

Семинар №8. Спектроскопия фермионных возбуждений

1. Диэлектрическая функция полупроводника
2. Сингулярности Ван Хофа
3. Модуляционная спектроскопия
4. Эффект Франца-Келдыша

Диэлектрическая функция полупроводника

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r) - \text{невозмущенный одноэлектронный гамильтониан}$$

$V(r)$ – среднее поле, в кот. находится ∇ электрон

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 + V(r), \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad \Phi = 0 \quad (\text{Кулон. калибр.})$$

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 = \frac{p^2}{2m} + \cancel{\frac{e}{2mc} \vec{A}\vec{p}} + \cancel{\frac{e}{2mc} \vec{p}\vec{A}} + \cancel{\frac{e^2}{4m^2c^2}}$$

$$H_{eR} = \frac{e}{mc} \vec{A}\vec{p} - \text{электрон-излучательное взаимодействие (возмущение в дипольном приближении)}$$

$$H_{eR} = -e\vec{r}\vec{E} \quad \text{др. запись}$$

План-капкан

- считаем вектор-потенциал \mathbf{A} малым

- теория возмущений, находим ВФ $|c\rangle, |v\rangle$

- золотое правило Ферми (ЗПФ), считаем вероятность перехода

$$\Pi = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle c | H_{eR} | v \rangle|^2 \rho(c)$$

- считаем потери мощности

- считаем мнимую часть диэл. Проницаемости, Крамерс-Крониг => действительная часть диэл. проницаемости

$E(r, t) = E \cdot e^{i(qr - \omega t)} + \text{к.с.}$ напряженность поля

$A(r, t) = -\frac{E}{2q} \cdot e^{i(qr - \omega t)} + \text{к.с.}$ вектор – потенциал

$|c\rangle \propto u_c e^{ik_c r} e^{i\frac{E_c t}{\hbar}}$ блоховские ВФ

$|v\rangle \propto u_v e^{ik_v r} e^{i\frac{E_v t}{\hbar}}$

$\langle c | H_{eR} | v \rangle = ?$ Интегрирование по времени дает:

$$\int H_{eR} e^{i\frac{E_c t}{\hbar}} e^{-i\omega t} e^{-i\frac{E_v t}{\hbar}} dt \propto \delta(E_c(k_c) - E_v(k_v) - \hbar\omega)$$

Далее вычисляем: $\left| \langle c | H_{eR} | v \rangle \right|^2 = \frac{E^2}{4q^2} \left| \int u_{c,k_c}^* e^{i(\bar{q} - \bar{k}_c) \cdot \bar{r}} (\vec{e}\vec{p}) u_{v,k_v} e^{i\bar{k}_v \cdot \bar{r}} dr \right|^2$, $\vec{e} \uparrow \uparrow \vec{A}$

$k_v + q = k_c$ сохр. импульса в процессе поглощения

$$u_{c,k_v+q} = u_{c,k_v} + q \nabla_k u_{c,k_v}$$

т.к. ϕ – функции периодические $\int_V \rightarrow \int_{\text{элемент ячейки}}$

$$|P_{cv}|^2 = \left| \langle c | \vec{e}\vec{p} | v \rangle \right|^2 = \left| \int u_{c,k_c}^* (\vec{e}\vec{p}) u_{v,k_v} dr \right|^2$$

$$\Pi = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e}{m\omega} \right)^2 \left| \frac{E(\omega)}{2} \right|^2 \sum_k |P_{cv}|^2 \delta(E_c(k) - E_v(k) - \hbar\omega)$$

Потери мощности в единице объема

$dI = \Pi \cdot \hbar \omega$, Π – вер – ть перехода в ед. времени

$$-\frac{dI}{dt} = -\left(\frac{dI}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\alpha I) \cdot (cn) = \left|\alpha = \frac{\omega \varepsilon''}{c\sqrt{\varepsilon'}}\right| = \frac{\omega I}{n^2} \varepsilon'' = \left|I = \frac{n^2}{8\pi} |E(\omega)|^2\right|$$

$$-\frac{dI}{dt} = \frac{\omega n^2 \varepsilon''}{8\pi n^2} |E(\omega)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e^2}{m\omega}\right)^2 \left|\frac{E(\omega)}{2}\right|^2 \sum_k |P_{cv}|^2 \delta(E_c(k) - E_v(k) - \hbar\omega) \hbar\omega$$

