭПР заключается именно в их существовании.

Недавно был рассмотрен ряд квантовых моделей с числом "наблюдателей" (т.е. числом коррелированных частиц со спином $1/2$ или фотонов), большим двух, которые дают более резкое отличие квантовых предсказаний от классических [17, 18]. Так, в [17] (см. также [9, 14, 16, 19]) предложена модель с тремя наблюдателями, в которой результаты квантового и классического расчетов для некоторой комбинации наблюдаемых отличаются *знаком*. Примечательно, что эта особенность (как и нарушение соответствующего модифицированного неравенства Белла [19, 20]) проявляется при *полной* корреляции трех наблюдаемых величин, в отличие от неравенств Белла в случае двух наблюдателей. В некоторых моделях с N наблюдателями ($N \geq 2$) отношение квантового и классического пределов для некоторой наблюдаемой величины S_N растет как $2^{(N-1)/2}$ [18] (см. также [16]). При этом опять существуют соответствующие классические модели с полной управляемой корреляцией между N сигналами [9, 16].

В настоящей работе описывается действующая классическая радиотехническая модель, имеющая много общего с квантовыми ЭПР-моделями. Она демонстрирует первый из перечисленных выше парадоксов, т.е. имитирует управляемую корреляцию или антикорреляцию типа ЭПР–Бома, включая полную, 100 %-ную. В кратком виде принцип действия модели описан в [9, 16]. Ее анализ выявляет простой классический механизм как возникновения таких корреляций, так и воздействия на них удаленных наблюдателей и тем самым снимает окружающий их ореол таинственности. Таким образом, первый парадокс лишается статуса *истинного* квантового парадокса, поскольку имеет классический аналог. (Отметим, что известны и другие классические модели, демонстрирующие полную корреляцию типа ЭПР–Бома [3, 7, 11, 15], однако они имеют умозрительный характер.)

Второй парадокс — нарушение неравенства Белла — является истинным парадоксом, он демонстрирует принципиальное отличие квантовых и классических представлений.

В проведенных до сих пор экспериментах он выявляется лишь в условиях неполной корреляции и лишь в результате статистической обработки достаточно большого массива экспериментальных данных. В нашей модели неравенство Белла, конечно, подтверждается.

В разделе 2 описывается общая схема экспериментов как классических, так и квантовых, демонстрирующих управляемые корреляции. В разделе 3 описывается процедура измерений, выявляющих парадокс Белла, и приводятся результаты численного эксперимента, демонстрирующего его статистический характер. В разделе 4 кратко рассматриваются корреляции ЭПР–Бома в случае трех коррелированных сигналов. В разделе 5 на частном примере поясняется общий принцип осуществления "нелокально" управляемых корреляций, в разделе 6 описывается его конкретная реализация в нашей модели. Обсуждение затронутых вопросов проводится в заключительном разделе 7.

Математические выкладки, в основном, помещены в Приложениях I и II. В первом дается элементарный вывод неравенства Белла и поясняется формальный логический смысл популярного термина *нелокальность*, во втором обсуждаются статистика двузначных (телеграфных) сигналов, фигурирующих в экспериментах типа ЭПР–Бома, и даются простые примеры возникновения отрицательных (см. [8, 21–23]) и неоднозначных "вероятностей" при попытке описания квантовых корреляций в терминах классических вероятностей. В Приложении III приводятся некоторые технические подробности использованной радиосхемы.

Описываемая здесь наглядная модель и связанные с ней обсуждения должны значительно облегчить восприятие сущности корреляций ЭПР–Бома и основанного на них неравенства Белла для непосвященных читателей. По-видимому, целесообразно использование подобных моделей в практикумах физических факультетов вузов.

2. Демонстрация ЭПР-корреляций

Наша модель реализует экспериментальную ситуацию, изображенную на рис. 1 и часто используемую при наглядном описании экспериментов типа ЭПР–Бома [14]. Передатчик S время от времени посылает сообщения одновременно двум удаленным адресатам A и B . Сообщения содержат команды зажечь лампы зеленого или красного цвета. Символически четыре возможных исхода одной передачи можно представить так: $(++)$, $(-+)$, $(+-)$ или $(--)$; здесь знак плюс соответствует зеленой лампе, минус — красной.

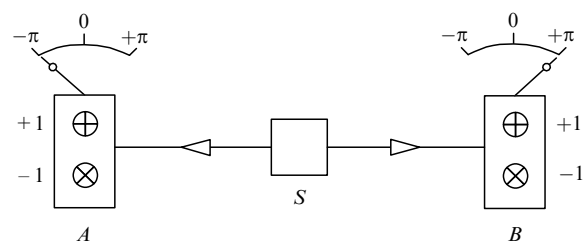


Рис. 1. Общая схема экспериментов для демонстрации корреляций типа ЭПР–Бома и выявления нарушения или выполнения неравенства Белла

В распоряжении каждого наблюдателя A и B имеется по одной регулировочной ручке с тремя выделенными положениями, маркированными знаками $-\pi$, 0 и $+\pi$.

Передачи многократно повторяются, причем исход каждой из них случаен — на каждом приемнике с равными вероятностями $1/2$, не зависящими от положения ручек α и β , зажигается или зеленая, или красная лампа. Фактически в нашем демонстрационном эксперименте лампы вспыхивают примерно каждую секунду и горят в течение половины секунды.

Наблюдатель C , видящий одновременно обе пары ламп в A и B , замечает, что между цветами вспыхивающих одновременно ламп имеется определенная корреляция, причем ее значение и знак зависят от положения ручек. Наиболее характерны три ситуации.

1. Если обе ручки стоят, например, в одинаковых средних положениях "0", то цвета ламп каждый раз одинаковы, т.е. наблюдаются только исходы $(++)$ или $(--)$. Таким образом, цвета полностью коррелированы. Полная корреляция наблюдается также и в более общем случае при условии, что сумма координат ручек $\gamma = \alpha + \beta$ равна 0. (Практически из-за технических ограничений достигалась не идеальная корреляция, а лишь порядка 90 %.)

2. Но стоит только одному из наблюдателей перевести свою ручку в одно из крайних положений так, что $\gamma = \pm\pi$, как наблюдаются только исходы $(+-)$ или $(-+)$, т.е. цвета становятся антикоррелированными.

3. Наконец, если ручки стоят, например, в положении "0" или " $\pi/2$ " (или, вообще, расположены так, что $\gamma = \pm\pi/2$), то корреляция цветов ламп в A и B полностью отсутствует.

Возникает естественный вопрос: как, например, положение ручки в A может влиять на цвет лампы, которая загорится при очередной передаче в B ? Если ручки в A и B стоят в среднем положении "0", то наблюдатель в A , увидев зеленую вспышку, уверен, что в B в этот же момент вспыхнула зеленая лампа. Переведя потом ручку в крайнее положение и опять увидев зеленую вспышку, он уверен, что в B в этот же момент вспыхнула уже красная лампа. Как лампы в B "узнают" о положении ручки в A ? Налицо, казалось бы, управление на расстоянии.

Описанные три серии наблюдений с нашей моделью в точности воспроизводят квантовую корреляцию, антикорреляцию или ее отсутствие, наблюдаемые в "настоящих" экспериментах типа ЭПР-Бомы. В квантовом случае переносчиками информации служат пары фотонов или частиц со спином $1/2$ с коррелированными свойствами. Вспышкам ламп соответствует одновременная регистрация пары частиц в двух детекторах из четырех. Положениям ручек α и β на рис. 1 соответствуют в оптических экспериментах длины оптических путей или ориентации поляризационных призм в интерферометрах интенсивности [9], а в экспериментах с ферми-частицами — ориентации магнитов Штерна-Герлаха.

Правда, в квантовых экспериментах моменты передачи очередного "сообщения" (т.е. моменты регистрации пар частиц) случайны, а в нашей модели они регулярны. Однако нетрудно сделать их также случайными с помощью генератора случайных чисел. Квантовая стохастичность интервалов между сообщениями не имеет значения в обсуждаемых вопросах.

Нередко ответ на заданный выше вопрос в контексте квантовых экспериментов звучит так: это проявление *квантовой нелокальности*. При этом, по-видимому, имеется в виду некоторое таинственное сверхсветовое влияние аппаратуры в A на события в B (или наоборот). Иногда также говорится, что квантовая механика предсказывает более сильные корреляции, чем допускается *локальными* классическими теориями или *локальным реализмом*. Под *локальностью* понимается соответственно отсутствие дальнего действия за счет неизвестных взаимодействий между аппаратурой в A и B . (Однако наиболее часто термин *нелокальность* употребляется в связи с нарушением неравенства Белла в квантовых моделях и экспериментах (см. ниже); формальная логика появления термина в этом случае поясняется в Приложении I). Еще один популярный термин — *несепарабельность* квантовых объектов. В данном контексте под этим понимается необходимость совместного описания пар коррелированных частиц, даже если они разлетелись на большое расстояние, невозможность их раздельного, индивидуального описания (в этом смысле пары электрических сигналов в нашем эксперименте также можно считать несепарабельными).

Более конкретный и точный ответ заключается в том, что положения ручек влияют лишь на "свои" лампы и что этого вполне достаточно для изменения степени и знака корреляции удаленных сигналов. Это утверждение, по-видимому, не совсем тривиально, и рассматриваемая модель должна помочь преодолеть устоявшееся предубеждение. В нашей модели, как и в "настоящих" квантовых ЭПР-моделях, используется некоторый общий принцип управления "на расстоянии" парными корреляциями. Это управление осуществляется путем отбора определенных подмножеств из имеющегося в A и B общего информационного множества. Он поясняется далее на простом конкретном примере (см. рис. 5 и 6). Отличие классических и квантовых моделей заключается лишь в способе описания этого общего априорного множества. В первом случае это можно сделать с помощью совместных вероятностей для всех возможных "сообщений", а во втором лишь с помощью волновой функции переносчика информации — пары ферми-частиц или двухфотонного четырехмодового электромагнитного поля (подробнее см. [9]).

Итак, воздействие удаленных наблюдателей на их взаимные корреляции не означает, как и следовало ожидать, какого-либо таинственного дальнего действия, оно вполне локально. Обратим внимание, что наблюдение корреляции требует передачи информации (протоколов испытаний с фиксацией порядковых номеров передачи) от A и B к третьему наблюдателю C с помощью обычных каналов; сами же A и B никакого видимого влияния положения ручек — своих или чужих — на характер вспышек не замечают. Это обстоятельство исключает часто обсуждаемую возможность сверхсветового обмена информацией между A и B с помощью ЭПР-корреляции.

3. Проверка неравенства Белла

Принципиальное отличие классических и квантовых экспериментов с двумя наблюдателями типа ЭПР-Бомы проявляется лишь при некоторых промежуточных положениях ручек, отличных от рассмотренных выше и

вызывающих неполную корреляцию. При этом для выявления этого отличия надо проводить, по меньшей мере, четыре серии наблюдений (при четырех положениях ручек (α , β)) и рассчитывать из них четыре коэффициента корреляции. Таким образом, это отличие имеет лишь статистический характер.

Введем следующую параметризацию результатов эксперимента, схема которого изображена на рис. 1. При загорании зеленой или красной лампы у левого приемника будем приписывать дискретной случайной величине A значения $a = +1$ или -1 соответственно (большими буквами обозначаем случайную величину, а малыми — принимаемые ею значения). Аналогично дихотомная (двузначная) случайная величина B со значениями $b = \pm 1$ отображает цвет загорающихся ламп у правого приемника. Пусть переменные α, β с интервалом значений $(-\pi, \pi)$ обозначают положения регулировочных ручек, влияющих каким-то образом на совместную статистику A и B , а переменная $\gamma = \alpha + \beta$ — их сумму. Итак, имеются два "телеграфных" случайных процесса $a_i(\alpha)$ и $b_i(\beta)$, корреляция между которыми зависит от двух регулируемых параметров α и β (i — номер испытания).

Степень корреляции удобно характеризовать средним значением произведения наблюдаемых случайных чисел: $M(\gamma) = \langle A(\alpha)B(\beta) \rangle$. Таким образом, $M = +1$ соответствует полной корреляции, $M = -1$ — антикорреляции и $M = 0$ — отсутствию корреляции. В этой связи будем называть параметр M просто *корреляцией*.