$$\varepsilon''(\omega) = \left(\frac{2\pi e}{m\omega}\right)^2 \sum_k |P_{cv}|^2 \delta(E_c(k) - E_v(k) - \hbar\omega)$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega)}{x - \omega} dx$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_k \frac{2|P_{cv}|^2}{m\hbar\omega_{cv}} \frac{1}{\omega_{cv}^2 - \omega^2}$$

$$f_{cv} \equiv \frac{2|P_{cv}|^2}{m\hbar\omega_{cv}}$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_k \frac{f_{cv}(k)}{\omega_{cv}^2 - \omega^2}$$

Вывели диэлектрическую функцию полупроводника:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_k \frac{f_{cv}(k)}{\omega_{cv}^2(k) - \omega^2}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{2\pi e^2}{m} \sum_k \hbar \omega_{cv} f_{cv}(k) \delta(E_c(k) - E_v(k) - \hbar\omega)$$

Введем комбинированную плотность состояний для валентной зоны и зоны проводимости

$$D(E_{cv}) = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{dS_k}{|\nabla_k E_{cv}|}$$

$$\sum_k \rightarrow \int D(E_{cv}) dE_{cv}$$

=>

$$\varepsilon'(\omega) \propto \int \frac{f_{cv}(k)}{E_{cv}^2(k) - \hbar^2 \omega^2} D(E_{cv}) dE_{cv}$$

$$\varepsilon''(\omega) \propto D(\hbar\omega)$$

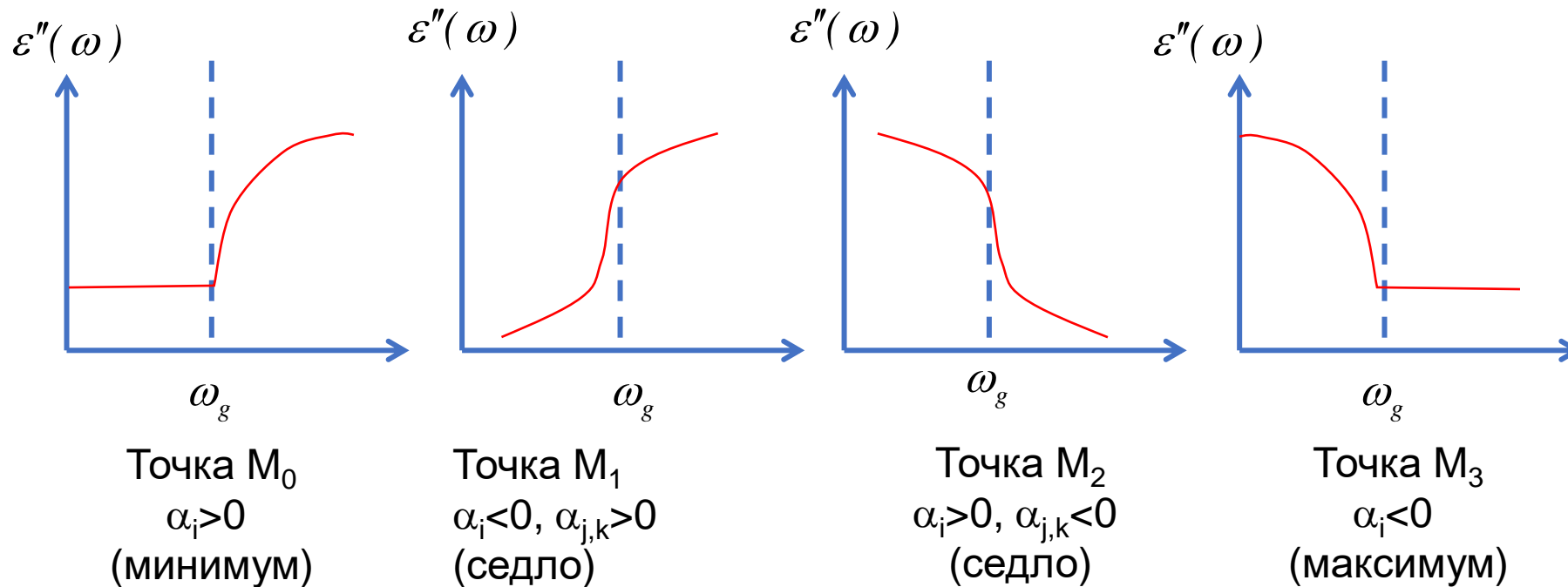
Источник сингулярностей!!!