На рис. 2 изображены три зависимости $M(\gamma)$: a — согласно описанной в Приложении II классической теории для нашей модели, дающей

$$M_c(\gamma) = 1 - \frac{2|\gamma|}{\pi} \quad (-\pi \leq \gamma \leq +\pi), \quad (1a)$$

b — согласно квантовой теории для "настоящих" экспериментов ЭПР-типа, дающей (см. [9])

$$M_q(\gamma) = \cos \gamma, \quad (1б)$$

и c — согласно результатам экспериментов с нашей радиотехнической моделью. Ромбами отмечены точки пересечения квантовой и классической зависимостей, обсуждавшиеся выше, а кружками и квадратами — точки, используемые обычно при формулировке и проверке неравенства Белла (см. ниже). Отметим, что известная классическая ЭПР-модель, состоящая из двух частиц с коррелированными угловыми моментами [7, 11], также приводит к зависимости (1a).

Итак, наблюдаемое различие рассматриваемых конкретных моделей сводится к различию вида зависимости корреляции $M(\gamma) = \langle AB \rangle$ от суммы координат ручек $\gamma = \alpha + \beta$ — косинусоидальной кривой или ломаной прямой. Превышение по абсолютному значению квантовой корреляции над классической (для наших частных моделей) достигает 41 % при $\gamma = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$ (см. рис. 2). Таким образом, если исключить общие точки $0, \pm\pi/2, \pm\pi$, то в рассматриваемых моделях квантовые корреляции действительно несколько сильнее классических, однако сам по себе этот факт не очень удивляет. Ниже мы увидим, что косинусоидальная зависимость $M(\gamma)$ несовместна с произвольными классическими вероятностными моделями.

Нетрудно показать (см. (II.2)), что среднее значение $M = \langle AB \rangle$ определяет также и совместное распределение

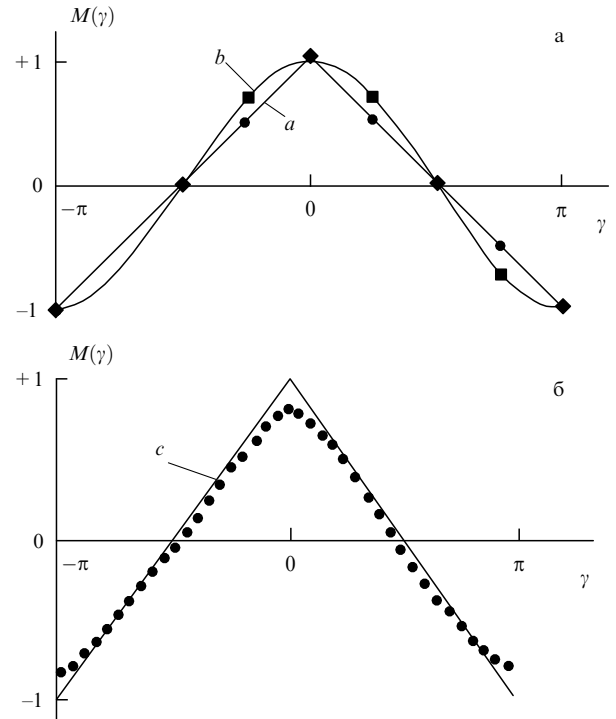


Рис. 2. Зависимость корреляции $M = \langle AB \rangle$ цвета ламп (см. рис. 1) от суммы координат регулировочных ручек $\gamma = \alpha + \beta$ согласно классической теории (a), квантовой теории (б) и описываемого эксперимента (c)

вероятностей $P(a, b)$ для случайных величин A и B по формуле $P(a, b) = (1 + abM)/4$ (здесь $a, b = \pm 1$). В соответствии с (1) это распределение имеет следующие формы в классической и квантовой моделях:

$$P(++) = P(--) = \frac{1}{2} - \frac{|\gamma|}{2\pi},$$

$$P(+-) = P(-+) = \frac{|\gamma|}{2\pi}, \quad (2a)$$

$$P(++) = P(--) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2},$$

$$P(+-) = P(-+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \quad (2б)$$

Здесь, например, $P(+-)$ — относительная частота события $(+-)$ при достаточно большом числе испытаний. Обычное определение среднего значения дает обратное преобразование

$$M = \sum_{a,b} abP(a, b) = P(++) + P(--) - P(-+) - P(+-) = 4P(++) - 1.$$

Естественно допустить, что можно сконструировать какую-то более изощренную классическую модель, которая воспроизводила бы квантовые зависимости для $M(\gamma)$ и $P(a, b, \gamma)$ для всех значений γ . Однако неравенство Белла (см. Приложение I) исключает такую возможность, причем независимо от конструкции устройства. Эта универсальность подхода Белла, исключающая возможность осуществления целого класса экспериментов, является его примечательным свойством, отличающим его от других, более частных критериев классичности [9].

Протокол некоторой серии испытаний с фиксированными α, β запишется в виде таблицы следующего вида:

Таблица 1

i	$a_i, \alpha = \pi/2$	$b_i, \beta = \pi/4$	$m_i = a_i b_i, \gamma = 3\pi/4$
1	+1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	-1	+1	-1
4	+1	-1	-1
5	+1	+1	+1

В последней колонке выписаны произведения $m_i = a_i b_i$, характеризующие после усреднения корреляцию между цветами ламп. Статистическая обработка таких записей, полученных при различных парах α и β , представлена на рис. 2 (кривая c). Оказалось, что среднее значение $M = \langle m_i \rangle$ в соответствии с теоретической зависимостью (1а) зависит лишь от суммы координат регулировочных ручек γ .

Проведем теперь последовательно четыре серии испытаний (из N испытаний в каждой серии) со следующими четырьмя наборами параметров:

$$(\alpha, \beta) = \left(0, -\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

При этом соответственно $\gamma_1 = \alpha + \beta = -\pi/4$, $\gamma_2 = \alpha' + \beta = \pi/4$, $\gamma_3 = \alpha + \beta' = \pi/4$, $\gamma_4 = \alpha' + \beta' = 3\pi/4$, (см. рис. 2). Обозначим $a \equiv a(0)$, $a' \equiv a(\pi/2)$, $b \equiv b(-\pi/4)$, $b' \equiv b(\pi/4)$ и образуем N чисел

$$s_k \equiv \frac{1}{2} (a_k b_k + a'_{N+k} b_{N+k} + a_{2N+k} b'_{2N+k} - a'_{3N+k} b'_{3N+k}). \quad (3)$$

Эти числа принимают с определенными вероятностями (см. Приложение II) значения $0, \pm 1, \pm 2$, т.е. они реализуют некоторую случайную величину S . Подчеркнем, что для вычисления ее отдельной реализации s_k используются результаты четырех различных испытаний при указанных четырех наборах (α, β) .

После усреднения полученных чисел s_k при достаточно большом N мы обнаружим, что $\langle S \rangle_{\text{exp}} \approx 1$. Этот же результат следует из (1а) (см. также кривую a на рис. 2):

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2} (\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} \left[M\left(-\frac{\pi}{4}\right) + M\left(\frac{\pi}{4}\right) + M\left(\frac{\pi}{4}\right) - M\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

В Приложении I показано, что полученное значение $\langle S \rangle$ является максимальным для любых классических моделей, так как в них должно выполняться следующее неравенство Белла [3–5]:

$$|\langle S \rangle_c| \leq 1. \quad (4а)$$

В то же время в соответствующих квантовых моделях имеет место более слабое ограничение

$$|\langle S \rangle_q| \leq \sqrt{2}. \quad (4б)$$

Это предельное значение как раз и обеспечивается функцией (1б):

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_q &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Полученное различие на 41 % квантового и классического значений для величины $\langle S \rangle$ максимально для рассматриваемых моделей, при другом наборе параметров α и β оно будет меньше. Пусть, например, в первой серии установлены некоторые фазы α, β , во второй — α', β , в третьей — α, β' и в четвертой — α', β' , причем $\alpha' = \alpha + \pi/2$, $\beta' = \beta + \pi/2$. При этом согласно (1б) параметр $\langle S \rangle$ зависит лишь от суммарной фазы $\gamma_1 = \alpha + \beta$, устанавливаемой в первой серии: $\langle S \rangle_q = \sqrt{2} \cos(\gamma_1 + \pi/4)$. Следовательно, (4а) нарушается во всем открытом интервале $-\pi/2 < \gamma_1 < 0$ (рис. 3). Пусть теперь $\gamma_1 = -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда в четырех сериях последовательно используются суммарные фазы $-\varepsilon, \pi/2 - \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon$ и $\pi - \varepsilon$, дающие почти полную (анти)корреляцию и почти полное отсутствие корреляции (см. рис. 1). При этом $\langle S \rangle_c = 1$ и $\langle S \rangle_q = 1 + \varepsilon$.

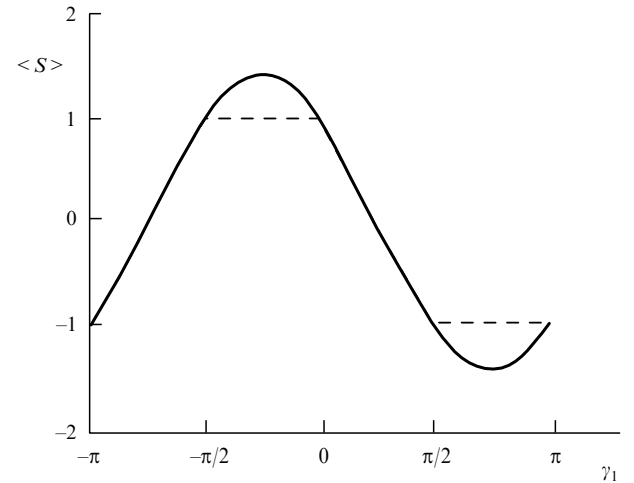


Рис. 3. Зависимость $\langle S \rangle$ от суммарной фазы γ_1 , устанавливаемой в первой серии испытаний, согласно квантовой (сплошная линия) и классической (пунктир) моделям. Предполагаются выполненными условия $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_1 + \pi/2$, $\gamma_4 = \gamma_1 + \pi$

Отдельные реализации s_k , а также их усредненные значения, найденные при конечном N , могут превышать по модулю пределы в (4), т.е. эти неравенства имеют лишь статистический характер. На рис. 4 приведены результаты численного эксперимента, поясняющие это обстоятельство для классического случая. В этой частной реализации средние значения $\langle S \rangle_N$ за первые несколько N испытаний превосходят даже квантовый предел $\sqrt{2}$, а при следующих примерно 20 испытаниях они все еще превосходят классический предел 1. Такой же характер имеет величина S и в квантовой модели, с тем лишь отличием, что значения $s = 2$ встречаются на 68% чаще, а остальные значения $1, 0, -1, -2$ — несколько реже (см. Приложение II).

Подчеркнем, что неравенства (4) ограничивают не саму величину корреляции $M(\gamma)$ наблюдаемых A и B , а

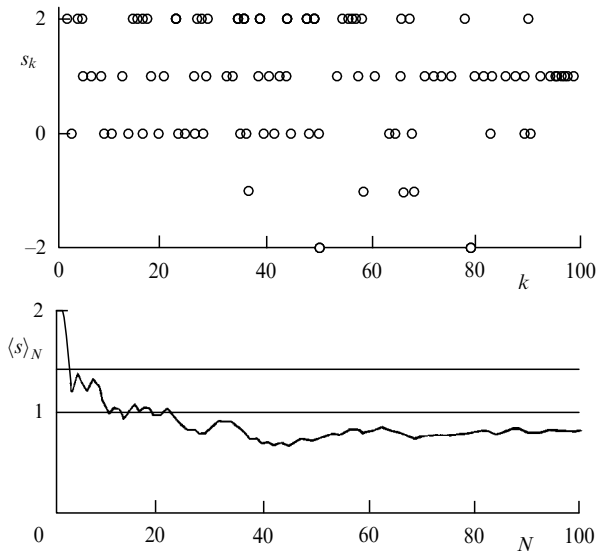


Рис. 4. Статистический характер неравенства Белла. Вверху: последовательность из 100 значений переменной s_k , полученная по формулам (3) и (11) с помощью генератора случайных чисел. Внизу: среднее из N первых значений s_k , приведенных на верхнем графике, в зависимости от N . Горизонтальные прямые отмечают максимальные классический (1) и квантовый ($\sqrt{2}$) уровни

лишь среднее от некоторой билинейной комбинации этих наблюдаемых при различных α и β , т.е. ограничивают некоторый функционал $S(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ от $M(\alpha, \beta)$.

Возможные логические следствия факта нарушения неравенства Белла (4а) в квантовых моделях и экспериментах обсуждаются в заключении. Здесь отметим лишь, что в Приложении I неравенство Белла доказывается исходя только из понятия совместных "четырёхмерных" вероятностей для всех четырех наблюдаемых $P(a, b, a', b')$, определяющих согласно теории вероятностей все остальные статистические характеристики рассматриваемых экспериментов. Нарушение этого неравенства естественно объяснить неприменимостью понятия совместной вероятности $P(a, b, a', b')$ в соответствии с принципом дополнителности.

Иногда предпочитают сохранить все же это понятие, но, как показано в Приложении I, при этом приходится или допускать отрицательные значения вероятности [8, 21–23], или вводить "нелокальность" — взаимодействие удаленных приборов за счет неизвестных сверхсветовых сил.

4. Корреляции ЭПР–Боба в случае трех наблюдателей

Доказательство неприменимости скрытых параметров для описания некоторых предсказаний квантовых моделей часто называют теоремой Белла. Обсуждавшееся выше нарушение неравенства (4а) в модели ЭПР–Боба является частной формой этой теоремы. Интересную новую форму теоремы Белла нашли Гринбергер, Хорн и Цайлингер (ГХЦ) [17] (см. также [9, 14] (1990 г.), [16, 19]). Она также основана на модели ЭПР–Боба, но с добавлением еще одной частицы и соответственно третьего наблюдателя. Передатчик на рис. 1 при этом посылает сообщения не двум, а трем приемникам, каждый из которых может опять работать в двух режимах в зависимости от положения ручек. Таким образом, те-

перь при каждом испытании измеряются три величины, например A, B, C или A', B, C и т.д. (штрих означает, что ручка стоит в измененном положении: $\alpha \rightarrow \alpha'$) и загораются три лампы.

В рамках квантовой теории можно определить состояние трех частиц — переносчиков информации (трех ферми-частиц со спином 1/2 или трех фотонов, принадлежащих каждый двум модам) со следующими наблюдаемыми свойствами:

$$\begin{aligned} \langle A'BC \rangle &= -1, & \langle A'B'C \rangle &= -1, \\ \langle ABC' \rangle &= -1, & \langle A'B'C' \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом все первые и вторые моменты равны нулю: $\langle A \rangle = \langle AA' \rangle = \langle AB \rangle = \langle AC \rangle = \dots = 0$. Формулы (5) описывают полную корреляцию или антикорреляцию между тройками наблюдаемых показаний. Это означает, что, например, наблюдаемая $A'BC$ не флуктуирует, т.е. в каждом испытании с соответствующим положением ручек произведение трех чисел $d'bc$ всегда равно -1 . При повторных испытаниях с тем же положением ручек зажигается только четное число зеленых ламп, т.е. с равными вероятностями наблюдаются следующие четыре тройки: $(d'bc) = (+ + -), (+ - +), (- + +), (- - -)$. Это же относится и к испытаниям, в которых наблюдаются A, B', C и A, B, C' . При наблюдении тройки штрихованных величин число зеленых ламп всегда нечетно: $(d'b'c') = (- - +), (- + -), (+ - -), (+ + +)$.

Попытаемся описать эти эксперименты (пока еще умозрительные) с точки зрения "здорового смысла", т.е. в рамках классической вероятностной модели, рассматривая шесть операторов A, A', \dots в (5) как классические случайные величины со значениями $a = \pm 1, a' = \pm 1, \dots$ и полагая символ $\langle \dots \rangle$ символом классического усреднения по некоторому шестимерному распределению вероятностей $P(a, b, c, a', b', c')$. (Отметим сразу, что эти "вероятности" формально полностью определяются свойствами (5) и некоторые из них оказываются отрицательными (см. Приложение II).)

В классической теории при каждом испытании передатчик посылает полную информацию — набор из шести чисел ± 1 . При этом все шесть величин a, b, c, a', b', c' имеют какие-то определенные значения $+1$ или -1 независимо от того, наблюдаются они или нет. (Назовем это утверждение постулатом об априорном существовании наблюдаемых.) Эти шесть чисел при каждом испытании должны удовлетворять квантовым предсказаниям (5) о полной (анти)корреляции троек наблюдаемых (поскольку положения ручек можно выбрать произвольным образом после посылки сообщения, пока оно находится еще в пути; это так называемый метод задержанного выбора, предложенный Дж. Уилером). Таким образом, посылаемые сигналы каждый раз должны удовлетворять системе уравнений

$$d'bc = -1, \quad ab'c = -1, \quad abc' = -1, \quad d'b'c' = 1. \quad (6a)$$

Здесь знаки усреднения $\langle \dots \rangle$ опущены, поскольку произведения $d'bc, \dots$ не флуктуируют (хотя a', b, c — случайные числа).

Легко убедиться, что уравнения (6а) несовместны. Пусть, например, $(a, b, c, a', b', c') = (+ + + - - -)$. Тогда первые три равенства в (6а) выполняются, а последнее нет. Чтобы перейти к общему случаю, пере-

множим все четыре равенства. При этом в левой части каждый множитель встречается 2 раза:

$$d'bcab'cab'c'd'b'c' = (abcd'b'c')^2 = +1. \quad (7a)$$

В то же время произведение правых частей (6a) дает $(-1)^3(+1) = -1$. Этот парадокс ГХЦ вида $+1 = -1$ и доказывает теорему Белла — неприменимость постулата об априорном существовании наблюдаемых или, если угодно, существование "нелокальности".

В классических моделях можно, в принципе, усовершенствовать аппаратуру, избавиться от переключателей на рис. 1 и в одном испытании измерить все шесть величин a, a', b, b', c, c' и сразу образовать из них четыре произведения $d'bc, ab'c, abc'$ и $d'b'c'$. Эти произведения не могут иметь знаки $(---+)$, предсказываемые в (6a) квантовой теорией, а лишь знаки вида $(--++)$ или $(----)$ и т.д. такие, чтобы выполнялось (7a). Такую модель с полной управляемой корреляцией между тремя сигналами можно реализовать с помощью параметрических генераторов [9, 16].

Каким же образом парадокс ГХЦ разрешается в рамках ортодоксальной квантовой теории? Дело в том, что в рамках квантовой механики четыре предсказания (или измерения) в формуле (5) относятся к четырем разным испытаниям, отличающимся положениями ручек на рис. 1. Чтобы отразить это обстоятельство, перепишем (6a) следующим образом:

$$\begin{aligned} a'_1 b_1 c_1 &= -1, & a_2 b'_2 c_2 &= -1, \\ a_3 b_3 c'_3 &= -1, & a'_4 b'_4 c'_4 &= 1. \end{aligned} \quad (6b)$$

Здесь нижние индексы указывают на номер эксперимента. Теперь (7a) принимает вид

$$a_2 a_3 a'_1 a'_4 b_1 b_3 b'_2 b'_4 c_1 c_2 c'_3 c'_4 = \pm 1. \quad (7b)$$

Это выражение уже не является квадратом и поэтому может равняться -1 . Иначе говоря, все четыре уравнения (6b) совместны в отличие от (6a). Например, в первом эксперименте, когда наблюдается тройка A', B, C , остальные величины A, B', C' согласно квантовой механике не имеют определенных значений (здесь штрихованные и нештрихованные величины могут относиться к пространственным x - и z -компонентам векторов спина частиц соответственно).

Формулы (5) можно переписать в операторной форме в виде [9]:

$$A'BC = -I, \quad AB'C = -I, \quad ABC' = -I, \quad A'B'C' = I, \quad (8)$$

где I — операторная единица. При этом переход к (6a) можно рассматривать с другой точки зрения, а именно, как замену операторов A, A', \dots, I в операторных тождествах (8) их собственными значениями $a, a', \dots, 1$. Несовместимость получаемых таким образом уравнений (6a) показывает недопустимость указанной замены. Аналогичный вывод можно получить и для произвольного состояния трех частиц со спином $1/2$, а также для одной частицы со спином 1 , при этом его называют теоремой Кохена–Спекера [24] (см. также [9, 25]).

Экспериментальная демонстрация парадокса ГХЦ в идеальном случае должна состоять, скажем, из 40

испытаний — по 10 на каждое положение ручек. Если при каждом испытании подтверждается (6a), то становится очевидным, что говорить о ненаблюдаемых в данном испытании параметрах не имеет смысла, они не могут иметь определенных значений. Такой эксперимент являлся бы, по-видимому, наиболее непосредственной демонстрацией главного парадокса квантовой теории — принципа дополненности.

Описанный эксперимент с тремя наблюдателями можно также использовать для доказательства теоремы Белла в обычной форме, т.е. с помощью нарушения некоторого классического неравенства [20]. Для этого аналогично (3) составляется следующая комбинация: $S \equiv (A'BC + AB'C + ABC' - A'B'C')/2$. Согласно (5) в рассматриваемой конкретной квантовой модели $\langle S \rangle_q = -2$, а в произвольной классической всегда $\langle S \rangle_c \leq 1$ (см. Приложение II).

Отметим, что парадокс ГХЦ нельзя формально разрешить с помощью отрицательных вероятностей в отличие от факта нарушения неравенств Белла.

5. Управление корреляцией на расстоянии

Рассмотрим сначала простой метод получения двух дихотомных случайных сигналов с регулируемой степенью взаимной корреляции из одного непрерывного случайного процесса. Пусть $\phi(t)$ — стационарный случайный процесс с $\langle \phi \rangle = 0$, определяющий случайную фазу, которая равномерно распределена на приведенном интервале $0-2\pi$. Образум из него случайный телеграфный сигнал с помощью алгоритма

$$a(\alpha, t) \equiv \text{sign}\{\cos[\phi(t) + \alpha]\}, \quad (9)$$

где α — произвольный параметр. Из этого определения следует, что $\langle a(\alpha) \rangle = 0$ и $a(\alpha \pm \pi) = -a(\alpha)$ т.е. сигналы $a(\alpha)$ и $a(\alpha \pm \pi)$ антикоррелированы. В то же время $a \equiv a(\alpha)$ и

$$a' \equiv a\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \text{sign}\{\sin[\phi(t) + \alpha]\} \quad (9a)$$

— некоррелированные сигналы (так как $\cos x$ и $\sin x$ — ортогональные функции) (рис. 5). Нетрудно из (9) найти корреляцию сигналов $a(\alpha)$ и $a(\alpha + \Delta\alpha)$ в общем случае (см. Приложение II):

$$\begin{aligned} M(\Delta\alpha) &\equiv \langle a(\alpha) a(\alpha + \Delta\alpha) \rangle = \\ &= 1 - 2 \frac{|\Delta\alpha|}{\pi} \quad (-\pi \leq \Delta\alpha \leq \pi). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, из одного случайного процесса $\phi(t)$ мы можем образовать два (или более) случайных дихотомных сигнала $a(\alpha)$ и $a(\alpha + \Delta\alpha)$ с произвольной степенью корреляции между ними $M(\Delta\alpha)$, лежащей между -1 и $+1$. Следовательно, если передать (например, по радио) один и тот же процесс $\phi(t)$ нескольким удаленным наблюдателям, то каждый из них с помощью "своего" локального параметра α_n сможет влиять "на расстоянии" на парную взаимную корреляцию наблюдаемых (рис. 6). Этот эффект — классический аналог корреляции ЭПР-Бомы. Однако характер зависимости корреляции от параметров здесь другой (см. рис. 2). В "настоящих" ЭПР-экспериментах телеграфный характер сигналов обусловлен дихотомным спектром наблюдаемых опера-

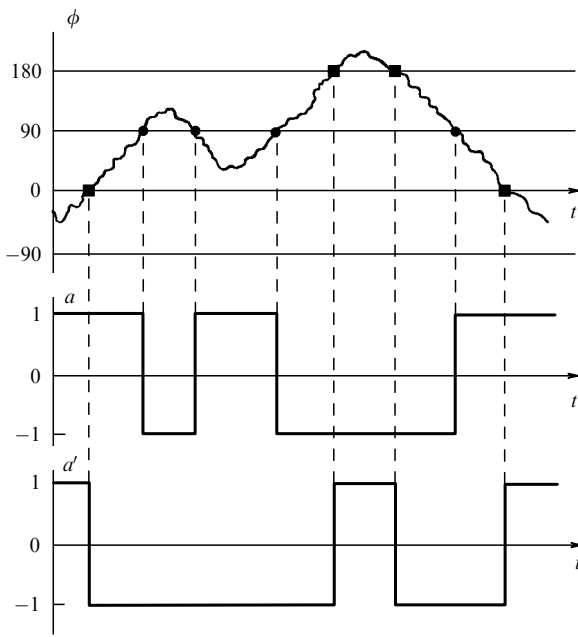


Рис. 5. Формирование двух независимых телеграфных сигналов $a(t)$ и $a'(t)$ из одного случайного процесса $\phi(t)$ по правилу (9)