$$|\nabla_k E_{cv}| = 0!!!$$

Пусть $k=0$. Разложим $E(k)$ вблизи критической точки

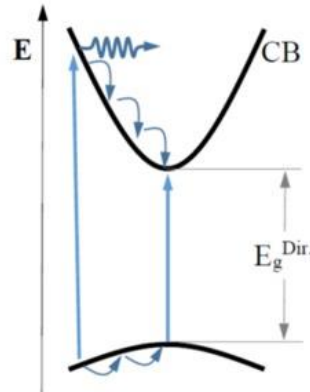
$$E(k) = E(0) + \alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2 + \alpha_3 k_3^2 + \dots$$

Существует 4 типа сингулярностей в зависимости от типа экстремума (минимум, максимум, 2 седловые точки).

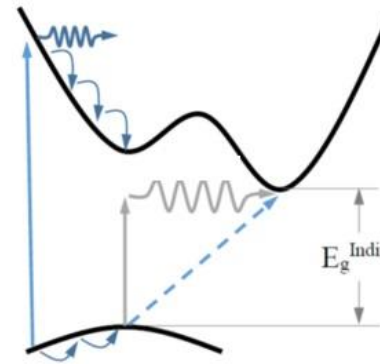


Переходы

Прямые
GaAs. InP. GaN

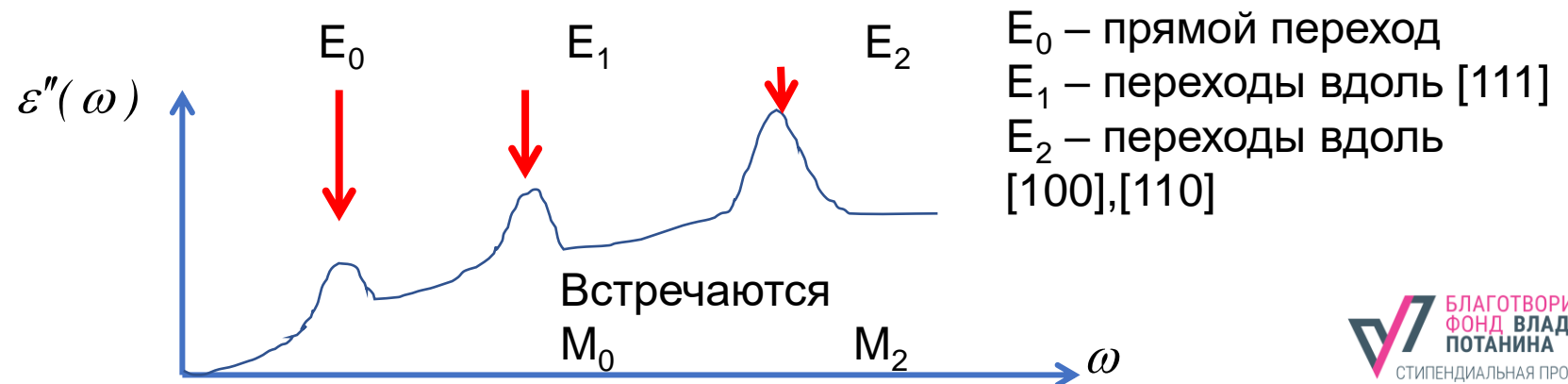


Непрямые
Si.Ga. AlAs.GaP



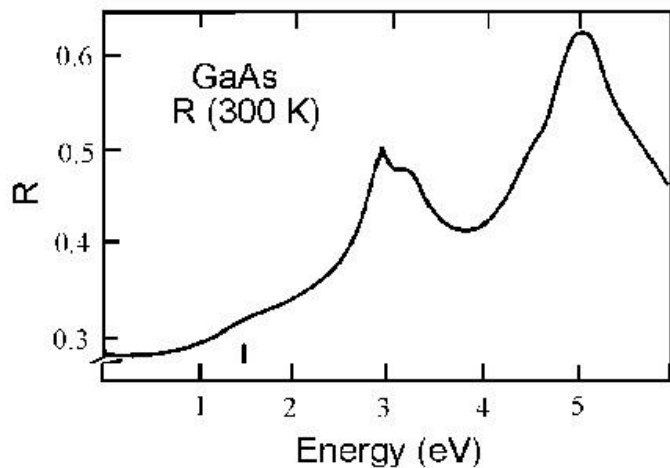
Сложные спектральные зависимости поглощения:

- прямые/непрямые переходы
- спин-орбитальное расщепление уровней
- приместные уровни
- особенности Ван Хофа



В непрямозонном п/п последовательность E_0 - E_2 произвольная!