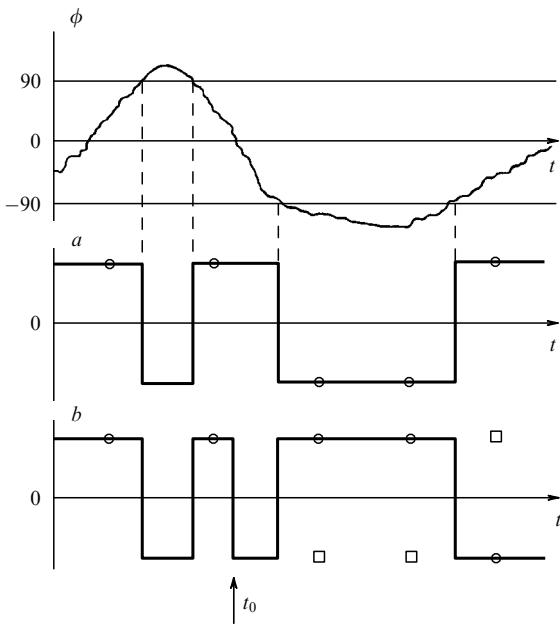


Рис. 6. Механизм "нелокального" влияния на корреляции между показаниями двух удаленных приборов A и B . В момент t_0 наблюдатель в B переключает свою управляющую фазу: $\beta = 0 \rightarrow \beta = \pi$. При этом наблюдаемый им случайный дихотомный процесс $b(t)$ изменяет согласно (11) знак на обратный: $b(t) \rightarrow -b(t)$. В результате при очередном наблюдении вместо корреляции имеет место антикорреляция. Кружками отмечены значения, определяющие цвет загорающих при опросе ламп при учете переключения фазы, а квадратами — без учета

торов: число проекций спина $1/2$ на выделенное направление и число типов поляризации фотона равны двум. Здесь же дихотомность обеспечивается двужанностью функции $\text{sign}(x)$.

Для реализации описанной процедуры промодулируем случайным сигналом $\phi(t)$ фазу "несущего" монохроматического колебания $X(t)$ с частотой ω_a : $X(t) = \cos[\omega_a t + \phi(t)]$ (полагаем время корреляции τ_ϕ процесса $\phi(t)$ много большим периода колебания $2\pi/\omega_a$). Далее введем в колебание $X(t)$ регулируемый сдвиг фазы α и смешаем его с "гомодинным" колебанием $\cos(\omega_a t)$, имеющим стабильную фазу. Полученную суперпозицию

$$Z(t) = \cos[\omega_a t + \phi(t) + \alpha] + \cos(\omega_a t)$$

продетектируем. На выходе квадратичного детектора (после фильтрации высокочастотной компоненты с частотой $2\omega_a$) получим низкочастотный сигнал $(Z(t))^2 \approx 2 + 2\cos[\phi(t) + \alpha]$. Отсюда с помощью нелинейного усиления с ограничением нетрудно сформировать нужный сигнал $a(\alpha, t)$ вида (9).

Далее промодулируем одним и тем же случайным процессом $\phi(t)$ два колебания (возможно, с разными средними частотами, $\omega_a \neq \omega_b$) и пошлем их по проводам или по радио двум адресатам A, B , где из них с помощью гомодинных фазовых детекторов описанным выше способом образуются два телеграфных сигнала $a(\alpha, t)$ и $b(\beta, t)$ (здесь α, β — фазы, добавляемые в приемных пунктах A и B). При этом $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$ независимо от α и β , но наблюдатель C , располагающий реализациями обоих процессов, обнаружит описанную выше корреляцию (ср. (10)), зависящую от разности фаз:

$$M(\alpha - \beta) = \langle ab \rangle = 1 - 2 \frac{|\alpha - \beta|}{\pi}. \tag{10a}$$

Существенно, что значение этой корреляции зависит от обоих параметров α и β , т.е. каждый наблюдатель A и B может изменить ее величину и знак, причем он сам никаких изменений не обнаружит. При изменении, например, β из исходного общего процесса $\phi(t)$ формируется другой сигнал $b(\beta) \rightarrow b(\beta + \Delta\beta)$, который при $\Delta\beta = \pi$ антикоррелирован с первоначальным сигналом (см. рис. 6).

Этот пример наглядно показывает, что можно влиять на корреляцию двух стохастических процессов в удаленных областях, изменяя лишь один из них. Следовательно, и в контексте квантовых ЭПР-экспериментов нет никакой необходимости для объяснения зависимости корреляций от положения регулировочных ручек на рис. 1 говорить о каком-то таинственном "нелокальном влиянии" измерений в удаленных детекторах друг на друга.

Отметим возможность передачи в A и B случайного процесса $\phi(t)$ непосредственно (по телефону), без использования "несущих" колебаний, с его последующей обработкой в приемных пунктах, а также варианты с управляемой корреляцией $\langle a_1 a_2 \dots a_N \rangle$ между N приемниками [9, 16].

6. Параметрические генераторы и управляемые корреляции

В нашем модельном эксперименте для получения классического радиочастотного аналога ЭПР-корреляции используются двухконтурные параметрические генераторы колебаний мегагерцового диапазона [27].

Такие генераторы в невырожденном (двухчастотном) случае имеют две особенности: фазы $\phi(t)$ и $\phi'(t)$ каждого

из двух колебаний со средними частотами ω_a и ω_b свободно флуктуируют (по техническим причинам), но при этом имеет место их полная антикорреляция: $\phi(t) + \phi'(t) = \phi_0$. Здесь $\phi_0 = \text{const}$ — фаза генератора накачки (со средней частотой $\omega_0 = \omega_a + \omega_b$), которую для простоты полагаем стабильной и равной нулю, так что $\phi'(t) = -\phi(t)$. Иначе говоря, мгновенные частоты $\omega_a(t) = \omega_a + d\phi/dt$ и $\omega_b(t) = \omega_b + d\phi'/dt$ двух колебаний на выходе генератора всегда дрейфуют в противоположные стороны: если сигнальная частота возрастает, то "холостая" уменьшается, и наоборот.

В результате выходные колебания генератора имеют вид $X(t) = \cos[\omega_a t + \phi(t)]$ и $Y(t) = \cos[\omega_b t + \phi'(t)] = \cos[\omega_b t - \phi(t)]$. Таким образом, один и тот же случайный процесс $\phi(t)$ модулирует по фазе оба выходных колебания генератора. Далее они посылаются (для простоты по проводам) к двум приемным схемам A и B . Характерное для параметрических устройств различие знаков ϕ и ϕ' приводит к тому, что корреляция зависит от суммы параметров $\gamma = \alpha + \beta$, а не от их разности, как в (10а).

В реализованной нами схеме вместо стабильных локальных гомодинных колебаний с частотами ω_a и ω_b используются сигналы от второго идентичного параметрического генератора, возбуждаемого тем же сигналом накачки [9]. При этом на приемник A поступают два колебания $X_1(t) = \cos[\omega_a t + \phi_1(t)]$ и $X_2(t) = \cos[\omega_a t + \phi_2(t)]$, где $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ — независимые случайные фазы двух параметрических генераторов. К одному из колебаний добавляется регулируемая фаза α , после чего образуются их сумма и разность: $X_{\pm} \equiv X_1 \pm X_2$. Два квадратичных детектора дают низкочастотные сигналы, пропорциональные $|X_{\pm}|^2 \approx 2 \pm 2 \cos[\phi(t) + \alpha]$, где $\phi(t) \equiv \phi_1(t) - \phi_2(t)$. Вычитая эти сигналы, получаем после ограничения функцию нужного вида (9):

$$a(\alpha, t) = \text{sign}\{\cos[\phi(t) + \alpha]\}. \quad (11a)$$

Аналогично на приемнике B формируется второй случайный телеграфный сигнал:

$$b(\beta, t) = \text{sign}\{\cos[-\phi(t) + \beta]\}. \quad (11б)$$

Здесь использовано свойство параметрических генераторов $\phi_k + \phi'_k = \phi_0$ (ϕ_0 — фаза накачки), дающее $\phi + \phi' = \phi_1 - \phi_2 + \phi'_1 - \phi'_2 = 0$.

Фактическая обработка сигналов производилась цифровым методом. Описание этой процедуры и некоторые технические подробности даны в Приложении III.

В нашей модели "скрытыми параметрами" λ (см. Приложение I) является все множество переменных, описывающих мгновенное состояние всей схемы, включая источники питания. Эволюция этих переменных проявляется через флуктуации фаз параметрических генераторов $\phi_k(\lambda(t))$ с характерным временем τ_ϕ , которые, в свою очередь, приводят в соответствии с (11) к флуктуациям знаков сигналов a_i и b_i . Эти знаки наблюдаются в некоторые моменты времени t_i , разделенные интервалом, много большим τ_ϕ .

Характерное время τ_ϕ "естественной" смены знаков сигналов a, b , связанное с временем когерентности фазы параметрических генераторов, имеет порядок 10^{-4} с, причем моменты смены знака в a и b не всегда совпадают (см. рис. 5). В связи с этим для визуального

наблюдения корреляции по цветам ламп использовался тактовый генератор с частотой около 1 Гц, который задавал периодичность опроса состояния выходных каскадов детекторных схем и соответствующего переключения ламп. При автоматическом измерении корреляции M использовалась более высокая частота опроса.

Отметим, что для еще большего сходства с квантовыми экспериментами лучше было бы применить посылку колебаний со случайной фазой по радио в случайные моменты времени в виде коротких импульсов с длительностью, меньшей времени когерентности фазы.

7. Заключение

1. Подчеркнем, что описанный здесь классический имитатор квантовых эффектов с двумя двухконтурными параметрическими генераторами, во многом аналогичен "настоящим" ЭПР-установкам. Известны три основных типа таких установок: на пучках ферми-частиц со спином 1/2 и оптические с использованием обычных или поляризационных интерферметров интенсивности.

В оптических ЭПР-экспериментах в последнее время также используют параметрические источники света, но в режиме усиления (ниже порога самовозбуждения), когда излучаемый свет является собственным квантовым шумом параметрического усилителя света (эффект *параметрического рассеяния света* [9]). В варианте ЭПР-эксперимента, описанного в [9], как и здесь, используются два двухмодовых параметрических усилителя. При этом операторы наблюдаемых величин $A = A(0)$, $A' = A(\pi/2)$ можно интерпретировать как (некоммутирующие) операторы $\text{Cos}(\phi)$ и $\text{Sin}(\phi)$, где ϕ — разность фаз двух колебаний (см. рис. 5). В оптике для фазового детектирования используются светоделители. И в классической, и в квантовооптической моделях общая информация, посылаемая в i -й передаче к наблюдателям, закодирована в случайной фазе ϕ_i , что позволяет наблюдателям образовывать двузначные телеграфные сигналы с регулируемой степенью корреляции.

Формальное описание двух других типов ЭПР-экспериментов (поляризационных оптических и спиновых) также имеет много общего с рассмотренной моделью [9]. В поляризационных экспериментах роль общей случайной фазы играет угол линейной поляризации, при этом управление отбором информации производится поляризационной призмой. В экспериментах с ферми-частицами роль случайной фазы играет угол между спином и магнитным полем Штерна–Герлаха.

Принципиальное отличие квантовых экспериментов, приводящее к возможности нарушения неравенств Белла, сводится "лишь" к невозможности одновременно, в одном испытании, измерить $A_i(\alpha)$ и $A_i(\alpha')$ при $\alpha \neq \alpha'$ так как в каждом приемном пункте при каждом испытании в распоряжении имеется только один фотон или ферми-частица.

Таким образом, описанная действующая классическая модель наглядно показывает, что управляемый на расстоянии эффект корреляции типа ЭПР-Бомы имеет близкий классический аналог, сам по себе этот эффект не свидетельствует о каких-либо таинственных сверхсветовых влияниях.