Эти особенности отображаются в спектрах отражения и поглощения.

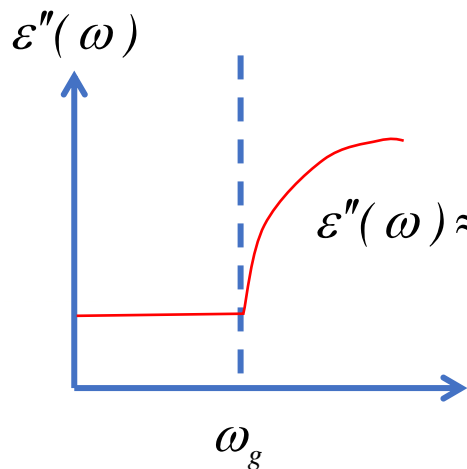


$$R(\omega) = \left| \frac{\tilde{n}(\omega) - 1}{\tilde{n}(\omega) + 1} \right|^2, \quad \alpha(\omega) \propto \omega \varepsilon''(\omega)$$

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)}$$

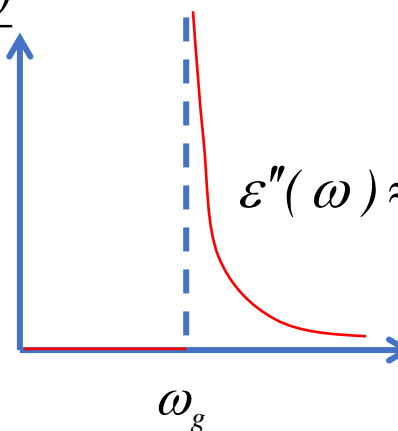
Эти изменения малы, особые точки видно слабо.

$\varepsilon''(\omega)$ малы. Но! $\frac{d\varepsilon''(\omega)}{d\omega}$ - велики!



$$\varepsilon''(\omega) \approx \sqrt{\hbar\omega - \hbar\omega_g}, \quad \omega > \omega_g$$

$$\frac{d\varepsilon''(\omega)}{d\omega}$$

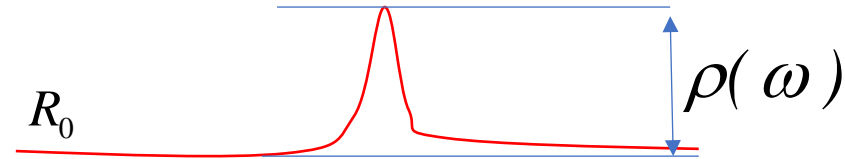


$$\frac{d\varepsilon''(\omega)}{d\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega - \hbar\omega_g}}, \quad \omega > \omega_g$$

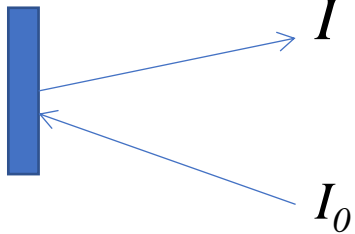
Модуляционная спектроскопия

Основная идея модуляционной спектроскопии: измерение производной коэффициента отражения по некоторому модулируемому параметру

$$R(\omega) = R_0 + \rho(\omega), \quad R \ll R_0$$



Модулируем параметр $\xi \Rightarrow \frac{dR(\omega)}{d\xi} = \frac{d(R_0 + \rho(\omega))}{d\xi} = \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$



$$I = I_0 R$$

$$\frac{dI}{d\omega} = I_0 \frac{dR}{d\omega} + R \frac{dI_0}{d\omega}$$

$\frac{dI_0}{d\omega}$ – возможный источник ложных максимумов

Типы модуляции:

1. λ -модуляция (частотная модуляция)
2. Электромодуляция (напряженность поля)
3. Термомодуляция (температура)
4. ϕ -модуляция (поляризации излучения)