2. В то же время все минимально разумные классические модели должны удовлетворять неравенству Белла, и его нарушение в квантовых моделях является истинным

парадоксом. Как ясно из обсуждения после формулы (I.2), возможны три основные "объяснения" факта нарушения неравенства Белла: можно отрицать или понятие совместных вероятностей, или их положительность, или локальность.

Итак, имеются три альтернативы:

- 1) отказ от совместных вероятностей,
- 2) совместные вероятности плюс возможность их отрицательных значений и
- 3) совместные вероятности плюс неизвестные сверхсветовые силы.

(Введение скрытых параметров, обеспечивающих классический детерминизм, подразумевает согласно (I.6) существование совместных вероятностей и является поэтому частным случаем второго или третьего выбора.)

Действительно, нарушение неравенства Белла, имеющее место в квантовой теории, можно при желании объяснить и в рамках классических представлений о совместных вероятностях, но лишь ценой введения неизвестных дальнедействующих сил между измерительными приборами или отказа от неотрицательности вероятности (см. (I.2)). Отсюда часто делается вывод (противоречащий, по-видимому, даже правилам формальной логики), что квантовая теория и квантовые явления *нелокальны*. Иногда также говорят, что нарушение неравенств Белла свидетельствует о неприменимости *локального реализма*, т.е. реализм приравнивается к применимости понятия совместных вероятностей и априорных свойств.

Помимо общих соображений имеется конкретное возражение против "нелокального" объяснения парадокса Белла: ведь взаимодействие между удаленными приборами должно не просто снять ограничение $|\langle S \rangle| \leq 1$, но обеспечить точное квантовое значение $\langle S \rangle = \sqrt{2}$, причем независимо от деталей конструкции измерительной аппаратуры.

Введение отрицательных вероятностей является чисто формальным приемом, не имеющим операционального смысла.

Таким образом, из трех зол наименьшим представляется первое — отказ от понятия совместных вероятностей, от возможности приписывания квантовым объектам некоторых априорных свойств (соответствующих некоммутирующим операторам). Такое заключение непосредственно связано с принципом дополненности, т.е. оно уже входит в существующую парадигму квантовой физики, поэтому естественно считать нарушение неравенств Белла еще одним (возможно, наиболее непосредственным) свидетельством в пользу принципа дополненности, а не доказательством существования принятых *ad hoc* неизвестных взаимодействий или не имеющих физического смысла отрицательных вероятностей.

Отметим, что вывод о неприменимости понятия совместных вероятностей можно сделать и вне связи с неравенством $|\langle S \rangle| \leq 1$, а исходя лишь из формальных выражений для средних значений от произведений некоммутирующих операторов, приводящих к отрицательным и неоднозначным "вероятностям" (см. Приложение II). Таким образом, квантовые ЭПР-модели обладают двумя существенными отличиями от классических: невыполнением в них неравенства $|\langle S \rangle| \leq 1$ и отрицательностью совместных "вероятностей" для некоммутирующих наблюдаемых. Первое отличие

можно непосредственно обнаружить в эксперименте. Отказ от понятия совместных вероятностей разрешает оба противоречия.

Конечно, при этом остается "вечная" общая проблема интерпретации квантового формализма. Его копенгагенская трактовка, которой явно или неявно придерживаются большинство физиков, просто запрещает задавать природе "лишние" вопросы, т.е. она имеет позитивистский, прагматический оттенок. В контексте ЭПР-экспериментов эта проблема, по-видимому, обостряется: приходится примириться с тем, что хотя до измерения некоторые свойства реальности существуют лишь потенциально, но корреляция между ними все равно имеется. И все же при учете описанного выше простого классического аналога парадокс Белла представляется не более и не менее загадочным, чем, скажем, невозможность одновременного точного измерения координаты и импульса частицы.

3. Выбор интерпретации — в значительной мере дело вкуса. Единственный экспериментально наблюдавшийся статистический факт в случае квантовых моделей — косинусоидальная зависимость функции корреляции $M(\gamma)$ с экстремальными значениями ± 1 , изображенная на рис. 2 (кривая *b*). Именно такая зависимость наблюдается в опытах по интерференции интенсивности света в случае использования источников "неклассического" (двухфотонного) света [9, 26]. При использовании классического источника света можно на той же самой установке получить такую же косинусоидальную зависимость, но с экстремальными значениями $\pm 1/2$ [9], что дает в два раза меньшее значение $|\langle S \rangle|$ и поэтому не нарушает неравенство Белла.

Если подобные эксперименты описывать в представлении Гейзенберга, то становится очевидным, что отличие квантовых экспериментов от классических обусловлено не особенностями той или иной частной оптической схемы преобразования и детектирования сигналов, а спецификой начального квантового состояния электромагнитного поля на входе оптической схемы, не имеющего классического статистического эквивалента [9, 26]. Такой общий гейзенберговский подход к оптическим ЭПР-экспериментам позволяет проводить наглядные классические параллели, он удобен для классификации различных вариантов таких экспериментов.

Авторы благодарны А.В. Белинскому за многочисленные плодотворные обсуждения и Российскому фонду фундаментальных исследований, код проекта 93-02-14848, за финансовую поддержку. Один из авторов (Д.Н. Клышко) признателен также А. Цейлингеру за неизменный интерес к обсуждаемым здесь вопросам.

8. Приложения

I. Доказательство неравенства Белла

В эксперименте, схема которого изображена на рис. 1, усреднение производится многократным повторением испытаний на одной установке при неизменных макроскопических условиях. Естественно предположить, что при теоретическом описании усреднение по времени можно заменить усреднением по ансамблю с помощью некоторой плотности распределения вероятности $P_{AB'A'B'}(a, b, a', b') \equiv P(a, b, a', b')$ для всех четырех наблюдаемых случайных величин $A = A(\alpha)$, $A' = A'(\alpha')$,

$B = B(\beta)$, $B' = B(\beta')$. Здесь $P(a, b, a', b') \geq 0$, $\sum P(a, b, a', b') = 1$, переменные a, a', b, b' принимают значения ± 1 , α и β — произвольные параметры, влияющие на статистику A и B . Функция $P(a, b, a', b')$ определена на множестве из $2^4 = 16$ возможных исходов одного "полного" испытания, она задает элементарные или первичные вероятности нашей вероятностной модели. Например, $P(1, 1, 1, -1)$ — вероятность наблюдения события $\{a = +1, b = +1, a' = +1, b' = -1\}$.

Хотя согласно рис. 1 при каждом испытании измеряются не четыре, а только две величины (например, A и B или A' и B'), ничто, казалось бы, не препятствует использованию в каждом приемнике двух параллельных устройств, управляемых одним общим сигналом от передатчика информации и регистрирующих одновременно две наблюдаемые, например A и A' . При этом отпала бы необходимость в переключающихся ручках на рис. 1 и в каждом приемнике имелось бы четыре индикаторных лампочки. (Более того, можно, очевидно, измерять A и при более чем двух значениях аргумента α , α', α'', \dots) Поскольку параметры α и β изменяются произвольно в точках приема сигналов, то естественно считать элементарные вероятности всевозможных исходов $P(a, b, a', b')$ априорно заданными свойствами источника сигналов независимо от того, какие величины измеряются, а какие нет.

С помощью элементарных вероятностей по правилу сложения вероятностей несовместных событий можно найти вероятности всех других событий. Например, вероятность загорания двух зеленых ламп в схеме на рис. 1, т.е. вероятность события $\{a = +1, b = +1\}$, определяется следующей суммой четырех элементарных вероятностей:

$$P_{AB}(+, +) = \sum_{a', b' = \pm 1} P_{ABA'B'}(+, +, a', b').$$

Моменты распределения также определяются через элементарные вероятности, например,

$$\begin{aligned} M \equiv \langle AB \rangle &= \sum_{a, b, a', b'} ab P_{ABA'B'}(a, b, a', b') = \\ &= \sum_{a, b} ab P_{AB}(a, b). \end{aligned}$$

Можно решить и обратную задачу — выразить элементарные вероятности P через набор моментов M (см. Приложение II). Моменты в нашей классической модели легко вычисляются с помощью формул (11) и предположения о равномерности распределения фазы, обеспечивающем стационарность; в квантовых ЭПР-моделях вычисление моментов также не представляет труда [9].

Выразим среднее значение случайной величины S , определенной в (3), непосредственно через элементарные вероятности:

$$\langle S \rangle_c = \sum_{a, b, a', b' = \pm 1} P(a, b, a', b') \sigma(a, b, a', b'). \quad (I.1)$$

Здесь $\sigma(a, b, a', b') \equiv (ab + a'b + ab' - a'b')/2$ в соответствии с постулатом эргодичности и экспериментальной процедурой (см. (3)). Эта функция содержит только четыре различных множителя и поэтому принимает лишь два значения ± 1 (в отличие от восьми множителей и пяти значений $0, \pm 1, \pm 2$ в случае экспериментальной

величины s , см. рис. 4). Действительно, сгруппируем слагаемые следующим образом: $\sigma = [a(b + b') + a'(b - b')]/2$; если, например, $b = b'$, то $\sigma = ab = \pm 1$; если же $b = -b'$, то $\sigma = a'b = \pm 1$.

Модуль суммы не превышает суммы модулей, поэтому из (I.1) и условий

$$\sigma = \pm 1, \quad P \geq 0, \quad \sum P = 1$$

сразу получаем неравенство Белла (4а):

$$|\langle S \rangle_c| \leq \sum |\sigma P| = \sum |\sigma| P = \sum P = 1. \quad (I.2)$$

Почему же этот элементарный вывод теряет силу при квантовом описании? Введя совместные вероятности $P(a, b, a', b')$, мы неявно сделали естественное предположение: допустили априорное существование и возможность измерения в одном испытании всех четырех наблюдаемых A, A', B и B' . Это предположение не всегда оправдано в квантовых вероятностных моделях, где информация, переносимая, например, однофотонным состоянием светового поля, не может разветвляться ("клонироваться") и управлять двумя регистрирующими устройствами. Например, один фотон не может поглотиться в двух детекторах. В экспериментах с ферми-частицами A и A' описывают проекции спина на различные направления, которые измеряются при разных ориентациях магнитов. В результате A и A' и аналогично B и B' нельзя измерить в одном испытании. Эта парадоксальная особенность квантовых моделей связана с принципом дополнителности.

Формально невозможность одновременного измерения каких-либо наблюдаемых величин связана в квантовой теории с некоммутативностью соответствующих операторов, в данном случае A и A' , B и B' . Поскольку эти операторы не коммутируют, то им нельзя априори приписывать какие-либо значения, включая собственные значения ± 1 , и в результате равенство $\sigma = \pm 1$ не имеет смысла в квантовой теории. Не имеют смысла и элементарные вероятности $P(a, b, a', b')$. В Приложении II показано, что формально определенные квантовые моменты $\langle ABA' \rangle$, $\langle ABA'B' \rangle, \dots$ приводят к отрицательным и неоднозначно определенным элементарным вероятностям.

Как можно все же избавиться от ограничения $|\langle S \rangle| \leq 1$, оставаясь в рамках классических представлений об априорных вероятностях, т.е. используя формулу (I.1)? Согласно (I.2) имеются две очевидные (и одинаково неприемлемые) формальные возможности: или отказаться от условия неотрицательности вероятностей $P \geq 0$ или избавиться от равенства $\sigma = \pm 1$. Это равенство нарушается, если предположить существование каких-то взаимодействий между приборами. В соответствии с распространенной интерпретацией ЭПР-корреляций (раздел I) предположим, что параметр α аппаратуры в A влияет каким-то неизвестным "нелокальным" образом на показания аппаратуры в B , а β влияет на показания аппаратуры в A . При этом надо везде заменить $a(\alpha)$ на $a(\alpha, \beta)$ и $b(\beta)$ на $b(\alpha, \beta)$. В результате σ будет зависеть уже не от четырех, а от восьми различных множителей, как s в (3):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} [a(\alpha, \beta) b(\alpha, \beta) + a(\alpha', \beta) b(\alpha', \beta) + \\ &+ a(\alpha, \beta') b(\alpha, \beta') - a(\alpha', \beta') b(\alpha', \beta')]. \end{aligned} \quad (I.3)$$

В результате σ может, как и s , принимать значения 0, ± 1 , ± 2 и в (I.1) должны фигурировать другие элементарные вероятности, определяющие статистику всех восьми множителей.

Однако теперь уже нет смысла определять S через элементарные вероятности, ясно, что все четыре слагаемых в (I.3) могут быть статистически независимы. При этом $\langle S \rangle = \langle AB + A'B' + A''B'' - A'''B''' \rangle / 2$, так что универсальное, не зависящее от модели ограничение $|\langle S \rangle| \leq 1$ уже не возникает, и при отсутствии дополнительных условий величина $\langle S \rangle$ оказывается ограниченной лишь естественными пределами ± 2 .

Часто при обсуждении неравенств Белла в качестве элементарных вероятностей выбираются вместо $P(a, b, a', b')$ вероятности вида $P(\lambda)$, где $\lambda \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ — множество "скрытых" параметров, определяющих причинным образом (например, по законам классической динамики и электродинамики) все свойства посылаемых сообщений. Следовательно, имеют место некоторые однозначные функциональные зависимости вида $a = a(\lambda, \alpha)$ и $b = b(\lambda, \beta)$ (в отсутствие "нелокальности"). Сущность проведенного выше доказательства при этом не изменяется. Процедура усреднения принимает вид (ср. (I.1))

$$\langle S \rangle_c = \int d\lambda P(\lambda) \sigma(\lambda), \quad (\text{I.4})$$

где

$$\sigma(\lambda) \equiv \frac{1}{2} [a(\lambda, \alpha) b(\lambda, \beta) + a(\lambda, \alpha') b(\lambda, \beta) + a(\lambda, \alpha) b(\lambda, \beta') - a(\lambda, \alpha') b(\lambda, \beta')] \quad (\text{I.5})$$

опять определена через четыре переменные, и поэтому $\sigma(\lambda) = \pm 1$. Отсюда с учетом $\int d\lambda P(\lambda) = 1$, $P(\lambda) \geq 0$, снова получаем $|\langle S \rangle| \leq 1$. Здесь также можно избавиться от этого ограничения с помощью гипотезы о "нелокальности", нарушающей условие $\sigma(\lambda) = \pm 1$.

Заметим, что предположение о существовании плотности распределения для скрытых параметров $P(\lambda)$ и однозначных причинных связей $a(\lambda, \alpha)$, $b(\lambda, \beta)$ подразумевает и существование совместного распределения $P_{ABA'B'}$ (a, b, a', b'):

$$P_{ABA'B'}(a, b, a', b') = \int_{\Lambda(a, b, a', b')} d\lambda P(\lambda). \quad (\text{I.6})$$

Здесь $\Lambda(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ — одно из $2^4 = 16$ непересекающихся подмножеств всего множества скрытых параметров $\Lambda \equiv \{\lambda\}$, порождающее причинным образом определенную комбинацию знаков a, b, a', b' .

Таким образом, оба приведенных выше вывода неравенства $|\langle S \rangle| \leq 1$ предполагают возможность описания наблюдаемых эффектов в терминах элементарных вероятностей $P_{ABA'B'}(a, b, a', b')$, и его невыполнение в квантовых моделях логично объяснить именно нарушением этой возможности. Как показано в Приложении II, такое же заключение следует и из появления отрицательных и многозначных вероятностей, рассчитываемых с помощью формулы (II.2) при использовании квантовых средних значений для произведений некоммутирующих операторов.

II. Статистика телеграфных сигналов и отрицательные "вероятности"

Пусть имеется N двузначных случайных величин A_1, \dots, A_N со значениями $a_i = \pm 1$, определяемых набором из 2^N элементарных вероятностей $P(a_1, a_2, \dots, a_N)$. Моменты этого распределения вероятностей по определению вычисляются по следующему правилу:

$$M_{ij\dots} \equiv \langle A_i A_j \dots \rangle \equiv \sum_{a_1 \dots a_N} (a_i a_j \dots) P(a_1, a_2, \dots, a_N) \quad (1 \leq i < j, \dots, \leq N) \quad (\text{II.1})$$

(полагаем здесь все индексы i, j, \dots различными). Таким образом, моменты инвариантны ко всем перестановкам их индексов: $M_{12} = M_{21}, \dots$

Рассматривая равенства (II.1) как систему уравнений относительно вероятностей P , можно найти обратные преобразования:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_N) = 2^{-N} \left[1 + \sum_{i=1}^N a_i M_i + \sum_{i < j} a_i a_j M_{ij} + \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k M_{ijk} + \dots + (a_1 a_2 \dots a_N) M_{12\dots N} \right]. \quad (\text{II.2})$$

Здесь $\sum_{i < j}$ — сумма из C_N^2 слагаемых со всевозможными сочетаниями индексов i и j , $\sum_{i < j < k}$ — сумма из C_N^3 слагаемых и т.д.

Например, при $N = 2$, $A_1 = A$, $A_2 = B$ и $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ получаем $P(a, b) = (1 + ab \langle AB \rangle) / 4$. Эта связь была использована в уравнениях (2). Нетрудно проверить, что выполняются условия согласования вида $\sum_{a_i = \pm 1} P_N = P_{N-1}$ и что подстановка (II.2) в (II.1) приводит к тождествам вида $M = M$ (при этом следует использовать равенства $\sum_{a_i} a_i a_k = 2\delta_{ik}$, $\sum_{a_1 \dots a_N} 1 = 2^N$).

Таким образом, можно задать статистику телеграфных сигналов A_n не через элементарные вероятности P , а через моменты M , которые согласно (II.2) определяют вероятности. Однако моменты нельзя задавать произвольно, так как (II.2) и условие $0 \leq P(a_1, a_2, \dots, a_N)$ накладывает на них определенные ограничения — при всех наборах $\{a\}$ должно иметь место неравенство

$$-1 \leq \sum_{i=1}^N a_i M_i + \sum_{i < j} a_i a_j M_{ij} + \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k M_{ijk} + \dots + (a_1 a_2 \dots a_N) M_{12\dots N}. \quad (\text{II.2a})$$

Этим условиям не всегда удовлетворяют моменты, вычисляемые с помощью квантовых моделей, что указывает на неприменимость в этих случаях описания в терминах элементарных вероятностей. Подтверждая квантовые вычисления измерением некоторых моментов, можно экспериментально продемонстрировать этот "запрет" на понятие элементарных (совместных) вероятностей. Таков возможный взгляд на сущность экспериментов, демонстрирующих нарушение неравенств Белла.

Отметим также, что в квантовой теории в общем случае моменты изменяются при перестановке операторов, т.е. надо различать M_{12} и M_{21} , M_{123} и M_{132} и т.д. Эта асимметрия не отражена в (II.1), (II.2).

Рассмотрим для примера сначала классическую вероятностную модель, основанную на (11) и реализуемую нашей радиотехнической схемой. Для симметрии введем обозначения $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A'$, $A_4 = B'$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\beta$, $\alpha_3 = \alpha'$, $\alpha_4 = -\beta'$ и т.д. В случае стационарных процессов фаза распределена равномерно и нечетные моменты равны нулю. При этом момент N -го порядка определяется формулой

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \operatorname{sign}\{\cos(\phi + \alpha_1) \dots \cos(\phi + \alpha_N)\}. \quad (\text{II.3})$$

Отсюда следует, что функция $M(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ инвариантна ко всем $N!$ перестановкам аргументов $\{\alpha_i\}$ и к одновременному изменению их знаков. При сдвиге одного из аргументов на $\pm\pi$ функция $M(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ изменяет знак. Ввиду такой высокой симметрии достаточно найти ее лишь при условиях $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \pi$. Вычисление интеграла сводится к определению относительной доли участков оси ϕ , на которых произведение косинусов положительно. В результате четные моменты принимают вид

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = 1 - \frac{2\gamma}{\pi}, \quad \gamma \equiv \alpha_2 - \alpha_1 + \dots + \alpha_N - \alpha_{N-1} \quad (\text{II.4a})$$

(здесь γ также принадлежит интервалу $[0, \pi]$).

При $N = 2$ из (II.2) и (II.4a) следуют формулы (1a) и (2a), а при $N = 3$ находим

$$P(a, b, a') = \frac{1}{8} (1 + aa' \langle AA' \rangle + ab \langle AB \rangle + a'b \langle A'B' \rangle) = \frac{1}{4} \left[2 + \left(\frac{aa'|\alpha - \alpha'| + ab|\alpha + \beta| + a'b|\alpha' + \beta|}{\pi} \right) \right]. \quad (\text{II.5a})$$

Это выражение неотрицательно (здесь суммы и разности фаз должны быть приведены к интервалу $[0, \pi]$). Пусть, как и в (3), $\alpha = 0$, $\beta = -\pi/4$, $\alpha' = \pi/2$, тогда

$$\begin{aligned} P(+++) &= P(---) = \frac{1}{4}, \\ P(+ - +) &= P(- + -) = \frac{1}{8}, \\ P(- + +) &= P(+ - -) = \\ &= P(+ + -) = P(- - +) = \frac{1}{16}. \end{aligned} \quad (\text{II.6a})$$

При $N = 4$ сразу в соответствии с (3) примем $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\alpha_2 = -\beta = \pi/4$, $\alpha_3 = \beta' + \pi = \pi/4$, $\alpha_4 = \alpha' = \pi/2$. При этом четвертый момент $\langle ABA'B' \rangle$, как и моменты $\langle AA' \rangle$, $\langle BB' \rangle$, равен нулю. С учетом $\langle AB \rangle = \langle A'B \rangle = \langle AB' \rangle = -\langle A'B' \rangle = 1/2$ из (II.2) находим элементарные вероятности в виде

$$\begin{aligned} P(a, b, a', b') &= \frac{1}{16} (1 + ab \langle AB \rangle + \\ &+ a'b \langle A'B \rangle + ab' \langle AB' \rangle + a'b' \langle A'B' \rangle) = \\ &= \frac{1}{16} (1 + \sigma), \end{aligned} \quad (\text{II.7a})$$

где $\sigma \equiv (ab + d'b + ab' - d'b')/2$. Отсюда

$$\begin{aligned} P(++++) &= P(----) = P(-++-) = P(---) = \\ &= P(+++-) = P(++-+) = P(---+) = \\ &= P(--+-) = \frac{1}{8}, \\ P(++--) &= P(--++) = P(+--+ -) = P(-+-+) = \\ &= P(-+++) = P(+--+ +) = P(+---) = \\ &= P(-+-- -) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.8a})$$

Из (II.7a) или (II.8a) следует $\langle S \rangle = \sum \sigma P = \sum \sigma(1 + \sigma)/16 = 1$; здесь все слагаемые в сумме положительны, поскольку $\sum P = 1$ и $P \geq 0$. Равенство $\sum \sigma P = 1$ обеспечивается тем, что согласно (II.7a) все вероятности $P(a, b, a', b')$ с аргументами, соответствующими значению $\sigma = -1$, равны нулю. Следовательно, распределение (II.8a) дает для случайной величины Σ со значениями $\sigma = \pm 1$ распределение $P_{\Sigma}(+) = 1$, $P_{\Sigma}(-) = 0$, т.е. Σ является детерминированной величиной с нулевой дисперсией ($\Sigma = \sigma = 1$). Равенство нулю некоторых элементарных вероятностей в (II.8a) приводит к ряду следствий типа $P_{ABA'}(+ - +) = P_{ABA'}(- + -) = 0$, $P_{AB}(+-) = P_{ABA'}(+ - -)$, которые порождаются условием $\sigma = 1$.

В то же время реально наблюдаемая величина S принимает с некоторыми вероятностями значения $s = 0, \pm 1, \pm 2$ (см. рис. 3). Наша эргодическая модель обеспечивает равенство лишь средних значений двух случайных величин Σ и S .

Рассмотрим далее квантовую модель ЭПР-Бомы, когда (см. [9])

$$\begin{aligned} \langle AA' \rangle &= \cos(\alpha - \alpha'), \quad \langle AB \rangle = \cos(\alpha + \beta), \\ \langle ABA' \rangle &= 0, \quad \langle ABA'B' \rangle = \cos(\alpha + \beta - \alpha' - \beta'). \end{aligned} \quad (\text{II.4б})$$

Вместо (II.5a) теперь имеем

$$\begin{aligned} P(a, b, a') &= \frac{1}{8} [1 + aa' \cos(\alpha - \alpha') + \\ &+ ab \cos(\alpha + \beta) + a'b \cos(\alpha' + \beta)] = \\ &= \frac{1}{8} [1 + aa' \cos(x - y) + ab \cos(x) + a'b \cos(y)], \end{aligned} \quad (\text{II.5б})$$

где $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha' + \beta$. Почти при всех x, y две компоненты $P(a, b, a')$ из восьми отрицательны (исключением являются подмножества вида $(x, 0)$, $(0, y)$ и (x, x)). Поскольку $P(a, b, a') = P(a, b, a', +) + P(a, b, a', -)$, то и часть компонент четырехмерного распределения $P(a, b, a', b')$ также почти при всех значениях параметров $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ отрицательна.