Пусть модулируется длина волны излучения $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \cdot \cos(\Omega t)$

$\Delta\lambda$ – глубина модуляции

$$I(\lambda) = I(\lambda_0) + \frac{dI}{d\lambda} \Delta\lambda \cdot \cos(\Omega t) + \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{d\lambda^2} (\Delta\lambda)^2 \cdot \cos^2(\Omega t) + \dots$$

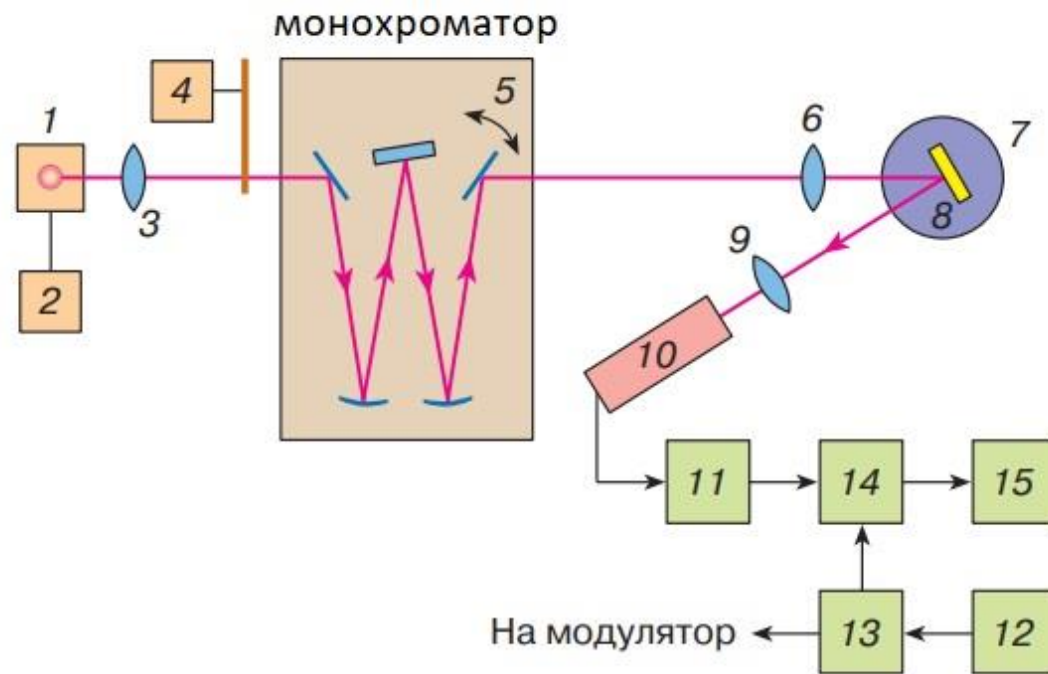
$$I(\lambda) = I(\lambda_0) + \frac{1}{4} \frac{d^2 I}{d\lambda^2} (\Delta\lambda)^2 + \frac{dI}{d\lambda} \Delta\lambda \cdot \cos(\Omega t) + \frac{1}{4} \frac{d^2 I}{d\lambda^2} (\Delta\lambda)^2 \cdot \cos(2\Omega t) + \dots$$

На синхронный детектор!!!

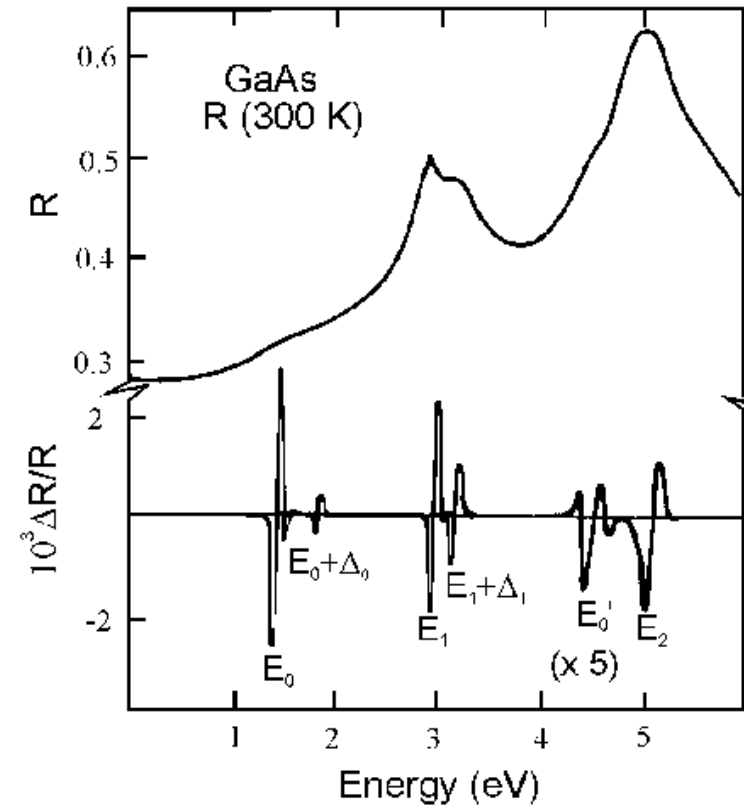
Или

На синхронный детектор!!!

Схема установки λ -модуляционной спектроскопии :



Блок-схема установки для исследования модулированного отражения: 1 – источник света, 2 – блок питания источника света, 3–6, 9 – линзы, 4 – obturator, 5 – модулятор, 7 – криостат, 8 – образец, 10 – фотоприемник, 11 – резонансный усилитель, 12 – звуковой генератор, 13 – усилитель мощности, 14 – синхронный детектор, 15 – компьютер



Мощное применение модуляционной спектроскопии

Эффект Франца-Келдыша

Описывает поведение полупроводника в постоянном электрическом поле, проявляется в **сдвиге полосы поглощения** и **осцилляциях** диэлектрической проницаемости вблизи края поглощения.

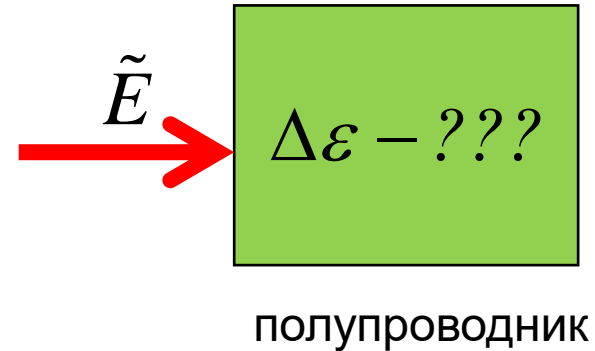
$$H_E = -e\tilde{E}z, \quad \tilde{E} - \text{электрическое поле}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r - e\tilde{E}z - E_r \right) \varphi(r) = 0, \quad \text{поле вдоль } z$$

$$\varphi(r) = \varphi(x, y) \varphi(z),$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik_x x + ik_y y}, \quad E = E_0 + \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2\mu} + E_z$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dz^2} - e\tilde{E}z - E_z \right) \varphi(z) = 0$$



введем безразмерную переменную

$$\xi \equiv -z^3 \sqrt{\frac{2\mu e}{\hbar^2} \tilde{E}}, \quad \xi = \frac{E_z}{\Theta}, \quad \text{где } \Theta = \sqrt[3]{\frac{e^2 \tilde{E} \hbar^2}{2\mu}}$$

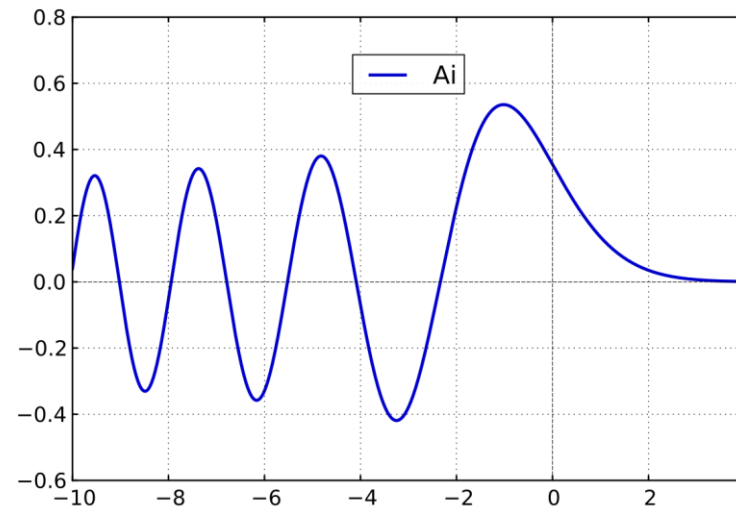
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu \Theta} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{e\tilde{E}z}{\Theta} - \frac{E_z}{\Theta} \right) \varphi(z) = 0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu \sqrt[3]{\frac{e^2 \tilde{E} \hbar^2}{2\mu}}} \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{e\tilde{E}z}{\sqrt[3]{\frac{e^2 \tilde{E} \hbar^2}{2\mu}}} - \xi \right) \varphi(\xi) = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi(\xi)}{d\xi^2} = -2\xi \varphi(\xi)$$