Пусть теперь в соответствии с (3) $\alpha = 0$, $\alpha' = \pi/2$, $\beta = -\pi/4$, тогда

$$\begin{aligned} P(+++) &= P(---) = \frac{1}{8} (1 + \sqrt{2}), \\ P(-+-) &= P(+ - +) = \frac{1}{8} (1 - \sqrt{2}), \\ P(-++) &= P(+ - -) = P(++-) = P(- - +) = \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (\text{II.6б})$$

Образует из трехмерных (квази)вероятностей $P_{ABA'}(a, b, a') \equiv P(a, b, a')$ следующую комбинацию двумерных вероятностей: $P_{AA'}(++) + P_{BA'}(+-) - P_{AB}(++)$. По правилу сложения вероятностей она

равна $P(-+-) + P(+ - +)$; эта величина согласно (II.66) отрицательна (при $\alpha = 0, \alpha' = \pi/2, \beta = -\pi/4$).

При произвольных фазах

$$P_{AA'}(++) + P_{BA'}(+-) - P_{AB}(++) = \frac{1}{2} \left[\sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha' + \beta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) \right].$$

Это выражение при $\alpha + \beta = \pi/3, \alpha' + \beta = -\pi/3$ принимает минимальное значение $-1/8$.

В то же время в классической теории всегда $P(-+-) + P(+ - +) \geq 0$ и поэтому $P_{AA'}(++) + P_{BA'}(+-) \geq P_{AB}(++)$. Подобную формулу имело одно из первоначальных неравенств Белла [3, 7, 12]. Мы видим, что его нарушение в квантовых моделях формально объясняется отрицательностью трехмерных "вероятностей" $P(-+-), P(+ - +)$.

Аналогично в случае $N = 4$ вместо (II.7а) получаем

$$P(a, b, a', b') = 2^{-4} [1 + aa' \cos(\alpha - \alpha') + bb' \cos(\beta - \beta') + ab \cos(\alpha + \beta) + a'b \cos(\alpha' + \beta) + ab' \cos(\alpha + \beta') + a'b' \cos(\alpha' + \beta') + aa'bb' \cos(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')]. \quad (\text{II.7б})$$

Пусть $\alpha' - \alpha = \beta' - \beta = \pi/2, \alpha + \beta \equiv \gamma_1$, тогда

$$P(a, b, a', b') = \frac{1}{16} [1 + (ab - a'b') \cos \gamma_1 - (a'b + ab') \sin \gamma_1 - ab a' b'] .$$

Это выражение для некоторых a, b, a', b' принимает отрицательные значения при всех γ_1 (кроме 0 и π). Пусть, например, в соответствии с (3) $\gamma_1 = -\pi/4$, тогда

$$P(a, b, a', b') = \frac{1}{16} [1 + \sqrt{2} \sigma - aa'bb'],$$

где $\sigma = (ab + a'b + ab' - a'b')/2$. При этом часть "вероятностей" отрицательна:

$$\begin{aligned} P(++++) &= P(----) = P(-++-) = \\ &= P(----) = \frac{\sqrt{2}}{16}, \\ P(++--) &= P(--++) = P(+--+)= \\ &= P(-++-) = -\frac{\sqrt{2}}{16}, \\ P(+++-) &= P(++-+) = P(---+) = \\ &= P(--+-) = \frac{2 + \sqrt{2}}{16}, \\ P(-+++)&= P(+--+)= P(+---)= \\ &= P(-+--) = \frac{2 - \sqrt{2}}{16}. \end{aligned} \quad (\text{II.8б})$$

Эти выражения согласуются с (II.66): например, $P(+--+)+P(+---)=P(+ - +) = (1 - \sqrt{2})/8$.

Из (II.8б) следует $\langle S \rangle = \sum \sigma P = \sum \sigma [1 + \sqrt{2} \sigma - aa'bb']/16 = \sqrt{2}$, т.е. неравенство Белла $|\langle S \rangle| \leq 1$ нарушается. Формально это можно считать результатом того, что не все элементарные "вероятности" P в сумме $\sum \sigma P$ положительны (см. также работу [23], где формулы (II.5б)–(II.8б) были получены другим методом). Отметим, что обратное неверно: наличие отрицательных компонент $P(a, b, a', b')$ не всегда приводит к $|\langle S \rangle| > 1$.

Мы не учли здесь неоднозначности в выборе четвертого момента, связанной с некоммутативностью операторов и приводящей к неоднозначности решения обратной задачи (II.2). Переставим местами A и A' в моменте $\langle ABA'B' \rangle$. При этом в (II.4б) и (II.7б) $\cos(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')$ заменяется на $\cos(\alpha' + \beta - \alpha - \beta')$, и вероятности изменяются. Так, при $\alpha = 0, \beta = -\pi/4, \alpha' = \pi/2, \beta' = \pi/4$ теперь $P(a, b, a', b') = 2^{-4} [1 + \sqrt{2} \sigma + aa'bb']$. В результате в правой части (II.8б) меняются местами первая и третья строки, а также вторая и четвертая. Еще один набор вероятностей получится при использовании, по аналогии с распределением Вигнера, симметризованных моментов. Однако на реально наблюдаемых средних значениях эта неоднозначность не сказывается.

Таким образом, хотя в квантовых моделях моменты типа $\langle ABA' \rangle, \langle ABA'B' \rangle, \dots$, составленные из некоммутирующих операторов и не имеющие поэтому операционального смысла, могут быть формально вычислены, однако при этом соответствующие им согласно классической формуле (II.2) элементарные "вероятности" могут быть отрицательны и неоднозначно определены, поэтому они не имеют физического смысла.

Найдем теперь распределение вероятностей $P_S(s)$ для составной случайной величины S , измеряемой при проверке неравенств Белла (см. определение (3) и рис. 4). В классическом случае она также полностью определяется через элементарные вероятности $P(a, b, a', b')$. Однако проще сразу учесть, что она измеряется при независимых повторных испытаниях и поэтому описывается биномиальным распределением. Пусть p — вероятность того, что произведение AB положительно, и q — вероятность того, что AB отрицательно. Согласно (2)

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= P_{AB}(++) + P_{AB}(--) = \frac{1}{2} [1 + M(|\gamma|)], \\ q(\gamma) &= P_{AB}(+-) + P_{AB}(-+) = \frac{1}{2} [1 - M(|\gamma|)]. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

В соответствии с (3) в трех сериях наблюдений параметр $|\gamma| = \pi/4$ одинаков, а в одной серии $|\gamma| = 3\pi/4$. В последнем случае произведение ab берется с обратным знаком, поэтому p и q меняются ролями. Далее, согласно (1) $M(3\pi/4) = M(\pi/4)$, поэтому можно полагать, что во всех четырех сериях вероятность $p \equiv p(\pi/4)$ одинакова. В результате S принимает значения $s = (2, 1, 0, -1, -2)$ с биномиальными вероятностями

$$P_S(s) = (p^4, 4p^3q, 6p^2q^2, 4pq^3, q^4). \quad (\text{II.10})$$

Согласно (1а) и (II.9) в классической модели $p = 0,75, q = 0,25$, что дает

$$P_S(s) = (0,316; 0,422; 0,211; 0,047; 0,004). \quad (\text{II.11})$$

Эти значения подтверждаются численным экспериментом (см. рис. 4). Отсюда опять находим

$$\langle S \rangle_c = \sum_{s=-2}^2 s P_S(s) = 1.$$

В квантовом случае согласно (1б) и (II.9) $p = \cos^2(\pi/8) = 0,853, q = \sin^2(\pi/8) = 0,146$, так что все вероятности, кроме $P_S(2)$, меньше классических:

$$P_S(s) = (0,531; 0,364; 0,093; 0,011; 0,0005). \quad (\text{II.12})$$

Отсюда $\langle S \rangle_q = \sqrt{2}$.

Рассмотрим, наконец, случай с тремя наблюдателями (раздел 4). Квантовая модель дает следующие операторные тождества [9]:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv A'BC = -I, & F_2 &\equiv AB'C = -I, \\ F_3 &\equiv ABC' = -I, & F_4 &\equiv A'B'C' = I. \end{aligned} \quad (II.13)$$

Отсюда

$$Z \equiv F_1 F_2 F_3 F_4 = -I. \quad (II.14)$$

Здесь $A^2 = A'^2 = I$, $AB = BA$, $F_1 F_2 = F_2 F_1$ и т.д., поэтому оператор Z можно представить в виде $Z = AA'AA'B'BB'CC'C'C' = I + [A, A']AA'$. Если теперь пренебречь некоммутативностью операторов A и A' , то получим $Z = I$, что соответствует классическим ожиданиям. Таким образом, парадокс ГХЦ [17], как и парадокс Кохена–Спекера [24], формально связан с некоммутативностью алгебры наблюдаемых (подробнее см. [9]).

Покажем, что часть вероятностей, соответствующих согласно правилу (II.2) соотношениям (II.13), отрицательна. Из (II.13) находим моменты

$$\begin{aligned} \langle A'BC \rangle &= -1, & \langle AB'C \rangle &= -1, \\ \langle ABC' \rangle &= -1, & \langle A'B'C' \rangle &= 1. \end{aligned} \quad (II.15)$$

Подстановка этих значений в (II.2) дает аналогично (II.7б) следующие квазивероятности:

$$P(a, b, c, a', b', c') = 2^{-6} [1 - d'bc - ab'c - abc' + d'b'c'] \equiv 2^{-6} [1 - 2\sigma], \quad (II.16)$$

где теперь $\sigma \equiv (d'bc + ab'c + abc' - d'b'c')/2$. Легко убедиться, что $\sigma = \pm 1$, так что при всех комбинациях чисел a, b, c, a', b', c' , дающих $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, имеем соответственно $P = -1/64$ и $P = 3/64$. Число тех и других комбинаций равно 32, так что $\sum P = 1$.

Рассмотрим аналогично (3) составную наблюдаемую

$$S_3 \equiv \frac{1}{2} (A'BC + AB'C + ABC' - A'B'C'). \quad (II.17)$$

Ее среднее значение в классическом случае не превышает по модулю 1 (ср. (I.2)). Полученное неравенство

$$|\langle S_3 \rangle_c| \equiv \frac{1}{2} \langle A'BC + AB'C + ABC' - A'B'C' \rangle \leq 1 \quad (II.18)$$

является аналогом обычного неравенства Белла (4а) для случая трех наблюдателей [20]. Примечательно, что здесь все четыре наблюдения производятся в условиях полной корреляции или антикорреляции. В квантовой модели неравенство (II.18) нарушается "на 100%": согласно (II.15) или (II.16) $|\langle S_3 \rangle_q| = 2$. При дальнейшей итерации $\langle S_N \rangle_q = 2^{(N-1)/2}$ [18] (см. также [16]).

III. Описание схемы ЭПР-имитатора

Схема ЭПР-имитатора, приведенная на рис. 7, как и схема на рис. 1, имеет передатчик S и два приемника A и B с дискретно регулируемыми устройствами задержки L и светодиодными индикаторами $СИ$ корреляции сигналов: красными K и зелеными $З$. Передатчик содержит два двухконтурных параметрических генератора $ПГ1$ и $ПГ2$, работающих в невырожденном режиме с общим генератором накачки $ГН$, настроенных на частоту $\omega_0 = 3$ МГц. Частоты $\omega_{a1,2}$ и $\omega_{b1,2}$ комбинационных параметрических

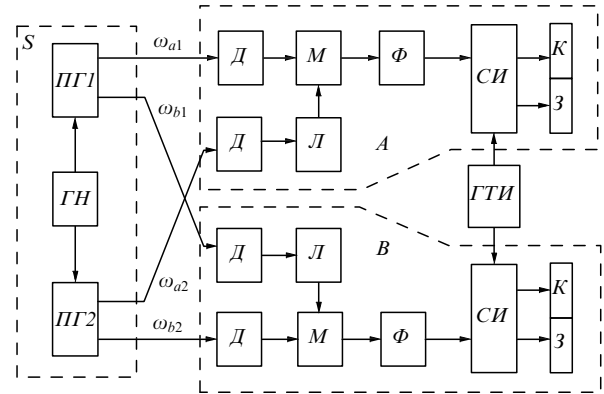


Рис. 7. Блок-схема имитатора корреляции ЭПР-Боба

колебаний на выходах $ПГ$ близки к некртым частотам порядка 1 и 2 МГц (здесь буквенными индексами обозначены несинхронные сигналы близких частот, а цифровыми — номера параметронов, генерирующие соответствующие сигналы).