решения – функции Эйри $\varphi(\xi)$

$$\varphi(\xi) = \frac{\sqrt{e\tilde{E}}}{\Theta} \text{Ai}(\xi)$$



Нам нужно вычислить приращение $\Delta\varepsilon''(\omega)$

1. Известна ВФ => можно вычислить дипольный матричный элемент $|P_{cv}|^2$
2. Вычисляем плотность состояний вблизи критической точки M_0
3. Вычисляем $\Delta\varepsilon''(\omega)$

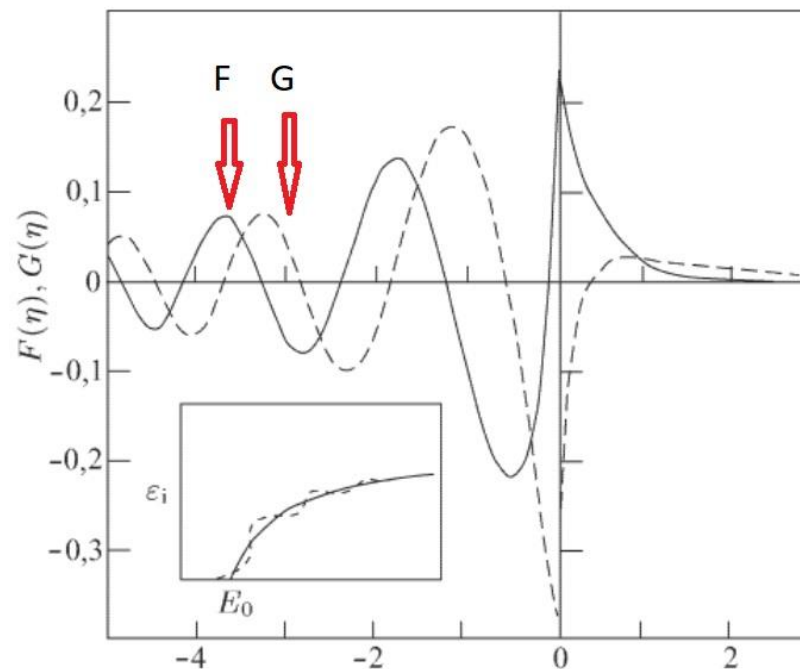
Результат:

$$\Delta\varepsilon''(\omega, \tilde{E}) = \frac{2e^2 (2\mu)^{3/2} P_{cv} \sqrt{\Theta}}{m^2 \hbar E^2} F\left(\frac{E_0 - E}{\Theta}\right)$$