В эксперименте используется непрерывное напряжение накачки без случайной модуляции по времени. Как уже отмечалось, для моделирования ЭПР-корреляций это непринципиально, поскольку стохастичность сигналов определяется свободной флуктуацией их фаз. Действительно, фиксирована только сумма фаз комбинационных колебаний, которая в каждом $ПГ$ равна фазе напряжения накачки $\phi_{1,2} + \phi'_{1,2} = \phi_0 = 0$, поэтому мгновенные значения разности фаз двух близких по частоте колебаний всегда одинаковы и противоположны по знаку: $\phi' = -\phi$, т.е. антикоррелированы (см., например, [27]). Это показано на рис. 8, из которого хорошо видно, что изменением фазы любого из сигналов ($\phi_{1,2}$, $\phi'_{1,2}$, цифровой индекс соответствует номеру $ПГ$) можно управлять их корреляцией.

Входными устройствами приемников являются компараторы $Д$, которые преобразуют гармонические сигналы в импульсы логических уровней со скважностью 2, т.е. в симметричный телеграфный сигнал. При этом устраняется нежелательная амплитудная модуляция, фазовая информация полностью сохраняется, а выходные сигналы каждого из четырех компараторов имеют

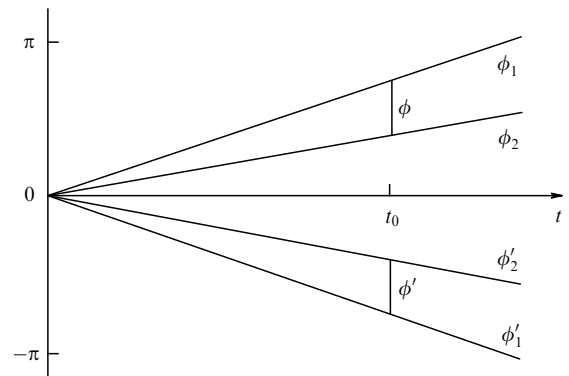


Рис. 8. Свободные флуктуации фаз несинхронных сигналов параметрических генераторов

одинаковые энергетические характеристики. Если логическому уровню "1" приписать значение +1, а логическому уровню "0" — значение -1, то преобразование "принимаемых" сигналов в компараторах можно представить в следующем виде для приемника *A*:

$$\begin{aligned} X_{1,2}(t) &= \cos[\omega_a t + \phi_{1,2}(t)] \rightarrow \text{sign}[X(t)] = \\ &= \text{sign}\{\cos[\omega_a t + \phi_{1,2}(t)]\}, \end{aligned} \quad (\text{III.1a})$$

и для приемника *B*:

$$\begin{aligned} Y_{1,2}(t) &= \cos[\omega_b t - \phi_{1,2}(t)] \rightarrow \text{sign}[Y(t)] = \\ &= \text{sign}\{\cos[\omega_b t - \phi_{1,2}(t)]\}. \end{aligned} \quad (\text{III.1б})$$

Использование сигналов логических уровней позволило применить дискретные и достаточно точные линии задержки *L* на цифровых логических элементах. Это обеспечивает равномерную дискретность шага задержки по фазе. В нашем случае она равна 0,16 рад. Линии задержки включены на выходах компараторов сигналов в каждом приемнике для внесения управляемых фазовых сдвигов α и β в эти сигналы.

Перемножение логических сигналов в приемниках выполняется в знаковых корреляторах *M*, которые работают по схеме антисовпадений ("Исключающее ИЛИ"). На их выходах получаются сигналы суммарных и разностных частот. Для приемника *A*:

$$\begin{aligned} &\text{sign}[\cos(\omega_a t + \phi_1(t) + \alpha)] \times \text{sign}[\cos(\omega_a t + \phi_2(t))] = \\ &= \text{sign}[\cos(\omega_a t + \phi_1(t) + \alpha) \times \cos(\omega_a t + \phi_2(t))] = \\ &= \text{sign}[\cos(\phi_1 - \phi_2 + \alpha) + \cos(2\omega_a t + \phi_1 + \phi_2 + \alpha)] = \\ &= \text{sign}[\cos(\phi(t) + \alpha) + \cos(2\omega_a t + \phi_1 + \phi_2 + \alpha)], \end{aligned} \quad (\text{III.2a})$$

для приемника *B*:

$$\begin{aligned} &\text{sign}[\cos(\omega_b t - \phi_1(t) + \beta)] \times \text{sign}[\cos(\omega_b t - \phi_2(t))] = \\ &= \text{sign}[\cos(\phi_2 - \phi_1 + \beta) + \cos(2\omega_b t - \phi_1 - \phi_2 + \beta)] = \\ &= \text{sign}[\cos(-\phi(t) + \beta) + \cos(2\omega_b t - \phi_1 - \phi_2 + \beta)]. \end{aligned} \quad (\text{III.2б})$$

Сигналы разностных частот в каждом приемнике выделяются с помощью низкочастотных фильтров Φ . При этом на выходах фильтров получаются пилообразные сигналы вида

$$\begin{aligned} &\langle \text{sign}[\cos(\phi + \alpha) + \cos(2\omega_a t + \phi_1 + \phi_2 + \alpha)] \rangle = \\ &= 1 - 2 \frac{|\phi + \alpha|}{\pi}, \\ &\langle \text{sign}[\cos(-\phi + \beta) + \cos(2\omega_b t - \phi_1 - \phi_2 + \beta)] \rangle = \\ &= 1 - 2 \frac{|-\phi + \beta|}{\pi}, \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

где $(\phi + \alpha)$, $(-\phi + \beta)$ принимают значения от $-\pi$ до $+\pi$.

В схемах индикации *СИ* каждого приемника, которые управляются общим генератором тактовых импульсов

ГТИ, следующих с частотой 1 Гц, сигналы (III.3) преобразуются в прямоугольные по уровню "0" и дают результаты, аналогичные (7a) и (7б):

$$\begin{aligned} &\text{sign}\left[1 - 2 \frac{|\phi + \alpha|}{\pi}\right] = \text{sign}[\cos(\phi + \alpha)] = \\ &= \begin{cases} +1, & -\frac{\pi}{2} < (\phi + \alpha) < +\frac{\pi}{2}, \\ 0, & (\phi + \alpha) = \pm\frac{\pi}{2}, \\ -1, & +\frac{\pi}{2} < (\phi + \alpha) < +\frac{3\pi}{2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.4a})$$

$$\begin{aligned} &\text{sign}\left[1 - 2 \frac{|-\phi + \beta|}{\pi}\right] = \text{sign}[\cos(-\phi + \beta)] = \\ &= \begin{cases} +1, & -\frac{\pi}{2} < (-\phi + \beta) < +\frac{\pi}{2}, \\ 0, & (-\phi + \beta) = \pm\frac{\pi}{2}, \\ -1, & +\frac{\pi}{2} < (-\phi + \beta) < +\frac{3\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.4б})$$

Значению +1 соответствует свечение зеленого индикатора, а значению -1 — свечение красного индикатора. Таким образом, при регистрации мгновенной разности фаз сигналов в интервале $[-\pi/2, +\pi/2]$ в каждом из приемников загорается зеленый светодиод, а при регистрации мгновенной разности фаз в интервале $[+\pi/2, +3\pi/2]$ — красный.

Знак разности фаз (или косинуса разности фаз) определяется по фронту тактового импульса *ГТИ* одновременно в каждом приемнике и индицируется на протяжении этого тактового импульса в течение 0,5 с.

При проведении статистических измерений использовалась частота тактовых импульсов 10 кГц. Объем выборки для каждой экспериментальной точки равен 10^4 . В этом случае для измерений вместо визуальной регистрации свечения индикаторов использовался частотомер типа ЧЗ-54. Экспериментальный результат таких измерений приведен на рис. 2. Отсутствие 100%-ных корреляций объясняется естественными термодинамическими флуктуациями — прежде всего флуктуациями опорных напряжений компараторов, которые вызывают флуктуацию фронтов сравниваемых сигналов. При статистических измерениях в случае некоррелированных сигналов, погрешности, связанные с этими флуктуациями, усредняются и проявляются наиболее сильно в случае полной корреляции и антикорреляции. В нашем эксперименте, как видно на рис. 2, связанная с этим максимальная погрешность измерений составляет 8% в точках полной (анти)корреляции.

Список литературы

1. Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* **47** 777 (1935); *УФН* **16** 440 (1936)
2. Bohm D *Quantum Theory*. Prentice-Hall, N.Y., 1951; перевод: Бом Д. Квантовая теория. М.: Физматгиз, 1961.
3. Bell J S *Physics* **1** 195 (1964)
4. Clauser J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **23** 880 (1969)
5. Clauser J F, Horne M A *Phys. Rev.* **D10** 526 (1974)
6. Clauser J F, Shimony A *Rep. Prog. Phys.* **41** 1881 (1978)
7. Гриб А А *УФН* **142** 619 (1984)
8. Home D, Sillery F *Riv. Nuovo Cimento* **14** 1 (1991)
9. Белинский А В, Клышко Д Н *УФН* **163** 1 (1993)
10. Zukowski M *Laser Physics* **4** (1994)

11. Peres A *Am. J. Phys.* **46** 745 (1978)
12. D’Espagnat B *Sci. Am.* **241** 128 (1979)
13. Shimony A *Sci. Am.* **258** 2 (1988)
14. Mermin D *Am. J. Phys.* **49** 940 (1981); **58** 731 (1990); **62** 880 (1994)
15. Mizrahi S S, Moussa M H Y *Intern. J. Modern Physics B* **7** 1321 (1993)
16. Belinsky A V, Klyshko D N *Phys. Lett.* **A176** 415 (1993)
17. Greenberger D M et al. *Am. J. Phys.* **58** 1131 (1990)
18. Mermin D *Phys. Rev. Lett.* **65** 1838 (1990)
19. Klyshko D N *Phys. Lett.* **A172** 399 (1993)
20. Hardy L *Phys. Lett.* **A160** 1 (1991)
21. Wodkiewicz K *Phys. Lett.* **A129** 1 (1988)
22. Agarwal G S, Home D, Schleich W *Phys. Lett.* **A170** 359 (1992)
23. Белинский А В *УФН* **164** 435 (1994); *Письма в ЖЭТФ* **59** 278 (1994)
24. Kochen S, Specker E P *J. Math. Mech.* **17** 59 (1967)
25. Mermin D *Rev. Mod. Phys.* **65** 803 (1993)
26. Клышко Д Н *УФН* **164** 1187 (1994)
27. Каплан А Е, Кравцов Ю А, Рылов В А *Параметрические генераторы и делители частоты* (М.: Сов. радио, 1966)

BELL'S INEQUALITIES AND EPR–BOHM CORRELATIONS: A WORKING CLASSICAL RADIO MODEL

N.V. Evdokimov, D.N. Klyshko, V.P. Komolov, V.A. Yarochkin

*M.V. Lomonosov Moscow State University,
Physics Department, Vorob'evy gory, 119899 Moscow
Tel. (7-095) 939-11 04
E-mail: dnk@klyshko.phys.mu.su*

A simple radiofrequency electronic model is considered which imitates the EPR-Bohm pair correlation of stochastic signals and the fulfillment of the Bell inequality. Some peculiar properties of parametric radiofrequency generators are used in the model. The analysis of the model helps to grasp the distinction between the classical and quantum correlation in EPR experiments. A concrete mechanism of remote "nonlocal" control of the EPR-type correlation, peculiar for both quantum and classical models, is proposed. It is provided by sending toward two remote observers pulses with the same stochastic phase. An elementary prove of the Bell inequality is given and the genesis of the popular term quantum nonlocality usually invoked in the context of quantum versions of the experiment considered, is discussed.

PACS numbers: **03.65.Bz**, 42.50 Dv

Bibliography — 27 references

Received 8 June 1995