$$F(\xi) = \pi \left[Ai'^2(\xi) - \xi Ai^2(\xi) \right] - \sqrt{-\xi} H(-\xi)$$

$$\xi = \frac{E_0 - E}{\Theta}$$

F - электрооптическая функция



Эксперимент

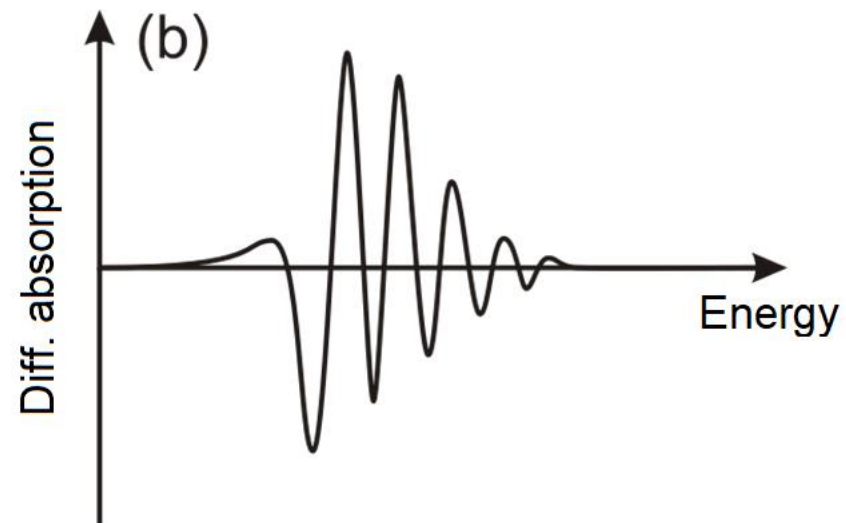
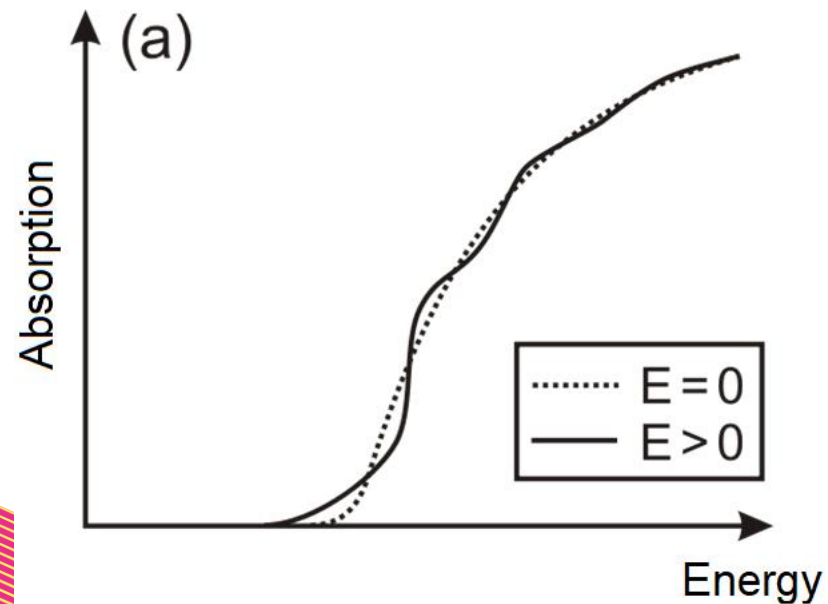
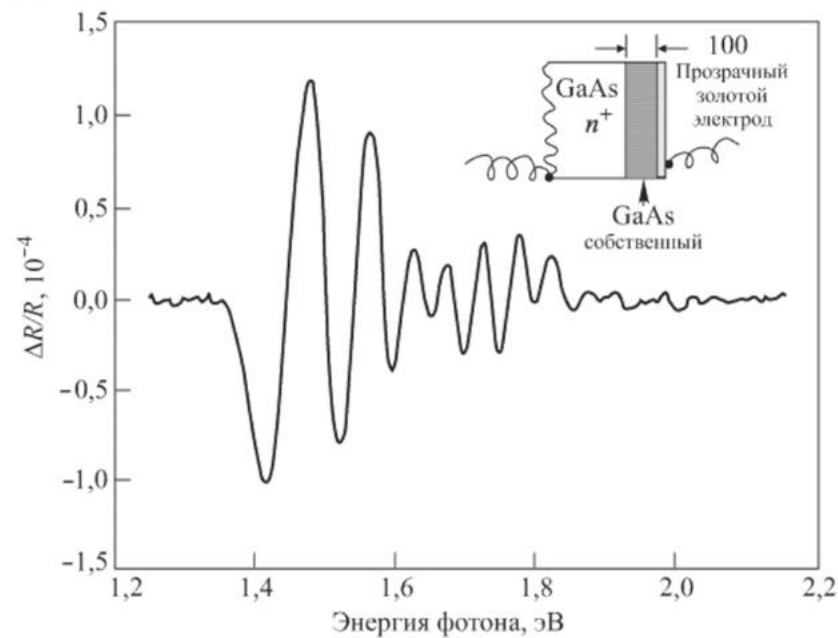
GaAs

$$E_g = 1.42 \text{ эВ}$$

$$U = \langle U \rangle + \Delta U \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\langle U \rangle = 1 \text{ В}, \Delta U = 0.1 \text{ В}$$

$$\langle E \rangle = 10^5 \text{ В/см}, \Delta E = 10^4 \text{ В/см}$$



Спасибо за внимание!